科学版

大学数学习题精解系列

实变函数与泛函分析习题精解

宋国柱 主编

- 课程学习与考研复习的理想读物
- 系统总结基本概念基本定理
- 传授课程习题各种典型解法
- 收录名校研究生入学试题

科学出版社
www.sciencep.com

(O-1831.0101)

大学数学习题精解系列

- 数学分析习题精解（单变量部分）
- 数学分析习题精解（多变量部分）
- 高等代数与解析几何习题精解
- 概率统计习题精解
- 制胜数学奥林匹克
- 伯克利数学问题集
- 美国大学生数学竞赛例题选讲
- 数学考研精解（经管类）
- 数学考研精解（理工类）
- 实变函数与泛函分析习题精解

高等教育分社理科编辑部
联系电话：010-64011132
E-mail: mph-edu@cspg.net

ISBN 7-03-012066-3
9 787030 120663 >

ISBN 7-03-012066-3
定 价：27.00 元

大学数学习题精解系列

实变函数与泛函分析习题精解

宋国柱　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书由三部分内容组成，第一部分总结了实变函数和泛函分析的基本概念和主要定理，给出了教材《实变函数和泛函分析概要》中各章的习题解答；第二部分介绍了与教材《抽象分析基础》配套的各章习题、复习题及其解答；第三部分是南京大学硕士研究生入学考试实变函数试题选解.

本书可作为高等院校基础数学和应用数学、信息和计算数学、统计等专业的教学参考书，也可作为相关专业自学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析习题精解/宋国柱主编. —北京：科学出版社，2004

（大学数学习题精解系列）

ISBN 7-03-012066-3

Ⅰ.实… Ⅱ.宋… Ⅲ.①实变函数－高等学校－解题②泛函分析－高等学校－解题 Ⅳ.O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 078995 号

策划编辑：杨 波 吕 虹/文案编辑：邱 璐 贾瑞娜

责任校对：宋玲玲/责任印制：安春生/封面设计：黄华斌

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新 蕾 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年1月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2004年1月第一次印刷 印张：21

印数：1—5 000 字数：401 000

定价：27.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

前　　言

20多年来，我们在南京大学数学系讲授实变函数和泛函分析这两门课程，多次使用了教材《实变函数与泛函分析概要》（郑维行、王声望编）和教材《抽象分析基础》（宋国柱、曹祥炎编），并参阅了其他教材和专著，积累了这两门课程习题的各种典型解法．在这一基础上，为了帮助读者学好这两门课程，我们编写了这本学习参考书，系统总结了实变函数、泛函分析中的基本概念、基本定理和典型方法，并在各章附上一定数量的练习题及解法提示，同时还收编了部分"南京大学攻读硕士学位研究生入学考试实变函数试题"，并作了解答，对读者复习实变函数极有参考价值．

本书编写过程中得到了郑维行教授、王声望教授和苏维宜教授等的帮助与指教，在此谨对他们致以衷心的感谢．由于作者水平所限，整理时间仓促，书中错误在所难免，所做的解答也未必是最好的，我们恳切地希望读者批评指正．

编　者

2002年10月于南京

目 录

第一篇 《实变函数与泛函分析概要》习题与解答

第二篇 《抽象分析基础》习题与解答

第一篇 《实变函数与泛函分析概要》习题与解答

第一章 集与点集

一、基本概念和主要定理

集的对等 设 A,B 为两个集,若存在 A 到 B 上的一一映射 f,则称 A 与 B 对等,记作 $A\sim B$.

集的势 将所有的集分类,凡彼此对等的集归于一类,不对等的集归于不同的类,每一类均赋予一个标志,称为该类中每个集的势(或基数),集 A 的势记为 $\bar{\bar{A}}$.

若 A 对等 B 的子集,但 A 与 B 不对等,则称 A 的势小于 B 的势,记作 $\bar{\bar{A}}<\bar{\bar{B}}$ 或 $\bar{\bar{B}}>\bar{\bar{A}}$.

定理 1 (伯恩斯坦(Bernstein)定理) 若 A 对等 B 的子集(即 $\bar{\bar{A}}\leqslant\bar{\bar{B}}$),且 B 对等 A 的子集(即 $\bar{\bar{B}}\leqslant\bar{\bar{A}}$),则 A 与 B 对等(即 $\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{B}}$).

定理 2 设 A 为集,A 的一切子集所组成的集类记为 $\mathscr{A}$,则 $\bar{\bar{\mathscr{A}}}>\bar{\bar{A}}$.

可列集 凡与自然数集 $\mathbf{N}$ 对等的集,皆称**可列集**,可列集的势记为$\aleph_0$.

任何无限集均含有可列的子集;

可列集的任何无限子集仍是可列集;

有限个乃至可列个可列集的并集是可列集;

两个可列集 A_1,A_2 的积集

$$A_1\times A_2=\{(x,y)\mid x\in A_1,\ y\in A_2\}$$

为可列集;

有理数集、平面上的有理点集皆是可列集.

连续集 凡与区间$[0,1]$对等的集,皆称**连续集**,连续集的势记为$\aleph$,容易证明

$$\aleph_0<\aleph.$$

定理 3 (等势定理) 若 A 为无限集,B 为可列集或有限集,则

$$\overline{\overline{A\cup B}}=\bar{\bar{A}}.$$

无理数集的势为$\aleph$;$\mathbf{R}^1$ 中的任何区间,$\mathbf{R}^n$ 中的任何区域的势均为$\aleph$.

开集、闭集及其构造 设 $E\subset\mathbf{R}^n$.

(1) 若存在点 a 的某个邻域$U(a)$,使得$U(a)\subset E$,则称 a 为E 的内点;

(2) 若 E 的每点均为E 的内点,则称 E 为开集;

(3) 若点 a 的任一邻域中均含有 E 的无限多个点，则称 a 为 E 的聚点；

(4) E 的一切聚点所成之集称为 E 的导集，记为 E'；

(5) 若 $E'\subset E$，则称 E 为闭集；

(6) 若 $E\subset E'$，则称 E 为自密集；

(7) 若 $E'=E$，则称 E 为完全集.

任意个开集的并集是开集；

有限个开集的交集是开集；

任意个闭集的交集为闭集；

有限个闭集的并集为闭集；

闭集的补集是开集，开集的补集是闭集.

定理 4（一维开集的构造）　直线上任一非空开集 G 可表成至多可列个互不相交的开区间(称作 G 的构成区间)之并

$$G=\bigcup_k(\alpha_k,\ \beta_k).$$

定理 5　直线上的非空闭集 F，或是全直线，或是从直线上挖掉至多列个互不相交的开区间(称 F 的余区间)所得之集.

康托尔(Cantor)**集** P_0　是势为 $\aleph$、且不含内点的完全集.

集的序和极大元　设 X 为一集.

(1) 若在 X 中规定了某些元素之间的关系$\leqslant$，它满足序公理：

(i) $a\leqslant a$；

(ii) 若 $a\leqslant b$，$b\leqslant a$，则 $a=b$；

(iii) 若 $a\leqslant b$，$b\leqslant c$，则 $a\leqslant c$.

则称 X 为带有序$\leqslant$的半序集.

(2) 设 X 为带有序$\leqslant$的半序集，若对 X 中任何两个元素 a，b，关系式 $a\leqslant b$ 与 $b\leqslant a$ 中必有一个成立，则称 X 为全序集.

(3) 设 X 为半序集，X_0 为 X 的子集，若存在 $b\in X$，使得对一切 $x\in X_0$ 有 $x\leqslant b$，则称 b 为 X_0 的上界；又设 b 是 X_0 的上界，如果对 X_0 的任一上界 b'，均有 $b\leqslant b'$，则称 b 为 X_0 的上确界；当 b 是 X_0 的上界(下界)，且 $b\in X_0$，则称 b 为 X_0 的最大元(最小元).

(4) 设 X 为半序集，$X_0\subset X$，$b\in X_0$，对一切 $x\in X_0$ 有 $x\leqslant b$ 或者 x 与 b 无关系，则称 b 为 X_0 的极大元.

定理 6（佐恩(Zone)引理）　设 X 为非空半序集，若 X 的每一非空全序子集有上确界，则 X 有极大元.

定理 7（选择公理）　设 $J=\{A\}$是一族互不相交的非空集组成的集族，则存在满足下面两个条件的集 E：

(1) $E \subset \bigcup\limits_{A \in J} A$;

(2) E 与 J 中每一个集有惟一公共元素.

二、习题、练习题与解法

1. 证明下列关系:

(i) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$.

证法 1 $x\in(A-B)\cap(C-D) \Leftrightarrow x\in A-B$ 且 $x\in C-D \Leftrightarrow x\in A, x\overline{\in} B, x\in C, x\overline{\in} D \Leftrightarrow x\in A\cap C, x\overline{\in} B\cup D \Leftrightarrow x\in(A\cap C)-(B\cup D)$. 于是,所给等式成立.

证法 2

$$\begin{aligned}(A-B)\cap(C-D) &= (A\cap \mathscr{C}B)\cap(C\cap \mathscr{C}D)\\ &= (A\cap C)\cap(\mathscr{C}B\cap \mathscr{C}D)\\ &= (A\cap C)\cap \mathscr{C}(B\cup D)\\ &= (A\cap C)-(B\cup D).\end{aligned}$$

(ii) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

证 $x\in(A\cap B)\cup C \Leftrightarrow x\in A\cap B$ 或 $x\in C \Leftrightarrow x\in A$ 且 $x\in B$,或 $x\in C \Leftrightarrow x\in A\cup C$ 且 $x\in B\cup C \Leftrightarrow x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$.
于是,所给等式成立.

(iii) $A-(B-C)\subset(A-B)\cup C$.

证法 1 $x\in A-(B-C)\Rightarrow x\in A, x\overline{\in} B-C\Rightarrow x\in A, x\overline{\in} B$ 或 $x\in A, x\in B, x\in C\Rightarrow x\in A-B$ 或 $x\in C\Rightarrow x\in(A-B)\cup C$.
由 x 的任意性,包含关系得证.

证法 2

$$\begin{aligned}A-(B-C) &= A\cap \mathscr{C}(B\cap \mathscr{C}C)\\ &= A\cap(\mathscr{C}B\cup C) = (A\cap \mathscr{C}B)\cup(A\cap C)\\ &\subset (A\cap \mathscr{C}B)\cup C = (A-B)\cup C.\end{aligned}$$

(iv) $(A-B)-(C-D)\subset(A-C)\cup(D-B)$.

证

$$\begin{aligned}(A-B)-(C-D) &= (A\cap \mathscr{C}B)\cap \mathscr{C}(C\cap \mathscr{C}D)\\ &= (A\cap \mathscr{C}B)\cap(\mathscr{C}C\cup D)\\ &= (A\cap \mathscr{C}B\cap \mathscr{C}C)\cup(A\cap \mathscr{C}B\cap D)\\ &\subset (A\cap \mathscr{C}C)\cup(\mathscr{C}B\cap D)\\ &= (A-C)\cup(D-B).\end{aligned}$$

(v) $(A-B)\cup C=A-(B-C)$成立的充要条件是什么?

证 由(iii)知,等式右边 $=(A-B)\cup(A\cap C)$,左边 $=(A-B)\cup C$,可见 $A\cap C=C$,即 $C\subset A$ 是等式成立的充分条件.

下证 $C\subset A$ 也是等式成立的必要条件.

用反证法,假设 $C\not\subset A$,则有 $x\in C$ 且 $x\overline{\in}A$,从而 $x\overline{\in}A-B$ 且 $x\overline{\in}A\cap C$,于是,$x\overline{\in}(A-B)\cup(A\cap C)$. 而 $x\in(A-B)\cup C$,故等式不成立.

2. 设给出集 E 与任意一组集 $A_\alpha,\alpha\in I$,问关系式

$$E\cup\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha)$$

是否恒成立?

解 上式恒成立. 事实上,

$$x\in \text{左边}\Rightarrow x\in E \text{ 或 } x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\Rightarrow x\in E$$
$$\text{或 } x\in A_\alpha(\forall\alpha\in I)\Rightarrow x\in E\cup A_\alpha(\forall\alpha\in I)$$
$$\Rightarrow x\in\bigcap_{\alpha\in I}(E\cup A_\alpha)\Rightarrow x\in \text{右边};$$

反之,$x\in$ 右边 $\Rightarrow x\in E\cup A_\alpha(\forall\alpha\in I)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{若 } x\in E,\text{则 } x\in E\cup\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\\ \text{若 } x\overline{\in}E,\text{则 } x\in A_\alpha(\forall\alpha\in I),\text{从而 } x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\end{cases}$$
$$\Rightarrow x\in \text{左边}.$$

3. 设 $A=\{0,1\}$,试证一切排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$,$a_n\in A$ 所成的集的势为 $\aleph$.

证 把一切排列与二进小数作对应

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)\leftrightarrow 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,\quad a_n\in A=\{0,1\}$$

因二进小数 $\{0.a_1a_2\cdots a_n\cdots a_n\in A\}$ 与 $[0,1]$ 对等,故其势为 $\aleph$,从而一切排列的势为 $\aleph$.

4. 试作下列各题中集合间的一一对应:

(i) $[0,1]$ 与 $(0,1)$;

(ii) $[a,b]$ 与 $(-\infty,\infty)$;

(iii) 开上半平面与单位圆.

解 (i) 设 $(0,1)$ 中的有理点的全体为 $\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$,则 $[0,1]$ 中的有理点的全体为 $\{0,1,r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$,作对应

$$0\leftrightarrow r_1,\quad 1\leftrightarrow r_2,\quad r_1\leftrightarrow r_3,\cdots,r_n\leftrightarrow r_{n+2},\cdots$$

再让 $(0,1)$ 中的无理点与 $[0,1]$ 中的无理点自身对应,这样就建立了 $[0,1]$ 与 $(0,1)$ 间的一一对应.

(ii) 先建立 $[a,b]$ 与 (a,b) 间的一一对应(方法同(i)),再作 (a,b) 到 $(-\infty,\infty)$ 的映射

$$y=\tan\left(\frac{x-b}{b-a}+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad x\in(a,b).$$

这样就建立了$[a,b]$与$(-\infty,\infty)$间的一一对应.

(iii) 据复变函数的知识,映射 $w=\dfrac{Z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}Z-1}$实现了开上半平面与单位圆间的一一对应.

5. 下列各集能否同自然数集或[0,1]构成一一对应:

(i) 以有理数为端点的区间集;

(ii) 闭正方形[0,1;0,1].

如果可能,试作这种对应方法.

解 (i) 以有理数为端点的区间集能同自然数集构成一一对应,方法如下:

设有理数的全体为$\{r_1,r_2,r_3,\cdots\}$,A_{ij}表示以r_i和r_j($r_i<r_j$)为端点的区间,则以有理数为端点的区间全体为

$$\begin{array}{ccccc}
A_{12}, & A_{13}, & A_{14}, & A_{15}, & \cdots\\
 & A_{23}, & A_{24}, & A_{25}, & \cdots\\
 & & A_{34}, & A_{35}, & \cdots\\
 & & & A_{45}, & \cdots\\
 & & & & \cdots
\end{array}$$

将这些区间排列成:$A_{12},A_{13},A_{23},A_{14},A_{24},A_{34},\cdots$,便建立了以有理数为端点的区间集与自然数集的一一对应.

(ii) 闭正方形[0,1;0,1]与[0,1]能构成一一对应,方法如下:

把闭正方形分解为互不相交的三部分

$$A=\{(x,y):0<x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant 1\},$$
$$B=\{(0,y):0\leqslant y\leqslant 1\},$$
$$C=\{(x,0):0<x\leqslant 1\}.$$

(1) 首先建立 $A=\{(x,y):0<x\leqslant 1,0<y\leqslant 1\}$与半闭区间$(0,1]$的一一对应.

若把某一位起后面全是0的二进小数叫做二进有限小数,否则称二进无限小数,那么,$(0,1]$中的实数与二进无限小数是一一对应的.

对二进无限小数$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$(有无穷多个a_i为1),我们这样给它加括号,使得每个括号中只有最后一个数码为1,前的数码全为0.例如,二进无限小数

$$0.1\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\cdots$$

加括号成0.(1)(01)(1)(0001)(001)…,记作为

$$0.\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\cdots$$

显然,每个二进无限小数,均可加括号成为一个这样的符号序列$0.\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\cdots$;

反之,每个这样的符号序列均可去掉括号成为一个二进无限小数.

对每个$(x,y)\in A$,把x,y均表为二进无限小数,并加括号成符号序列

$$x = 0.\sigma'_1\sigma'_2\cdots\sigma'_n\cdots, \quad y = 0.\sigma''_1\sigma''_2\cdots\sigma''_n\cdots.$$

令$t=0.\sigma'_1\sigma''_1\sigma'_2\sigma''_2\cdots\sigma'_n\sigma''_n\cdots$,再去掉这个符号序列的括号,便得到一个二进无限小数,从而确定了一个实数$t\in(0,1]$.

反之,对于每个$t\in(0,1]$,把t表为二进无限小数,并加括号成符号序列

$$t = 0.\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\cdots,$$

令$x=0.\sigma_1\sigma_3\cdots\sigma_{2n-1}\cdots$,$y=0.\sigma_2\sigma_4\cdots\sigma_{2n}\cdots$,并去掉这两个符号序列的括号,便得到两个二进无限小数,从而确定了一点$(x,y)\in A$.

(2) 建立闭正方形在y轴上的点集$B=\{(0,y):0\leqslant y\leqslant 1\}$与区间$[-1,0]$的一一对应.

这是容易的,只要令$y=t+1$,$t\in[-1,0]$.

(3) 建立$C=\{(x,0):0<x\leqslant 1\}$与区间$(1,2]$的一一对应.

这也是容易的,只要令$x=t-1$,$t\in(1,2]$.

综合(1)、(2)、(3),我们建立了闭正方形$[0,1;0,1]$与闭区间$[-1,2]$的一一对应,再作$[-1,2]$到$[0,1]$的线性映射$y=\frac{1}{3}(x+1)$,$x\in[-1,2]$就完成了.

6. 证明整系数多项式全体是可列集.

证 设n次整系数多项式为

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

由整数集$\mathbf{Z}$的可列性知零次整系数多项式的全体$P_0=\{p_0(x)=a_0, a_0\in\mathbf{Z}\}$为可列集.又据可列个可列集之并为可列集,可知一次整系数多项式的全体

$$P_1 = \{p_1(x) = a_0 + a_1x;\ a_0, a_1 \in \mathbf{Z},\ a_1 \neq 0\}$$

为可列集.依此由数学归纳法可证得n次整数多项式全体P_n为可列集,而一切整系数多项式所成之集P又是可列个可列集之并

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n,$$

从而是可列的.

7. 设$C[0,1]$表示$[0,1]$上一切连续函数所成的类,试证它的势为$\aleph$.

证 先证明全体实数列所成子集H对等于$(0,1)$.设H的子集

$$B = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots): x_n \in (0,1), n = 1,2,\cdots\},$$

作B到H的映射φ

$$\varphi(x) = \left(\tan\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\pi,\ \tan\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)\pi, \cdots, \tan\left(x_n - \frac{1}{2}\right)\pi, \cdots\right),$$

显然φ是B到H的一对一映射,故$H\sim B$.

下证$B\sim(0,1)$.

首先,把(0,1)中的任一数 x 与 B 中的元 $(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 对应,便知(0,1)对等于 B 的一个子集.

反之,对 B 中任何 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$,用十进无限小数表示 x_n

$$x_1 = 0.x_{11}x_{12}\cdots x_{1n}\cdots,$$
$$x_2 = 0.x_{21}x_{22}\cdots x_{2n}\cdots,$$
$$\vdots$$
$$x_n = 0.x_{n1}x_{n2}\cdots x_{nn}\cdots,$$
$$\vdots$$

作无限小数 $\psi(x)=0.x_{11}x_{21}x_{12}\cdots x_{n1}x_{n-1,2}\cdots x_{1n}\cdots$,显然,$\psi(x)\in(0,1)$,且当 $x\neq y$ 时,$\psi(x)\neq\psi(y)$,故 B 对等于(0,1)的一个子集,于是由伯恩斯坦定理知 $B\sim(0,1)$,从而

$$\overline{\overline{H}} = \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{(0,1)}} = \aleph.$$

现在来证明 $C[0,1]$ 的势为 $\aleph$.

事实上,因一切常数函数 $f(x)=k$ 为[0,1]的连续函数,$\overline{\overline{C[0,1]}}\geqslant\aleph$ 是明显的.另一方面,把[0,1]中全体有理数排列成 $r_1,r_2,r_3,\cdots$,对于 $C[0,1]$ 中任一个 $f(x)$,令实数列 $(f(r_1),f(r_2),f(r_3),\cdots)$ 与之对应,由函数的连续性可知,不同的函数对应的实数列也不同(若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在[0,1]中一切有理点上取值相同的话,便能由函数的连续性推得 $f(x)\equiv g(x)$).于是 $C[0,1]$ 对等于全体实数列 H 的一个子集,故有 $\overline{\overline{C[0,1]}}\leqslant\overline{\overline{H}}=\aleph$.

据伯恩斯坦定理,$\overline{\overline{C[0,1]}}=\aleph$.

8. 设 M 是 $[a,b]$ 上一切单调函数所成之集,则 $\overline{\overline{M}}=\aleph$.

提示 令 $[a,b]$ 中全体有理点为 $r_1,r_2,\cdots$,因单调函数 f 的间断点可列,故可设其无理间断点为 $x_1,x_2,\cdots$,则函数 f 由实数列 $\{f(r_1),f(x_1),f(r_2),f(x_2),\cdots\}$ 所确定,由实数列全体之势为 $\aleph$,便得 $\overline{\overline{M}}\leqslant\aleph$.

至于 $\overline{\overline{M}}\geqslant\aleph$ 是易证的.

9. 设 A 是非空集,它的势大于 1,A 上的一一映射称为 A 的置换,试证存在 A 的一个置换 f,使 $f(x)\neq x(\forall x\in A)$.

证 (i) 设 A 的势为 $n>1$,可记 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,令

$$f(a_i) = a_{i+1} \quad (i = 1,2,\cdots,n-1), \qquad f(a_n) = a_1,$$

显然 $f(x)\neq x\ (\forall x\in A)$,$f$ 是 A 上的一个置换.

(ii) 设 A 为可列集,记 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$,对任一自然数 k,$A=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\{a_{ik+1},a_{ik+2},\cdots,a_{(i+1)k}\}=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}A_i$,每个 A_i 的势为 k,由(i)知 A_i 上存在置换 $f_k^{(i)}$,使 $f_k^{(i)}(x)\neq x(\forall x\in A_i)$,故存在 A 上的置换 f_k,其中 $f_k(x)=f_k^{(i)}(x)$

$(x\in A_i, i=0,1,2,\cdots)$，满足 $f_k(x)\neq x(x\in A)$，且当 $k_1\neq k_2$ 时，$f_{k_1}\neq f_{k_2}$.

(iii) 设 A 的势为 $\aleph$，则 $A\overset{g}{\sim}(0,1)$，对任一 $\alpha\in(0,1)$，令

$$f_\alpha(x)=x^\alpha \qquad (x\in(0,1)),$$

则 $f_\alpha(x)\neq x(\forall x\in(0,1))$，再令

$$g_\alpha(y)=g^{-1}\circ f_\alpha(g(y)) \qquad (y\in A),$$

则 g_α 是 A 的一个置换，满足 $g_\alpha(y)\neq y\ (\forall y\in A)$，且当 $\alpha_1\neq\alpha_2$，$\alpha_1,\alpha_2\in(0,1)$ 有 $g_{\alpha_1}\neq g_{\alpha_2}$.

10. 在上题中设 A 的势为偶数或可列，则那里所指的 f 可选得满足 $f(f(x))=x$，对一切 $x\in A$.

证 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{2n-1},a_{2n}\}$，令 $f(a_{2k-1})=a_{2k}$，$f(a_{2k})=a_{2k-1}(k=1,2,\cdots,n)$，则 f 是 A 的一个置换，满足 $f(x)\neq x$，$f(f(x))=x(\forall x\in A)$.

设 A 为可列集，取 k 为偶数，$A_i=\{a_{ik+1},a_{ik+2},\cdots,a_{(i+1)k}\}$，$A=\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$，对每个 A_i 存在 A_i 上的置换 $f_k^{(i)}$，满足 $f_k^{(i)}(x)\neq x$，$f_k^{(i)}(f_k^{(i)}(x))=x(\forall x\in A_i)$，故存在 A 上的置换 f_k，其中 $f_k(x)=f_k^{(i)}(x)(x\in A_i, i=0,1,2,\cdots)$，满足 $f_k(x)\neq x$，$f_k(f_k(x))=x\ (\forall x\in A)$.

11. 设 A 为无限集，试求它的一切置换所成的集的势.

证 当 A 为无限集时，由第 9 题(ii)，(iii)可知，A 的一切置换所成集的势 $\geqslant A$ 的势. 当 A 的势 $=\aleph_0$ 时，记 A 的一切置换为 $\{f_\alpha\}$，易知 $\{f_\alpha\}$ 之势 $\geqslant A$ 的一切子集所成集合之势 $=2^{\aleph_0}=\aleph$. 又设映射 $\widetilde{f}_\alpha\leftrightarrow\alpha_{x_1x_2\cdots}$，$\widetilde{f}_\alpha(a_i)=x_i\in A$，$x_i$ 互相独立，且每个 x_i 在 A 中取，则 $\{f_\alpha\}\subset\{\widetilde{f}_\alpha\}$，我们知道 $\{\alpha_{x_1x_2\cdots}\}$ 当 x_i 互相独立，每个指标在一个势为 $\aleph_0$ 的集中变化时，$\{\alpha_{x_1x_2\cdots}\}\leftrightarrow\mathbf{R}^\infty=\{(x_n):x_n$ 为实数$\}$，参阅本书第二篇第一章 §1.3 习题 4，故 $\{f_\alpha\}$ 之势 $\leqslant\aleph$，从而 $\{f_\alpha\}$ 之势 $=\aleph$；

当 A 的势为 $\aleph$ 时，首先同样有 A 的一切置换 $\{f_\alpha\}$ 之势 $\geqslant 2^\aleph$，不妨设 $A=[0,1]$，我们用 M 表示 $[0,1]$ 上一切有界实函数组成的集合，则可以证明 M 的势 $=2^\aleph$，从而 $\{f_\alpha\}$ 之势 $\leqslant 2^\aleph$，故 $\{f_\alpha\}$ 之势 $=2^\aleph$.

12. 设 G_1,G_2 是 R_1 中的开集，且 $G_1\subset G_2$，试证 G_1 的每个构成区间必含在 G_2 的某个构成区间之中.

证 设 (α_1,β_1) 是 G_1 的任一构成区间，$x\in(\alpha_1,\beta_1)$，又设 G_2 中含 x 的构成区间是 (α_2,β_2). 现证 $(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha_2,\beta_2)$.

用反证法，假设 $\alpha_1<\alpha_2$，由于 $\alpha_2<x$，有 $\alpha_2\in(\alpha_1,x)\subset(\alpha_1,\beta_1)\subset G_1\subset G_2$，这是不可能的(因 (α_2,β_2) 是 G_2 的构成区间，$\alpha_2\overline{\in}G_2$)，于是 $\alpha_1\geqslant\alpha_2$.

同理可证 $\beta_1\leqslant\beta_2$. 因而 $(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha_2,\beta_2)$.

13. 设 F_1,F_2 是 $\mathbf{R}^n$ 中闭集,且 $F_1\cap F_2=\varnothing$,试证存在开集 G_1,G_2,使 $G_1\cap G_2=\varnothing$,而 $G_1\supset F_1,G_2\supset F_2$.

证法 1　因 $F_1\cap F_2=\varnothing$,F_1,F_2 为闭集,则对 $x\in F_1$,有 $\rho(x,F_2)>0$;对 $y\in F_2$,有 $\rho(y,F_1)>0$.作开邻域 $O(x,r(x))$ 与 $O(y,r(y))$,其中,$r(x)=\frac{1}{2}\rho(x,F_2)$,$r(y)=\frac{1}{2}\rho(y,F_1)$.再令

$$G_1=\bigcup_{x\in F_1}O(x,r(x)),\qquad G_2=\bigcup_{y\in F_2}O(y,r(y)),$$

显然,G_1,G_2 都是开集,且 $G_1\supset F_1,G_2\supset F_2$.下证 $G_1\cap G_2=\varnothing$.假设不然,则有 $a\in G_1\cap G_2$,即 $a\in G_1$ 且 $a\in G_2$,则必存在 $x_0\in F_1,y_0\in F_2$,使得

$$a\in O(x_0,r(x_0))\quad 且\quad a\in O(y_0,r(y_0)),$$

不妨设 $r(x_0)\geqslant r(y_0)$,则

$$\begin{aligned}\rho(x_0,F_2)&\leqslant\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_0,a)+\rho(a,y_0)\\&<r(x_0)+r(y_0)\leqslant 2r(x_0)=\rho(x_0,F_2),\end{aligned}$$

这是荒谬的,于是结论得证.

证法 2　作 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 的连续函数

$$f(x)=\frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)},$$

则 $f(F_1)=0,f(F_2)=1$,即 $F_1=f^{-1}(0)$, $F_2=f^{-1}(1)$.现令

$$G_1=f^{-1}\left(\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\right),\qquad G_2=f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\right),$$

由连续函数的性质,开集的原像是开集,知 G_1,G_2 均为开集,且显然有

$$G_1\cap G_2=\varnothing,\qquad G_1\supset F_1,\qquad G_2\supset F_2.$$

14. 证明任何点集的内点全体是开集.

证　设 E 为任一点集,$\mathring{E}$ 为 E 的内点所成之集.任取 $x_0\in\mathring{E}$,则 x_0 为 E 之内点,故有 (α,β),使得 $x_0\in(\alpha,\beta)\subset E$.

对于任意的 $x\in(\alpha,\beta)$,显然 (α,β) 是 x 的邻域,因此,x 为 E 之内点,即 $x\in\mathring{E}$,从而 $(\alpha,\beta)\subset\mathring{E}$.

综上,对 $\mathring{E}$ 中的任一点 x_0,有 (α,β),使得 $x_0\in(\alpha,\beta)\subset\mathring{E}$.于是,$x_0$ 为 $\mathring{E}$ 的内点,$\mathring{E}$ 为开集.

15. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 只取整数值,则 $f(x)$ 的连续点之集为开集;间断点之集为闭集.

提示　设 $x_0\in E=\{x:x\in\mathbf{R},f$ 在 x 处连续$\}$ 且 $f(x_0)=n_0$(整数),由连续性及已知条件可知,存在 $\delta>0$,使得对一切 $x\in O(x_0,\delta)$ 有 $f(x)=n_0$,于是 f 在

$O(x_0,\delta)$上连续.

16. 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的实函数,f 映开集为开集. 问 f 是否连续? 又连续映射是否映开集为开集?

解　映开集为开集的实函数不一定连续. 例如,在每个区间$[n,n+1]$($n=0,\pm1,\pm2,\cdots$)上作康托尔三分集 P_n,令

$$G_n=[n,n+1]-P_n,\qquad P=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}P_n,\qquad G=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}G_n,$$

则 G 为开集. 设 G 的构成区间为(a_K,b_K),$K=1,2,\cdots$,在 $\mathbf{R}^1$ 上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\tan\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{b_K-x}{b_K-a_K}\right)\pi, & x\in(a_K,b_K),\ K=1,2,\cdots\\ 0, & x\in P.\end{cases}$$

显然,函数 f 在 P 的一切点上不连续,但 f 在 $\mathbf{R}^1$ 上映开集为开集. 事实上,设 E 为 $\mathbf{R}^1$ 中任一开集,$E=\bigcup\limits_i(\alpha_i,\beta_i)$,由于 P 不含任何区间,$(\alpha_i,\beta_i)\subset P$ 的情形是不可能发生的,因此只有两种可能:① $E\subset G$; ② E 的某些构成区间既含有 G 的点又有 P 的点.

① 当 $E\subset G$ 时,由本章习题 12,对任何 E 的构成区间(α_i,β_i),必有$(\alpha_i,\beta_i)\subset(a_K,b_K)$(其中$(a_K,b_K)$为 G 的某个构成区间). 据函数的定义,f 映(α_i,β_i)为开区间$\left(\tan\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{b_K-\alpha_i}{b_K-a_K}\right)\pi,\ \tan\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{b_K-\beta_i}{b_K-a_K}\right)\pi\right)$,因可列个开区间之并为开集,便知 f 映开集 E 为开集.

② 当 E 的构成区间(α_i,β_i)既含有 G 的点又有 P 的点时,由康托尔集的构造知,区间(α_i,β_i)必含有 G 的构成区间,于是 f 映 E 为开集 $\mathbf{R}^1$.

至于连续映射不一定映开集为开集的例子是容易举的. 比如 $f(x)=\sin x$,在 $\mathbf{R}^1$ 上连续,但映开集$(0,4\pi)$为闭集$[-1,1]$.

17. 试证欧几里得(Euclid)空间 $\mathbf{R}^n$ 中每个闭集可表为可列个开集的交,每个开集可表为可列个闭集的并.

证　先证明一个重要结论:对任意集 $A\subset\mathbf{R}^n$, $d>0$,点集

$$G=\{a:\rho(a,A)<d\}$$

必为开集.

事实上,$\forall x\in G$,有 $\rho(x,A)<d$,令 $h=d-\rho(x,A)$,则 $O\left(x,\dfrac{h}{2}\right)\subset G$,故 x 为 G 之内点,从而 G 为开集,且显然有 $G\supset A$.

现证前半题. 设 F 为闭集,令 $G_n=\left\{a:\rho(a,F)<\dfrac{1}{n}\right\}$($n=1,2,\cdots$),由上述可知,$G_n$ 为开集,且 $G_n\supset F$. 下证 $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$. 事实上,$\forall x\in F$,有 $\rho(x,F)=0<$

$\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$,于是 $x\in G_n(n=1,2,\cdots)$,$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$.反之,$\forall x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$,则 $x\in G_n(n=1,2,\cdots)$,$\rho(x,F)<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$.令 $n\to\infty$,得 $\rho(x,F)=0$,因 F 为闭集,知 $x\in F$.

再证后半题.设 G 为开集,则 $\mathscr{C}G$ 为闭集,由前半题有

$$\mathscr{C}G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n \qquad (\text{其中 } G_n \text{ 为开集}),$$

于是

$$G=\mathscr{C}\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}G_n \qquad (\text{其中 } \mathscr{C}G_n \text{ 显然为闭集}).$$

注 在 $\mathbf{R}^1$ 中,用下面证法证明较为简单:

先设 G 为开集,G 的结构表示为 $G=\bigcup_K(\alpha_K,\beta_K)$.对每个开区间$(\alpha_K,\beta_K)$,有

$$(\alpha_K,\beta_K)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_K+\frac{1}{n},\beta_K-\frac{1}{n}\right].$$

于是

$$G=\bigcup_K\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_K+\frac{1}{n},\beta_K-\frac{1}{n}\right].$$

再设 F 为闭集,则 $\mathscr{C}F$ 为开集,由上述已证的结果,有

$$\mathscr{C}F=\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m \qquad (\text{其中 } F_m \text{ 为闭集}),$$

于是

$$F=\mathscr{C}\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m=\bigcap_{m=1}^{\infty}\mathscr{C}F_m \qquad (\text{其中 } \mathscr{C}F_m \text{ 显然是开集}).$$

18. 设 E 是康托尔集的补集的构成区间的中点所成的集,求 E'.

解 记康托尔集为 P_0,其补集为 G_0.

若 $x\in G_0$,则 x 必属于 G_0 的某一构成区间(α_i,β_i).由于在 x 的邻域(α_i,β_i)中,只有一点$\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\in E$,故 x 不可能是 E 的聚点.

若 $x\in P_0$,由康托尔集的构造知,x 的任一邻域 $O(x,\varepsilon)$必含有 G_0 的某个构成区间(α_i,β_i),于是必有 E 的点$\frac{\alpha_i+\beta_i}{2}\in O(x,\varepsilon)$,故 x 为 E 的聚点.

综上便得 $E'=P_0$.

19. 设点集列$\{E_n\}$是有限区间$[a,b]$中的渐缩序列:$E_1\supset E_2\supset\cdots$,且每个 E_n 均为非空闭集.试证交集 $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$ 非空.

证法 1 在每个 E_n 中各取一点 x_n,则$\{x_n\}$为有界点列,于是存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$,设 $x_{n_k}\to x_0$,则对任何 n,当 $n_k>n$ 时,$x_{n_k}\in E_{n_k}\subset E_n$,故 x_0 为 E_n 的聚点.

由 E_n 为闭集知 $x_0 \in E_n$，因而 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$，这就证明了 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 非空.

证法 2 反设 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$，以 $(a-1,b+1)$ 为基本集，对每个 E_n 取补，则渐张开集序列 $\{\mathscr{C}E_n\}$ 覆盖 $[a,b]$，于是存在有限个开集 $\mathscr{C}E_{n_1}, \mathscr{C}E_{n_2}, \cdots, \mathscr{C}E_{n_k}$ 覆盖 $[a,b]$，不妨设 $n_1 < n_2 < \cdots < n_K$，则有

$$\mathscr{C}En_K = \bigcup_{i=1}^{K} \mathscr{C}En_i \supset [a,b],$$

注意到 $En_K \subset [a,b]$，便知 $En_K = \varnothing$，这与 E_n 均非空相矛盾.

20. 设 n 为一自然数，令 $P_n = \{k \in \mathbf{N} : k$ 为 n 的约数$\}$. 对任意的 $a,b \in P_n$，约定 $a \leqslant b$ 的意义为 a 是 b 的约数. 试证 P_n 以 $\leqslant$ 为序是一半序集. 又，欲使 P_n 为全序集，对 n 应有什么要求？

解 P_n 为半序集显然，且容易验证当 $n = 2^m$ 时，P_n 为全序集，一般地，当 $n = k^m, k, m \in \mathbf{N}$，$P_n$ 必是全序集.

21. 称 X 的子集所成之类 $\mathscr{A}$ 有性质(σ)：若 X 非 $\mathscr{A}$ 中有限个元的并. 试证：若 $\mathscr{A}$ 有性质(σ)时，则存在 X 的子集的极大类 $\mathscr{B}$ 具有性质(σ)且包含 $\mathscr{A}$，并证明，若 $A_1, A_2, \cdots, A_n \subset X$，且 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{B}$，则必有某个 $A_i \in \mathscr{B}$.

证 (1) 设具有性质(σ)且包含 $\mathscr{A}$ 的 X 的一切子集类所成之集为 X_0

$$X_0 = \{\mathscr{D} : \mathscr{D} \supset \mathscr{A}, \text{ 且 } X \text{ 非 } \mathscr{D} \text{ 中有限个元的并}\},$$

题目的意思就是要证明 X_0 有极大元 $\mathscr{B}$.

显然，X_0 中元按平常集的包含关系成一非空半序集，对 X_0 中任一全序子集 $\{\mathscr{D}_\alpha\}$，令 $\mathscr{D}_0 = \bigcup_\alpha \mathscr{D}_\alpha$，下证 $\mathscr{D}_0$ 为 $\{\mathscr{D}_\alpha\}$ 的上确界.

对于每个 $\mathscr{D}_\alpha$，$\mathscr{D}_\alpha \subset \mathscr{D}_0$ 是显然的，只要证 $\mathscr{D}_\alpha \in X_0$ 就行了. 首先有 $\mathscr{D}_0 \supset \mathscr{A}$，其中 $\mathscr{D}_0$ 有性质(σ)，若不然，则有 $\mathscr{D}_0$ 的有限个元 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，使 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = X$，设 $A_1 \in \mathscr{D}_{\alpha_1}, A_2 \in \mathscr{D}_{\alpha_2}, \cdots, A_m \in \mathscr{D}_{\alpha_m}$，由于 $\{\mathscr{D}_\alpha\}$ 为全序集且 m 为有限，故这 m 个 $\mathscr{D}_\alpha$ 中必有一个 $\mathscr{D}_{\alpha_K}$ 包含其余的 $m-1$ 个，于是 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 均属于 $\mathscr{D}_{\alpha_K}$，这与 $\mathscr{D}_{\alpha_K}$ 具有性质(σ)相矛盾.

这就证明了 $\{\mathscr{D}_\alpha\}$ 有上确界，从而由佐恩引理知 X_0 有极大元.

(2) 反设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 均不属于 $\mathscr{B}$，则 $\mathscr{B} \cup \{A_1\}, \mathscr{B} \cup \{A_2\}, \cdots, \mathscr{B} \cup \{A_n\}$ 中至少有一个具有性质(σ). 若不然，则有

$$X = B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \cdots \cup B_{i_{k_i}} \cup A_i \quad (\text{各 } B_{i_k} \text{ 为 } \mathscr{B} \text{ 的元}, i = 1,2,\cdots,n),$$

上式对 $i = 1,2,\cdots,n$ 作交，可得

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} (B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \cdots \cup B_{i_{k_i}}) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n),$$

因 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{B}$，且每个 $B_{i_{k_i}} \in \mathscr{B}$，上式说明 X 是 $\mathscr{B}$ 中有限个元之并，这与

$\mathscr{B}$ 具有性质(σ)相矛盾.

现设 $\mathscr{B}\cup\{A_k\}$ 具有性质(σ),又 $\mathscr{B}\cup\{A_k\}\supset\mathscr{B}\supset\mathscr{A}$,故 $\mathscr{B}\cup\{A_k\}\in X_0$,这与 $\mathscr{B}$ 是 X_0 的极大元相矛盾,于是有某个 $A_t\in\mathscr{B}$.

22. 试以佐恩引理证策梅洛(Zermelo)公理.

证　设 $X=\bigcup A$　$(A\in\mathscr{A},\mathscr{A}$ 中各集两两互不相交),$\mathscr{B}$ 为含于 X 中且与每个 $A\in\mathscr{A}$ 至多有一公共元的集所成的类

$$\mathscr{B}=\{B:B\subset X,\text{且与每个 } A\in\mathscr{A}\text{ 至多有一公共元}\}.$$

显然 $\mathscr{B}$ 按"包含"关系成一非空半序集.再令 $\mathscr{D}$ 为 $\mathscr{B}$ 的任一非空全序子集,$E_0=\bigcup E(E\in\mathscr{D})$,下证 $E_0\in\mathscr{B}$.

$E_0\subset X$ 是显然的.假设 E_0 与某个 $A\in\mathscr{A}$ 有两个公共元 x_1,x_2,则有 $E_1,E_2\in\mathscr{D},x_1\in E_1,x_2\in E_2$.因 $\mathscr{D}$ 是全序集,不妨设 $E_1\subset E_2$,则 $x_1,x_2\in E_2$,即 E_2 与 $\mathscr{A}$ 中某个 A 有两个公共元,这与 $E_2\in\mathscr{D}\subset\mathscr{B}$ 相矛盾,因此 E_0 与 $\mathscr{A}$ 中每个元至多有一公共元.从而 E_0 为 $\mathscr{D}$ 的上确界.据佐恩引理,$\mathscr{B}$ 有极大元,设为 M.

现在证明 M 与每个 $A\in\mathscr{A}$ 必有一个公共元,若不然,则有某个 $A\in\mathscr{A}$,使 $M\cap A=\varnothing$.取 $a\in A$,因 $\mathscr{A}$ 中各集互不相交,知 $M\cup\{a\}$ 与每个 $A\in\mathscr{A}$ 至多有一公共元,故 $M\cup\{a\}\in\mathscr{B}$,且以 M 为其真子集,这与 M 是 $\mathscr{B}$ 的极大元矛盾了.

综上知,M 与每个 $A\in\mathscr{A}$ 有且仅有一个公共元 a.对于每个 $A\in\mathscr{A}$,令 $f(A)=a$,则 f 就是所求的映射

$$f:\mathscr{A}\to\bigcup A\ (A\in\mathscr{A}),\qquad \text{且 } f(A)=a\in A,\qquad \forall A\in\mathscr{A}.$$

23. 设 $\mathscr{A}$ 是由给定的集的子集所成的类:$A\in\mathscr{A}$ 指的是 A 的每一有限子集属于 $\mathscr{A}$,试证 $\mathscr{A}$ 含有一极大元.

证　设 $\{A_\alpha\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的任一全序子集,令 $A_0=\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$,下证 $A_0=\sup\{A_\alpha\}$,对于 $\{A_\alpha\}$ 中的每一元,$A_\alpha\subset A_0$ 是明显的,因此只要证明 $A_0\in\mathscr{A}$ 就行了.设 $A_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 为 A_0 的任一有限子集,则有 $\{A_\alpha\}$ 中的 A_{α_i},使得 $a_i\in A_{\alpha_i}(i=1,2,\cdots,n)$.由 $\{A_\alpha\}$ 的全序性知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均属于某个 A_{α_i},于是由 $A_{\alpha_i}\in\mathscr{A}$ 知 $A_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\in\mathscr{A}$.故由佐恩引理,$\mathscr{A}$ 含有一极大元.

24. 试证:设 X 为非空半序集,若 X 中每一非空全序子集有上界,则 X 有极大元(佐恩引理的另一形式).

证　和文献[1]第一章定理 6.5 的证法相同,仅须将"$x_0=\sup X_0$"改为"x_0 是 X_0 的上界".

25. (1) 设 E 是坐标平面上的曲线 $y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 上一切点所成之集,求 E'.

(2) $E=\left\{p+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}: p\in\mathbf{N}, m\in\mathbf{N}, n\in\mathbf{N}\right\}$，求 E',E'',E'''.

解 (1) $E'=E\cup\{(x,y): x=0,-1\leqslant y\leqslant 1\}$.

(2) $E'=\left\{p+\frac{1}{m}: p\in\mathbf{N}, m\in\mathbf{N}\right\}$，$E''=\mathbf{N}, E'''=\varnothing$.

26. 证明：直线上既开又闭的集合只有$\varnothing$与 $\mathbf{R}$.

提示 可用反证法.

27. (1) 若非空点集 A 的每一点均为孤立点，称 A 为孤立点集. 孤立点集是否至多可列？

(2) 孤立点集的导集能否为不可列集？

(3) 直线上是否存在这样的点集 E，使得 $E'=(0,1)$？

(4) 设开集 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$，是否恒有

$$G'=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha_n,\beta_n].$$

答 (1) 孤立点集至多可列.

(2) 能，如康托尔开集 G_0 的构成区间的中点所成之集 E(见第 18 题).

(3) 不存在.

(4) 未必，如 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$.

28. 设 A,B 均为非空闭集，且至少有一个有界，则必有 $a\in A, b\in B$，使 $\rho(a,b)=\rho(A,B)$.

提示 据 $\rho(A,B)$的定义，对每个自然数 n，有 $x_n\in A, y_n\in B$，使

$$\rho(A,B)\leqslant\rho(x_n,y_n)<\rho(A,B)+\frac{1}{n}.$$

设 A 有界，则$\{x_n\}$有子序列$\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\to a$，再证明相应的$\{y_{n_k}\}$为有界点列，于是有$\{y_{n_k}\}$的子序列 $y'_{n_k}\to b$.

29. (1) 集 E 的一切内点所成之集 $\mathring{E}$ 是含于E 内的一切开集之并.

(2) 集 E 的闭包$\bar{E}$ 是包含E 的一切闭集之交.

30. (1) 开区间(a,b)不能表为可列个不相交的闭区间之并.

(2) 闭区间$[a,b]$不能表为可列个不相交的闭区间之并.

提示 可用反证法证(1)，再用反证法及(1)证(2).

31. 设 $G_1,G_2,\cdots,G_n,\cdots$是直线上一列开集，每个 G_n 在直线上处处稠密，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ 也处处稠密.

提示 设 I 为任一开区间，由题设，在 I 中可依次作出一列闭区间$[\alpha_1,\beta_n]$，使$[\alpha_n,\beta_n]\subset(\alpha_{n-1},\beta_{n-1})\cap G_n$，这样作出的闭区间必有公共点 $c\in[\alpha_n,\beta_n]\subset G_n$

$(n=1,2,\cdots)$，即 I 中有点 $c\in\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$.

32. 证明：(1) 直线上一切有理数所成之集 $\mathbf{Q}$ 是 F_σ 型集，但不是 G_δ 型集.

(2) 直线上一切无理数所成之集是 G_δ 型集，但不是 F_σ 型集.

提示 (1) 证 $\mathbf{Q}$ 不是 G_δ 型集可用反证法：令 $P=\{r+\sqrt{2};r\in\mathbf{Q}\}$，则 P 也是处处稠密的 G_δ 型集，由上题可知 $\mathbf{Q}\cap P$ 也处处稠密，这与 $\mathbf{Q}\cap P=\varnothing$ 相矛盾.

(2) 对(1)中的集取补，由对偶原理可得证.

33. 证明(林德勒夫(Lindelöf)定理)：设点集 E 被开区间集 μ 所覆盖，则 μ 中必能选出至多可列个开区间即可覆盖 E.

提示 对 E 中每一点 x，找出 μ 中一个开区间 I 及相应的有理数 R 和正有理数 r，使 $O(R,r)\subset I$，因 $O(R,r)$ 至多可列便得结论.

34. 试证：定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的单调函数的不连续点至多可列，因而为零测度集.

证 先对 $(-\infty,\infty)$ 上的递增函数 $f(x)$ 来证明.

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的不连续点的集合为 A，由数学分析的知识知：$x\in A$ 的充要条件是 $f(x-0)<f(x+0)$，且对任意的 $x_1,x_2\in A$，若 $x_1<x_2$，则 $f(x_1-0)<f(x_1+0)\leqslant f(x_2-0)<f(x_2+0)$. 因此，对每一个 $x\in A$，对应于直线上一个开区间 $(f(x-0),f(x+0))$，且这些开区间是互不相交的. 于是，据直线上互不相交的开区间至多可列，便知 A 至多为可列集.

对 $(-\infty,\infty)$ 上的递减函数，证法类同.

第二章　勒贝格测度

一、基本概念和主要定理

直线上有界点集的外测度、内测度、可测集

(1) 设有界非空开集 G 有结构表示

$$G=\bigcup_k(\alpha_k,\beta_k),$$

规定 G 的测度为

$$mG=\sum_k(\beta_k-\alpha_k).$$

(2) 设有界闭集 $F\subset(a,b)$,则 $G=(a,b)-F$ 为有界开集,规定闭集的测度为

$$mF=b-a-mG.$$

(3) 设 E 为有界点集,G 为包含 E 的一开集,F 为含于 E 内的任一闭集. E 的外测度 m^*E 与内测度 m_*E 分别定义为

$$m^*E=\inf_{G\supset E}mG,\qquad m_*E=\sup_{F\subset E}mF.$$

(4) 若 $m^*E=m_*E$,则称 E 为勒贝格(Lebesgue)可测集. E 的测度记为 mE.

定理 1　有界集 E 可测的充要条件是:对任意集 A,有 $m^*A=m^*(A\cap E)+m^*(A-E)$(称为卡拉泰奥多里(Carathéodory)条件).

定理 2　(1) 若 E_1,E_2 可测,且 $E_1\subset E_2$,则

$$m(E_2-E_1)=mE_2-mE_1, \qquad \text{(可减性)}$$

$$mE_1\leqslant mE_2. \qquad \text{(单调性)}$$

(2) 若 $E=\bigcup_k E_k$,每个 E_k 可测,则 E 可测,且

$$m\bigcup_k E_k\leqslant\sum_k mE_k. \qquad \text{(半可加性)}$$

特别地,若每个 E_k 互不相交,则有

$$m\bigcup_k E_k=\sum_k mE_k. \qquad \text{(完全可加性)}$$

(3) 若 $\{E_k\}$ 为可测集列,则 $\bigcap_k E_k$ 可测.

(4) 若 $\{E_k\}$ 为渐张可测集列,则

$$m\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=\lim_{n\to\infty}mE_n.$$

(5) 若$\{E_n\}$为渐缩可测集列，且 $mE_1<\infty$，则

$$m\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k=\lim_{n\to\infty}E_n.$$

由开集和闭集经过可列次并或交运算所得到的集统称为博雷尔(Borel)集，特别地，称可列个开集的交为 G_δ 集，可列个闭集的并为 F_σ 集.

定理 3　设 E 为可测集，则存在 G_δ 集 A 与 F_σ 集 B，满足 $A\supset E\supset B$，且 $mE=mA=mB$.

直线上无界点集的测度　设 E 为一维无界集，$I_\alpha=(-\alpha,\alpha)$，若对任何 α，$E\cap I_\alpha$ 可测，则称 E 可测，其测度定义为

$$mE=\lim_{\alpha\to\infty}(E\cap I_\alpha).$$

利用选择公理和测度对平移的不变性，可以在任何一个区间中构造出勒贝格不可测集.

$\mathbf{R}^1$ 中点集测度的概念可以推广到 $\mathbf{R}^n$ 中去.

环上的测度　设 X 是基本集，$\mathscr{R}$ 是 X 的某些子集所成的环(或 σ 环)，若 $\mathscr{R}$ 上定义的集函数 μ (μ 可为无穷大)满足

(i) $\mu\varnothing=0$;

(ii) 对任何 $E\in\mathscr{R}$，$\mu E\geqslant 0$;

(iii) 对 $\mathscr{R}$ 中任何互不相交的集列$\{E_n\}$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{R}$，有

$$\mu\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\sum_{n=1}^{\infty}\mu E_n,$$

则称 μ 为环(或 σ 环)$\mathscr{R}$ 上的测度. 集 E 的 μ 测度记为 μE.

定理 4　σ 环 $\mathscr{R}$ 上的 μ 测度具有定理 2 中所列的勒贝格测度 m 的那些性质.

σ 环上的外测度　设 X 是基本集，$\mathscr{R}_\sigma$ 是由 X 的某些子集所成的 σ 环，λ 是定义在 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的集函数. 若下列三个条件满足:

(i) $\lambda E\geqslant 0\quad(E\in\mathscr{R}_\sigma)$，$\lambda\varnothing=0$;

(ii) $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\lambda E_n\quad(E_n\in\mathscr{R}_\sigma)$;

(iii) 若 $E_1\subset E_2$，则 $\lambda E_1\leqslant\lambda E_2\quad(E_1,E_2\in R_\sigma)$.

则称 λ 为 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的外测度(当 $\mathscr{R}_\sigma$ 为 X 的一切子集所成的 σ 环时，称 λ 为 X 上的外测度).

λ 可测集　设 λ 是 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的外测度，若对一切 $A\in\mathscr{R}_\sigma$，有

$$\lambda A=\lambda(A\cap E)+\lambda(A-E),$$

则称 $E\in\mathscr{R}_\sigma$ 是 λ 可测的.

定理 5　设 λ 是 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的外测度，μ 为一切 λ 可测集的类，则

(i) μ 为 σ 环;

(ii) 设$\{E_n\}$为 μ 中互不相交的集列，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，则对任何 $A\in\mathscr{R}_\sigma$，有

$$\lambda(A\cap E)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A\cap E_n);$$

(iii) λ 限制在 μ 上为测度.

测度的扩张 设 $\mathscr{R}$ 是 X 的某些子集所成的环，μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度，则集类

$$H(\mathscr{R})=\left\{E\,|\,E\subset X,\ E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\ A_n\in\mathscr{R}\right\}$$

是 σ 环. 对 $E\in H(\mathscr{R})$，令

$$\mu^*E=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu A_n\,|\,A_n\in\mathscr{R},\ 且\ E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\},$$

则 μ^* 是 σ 环 $H(\mathscr{R})$ 上的一个外测度，称为由 μ 导出的外测度，且当 $E\in\mathscr{R}$ 时，有 $\mu^*E=\mu E$.

一切 μ^* 可测集的类 μ 是 σ 环. μ 包含由 $\mathscr{R}$ 所产生的 σ 环 $S(\mathscr{R})$，并且 μ^* 在 $S(\mathscr{R})$ 上的限制是 μ 的扩张. 对 σ 有限的测度来说，这种扩张还是惟一的.

二、习题、练习题与解法

1. 设 E_1,E_2 可测，试证

$$m(E_1\cup E_2)=mE_1+mE_2-m(E_1\cap E_2).$$

证 因 $E_1\cup E_2=E_1\cup(E_2-E_1\cap E_2)$，$E_1$ 与 $E_2-E_1\cap E_2$ 不相交，故

$$\begin{aligned}m(E_1\cup E_2)&=mE_1+m(E_2-E_1\cap E_2)\\&=mE_1+mE_2-m(E_1\cap E_2).\end{aligned}$$

2. 试证可列个零测度集的并仍是零测度集.

证 设 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，$mE_n=0(n=1,2,\cdots)$. 由文献[1]第二章定理 3.4 知 E 可测，且

$$mE\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}mE_n=0,$$

于是由测度的非负性即得 $mE=0$.

3. 已知[0,1]中无理点集 E 的测度为 1，试由内、外测度的定义，考察其测度与 1 任意接近的含于 E 内的闭集以及包含 E 的开集的构造是怎样的.

解 (1) 因所求的闭集 F 要含在无理点集 E 中，故 F 一定不含[0,1]中的有理点. 又闭集 F 的测度要与 1 任意接近，故 F 必是区间[0,1]减去一个包含一切有理点且测度可以任意小的开集所构成. F 的构造方法如下：

设[0,1]中全体有理点为 $r_1,r_2,\cdots,r_m,\cdots$，$\varepsilon$ 为任意小的正数，作开区间

$$I_n = \left(r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},\ r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)\ (n = 1,2,\cdots),$$

则 $G_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ 为开集,且

$$mG_0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} mI_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

令 $F=[0,1]-G_0$,这个 F 就是含于 E 中且测度与 1 任意接近的闭集.

(2) 包含 E 的且测度与 1 任意接近的开集的取法很多,如 $(0,1)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$, $(-\varepsilon,1+\varepsilon)$ 等等.

4. 设 G_1,G_2 是开集,且 G_1 是 G_2 的真子集,是否一定有 $mG_1<mG_2$?

解 不一定有 $mG_1<mG_2$,例如

$$G_1 = \left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right), \qquad G_2 = (0,1),$$

虽然 G_1 是 G_2 的真子集,但 $mG_1=mG_2=1$.

5. 对任意开集 G,是否有 $m\bar{G}=mG$ 成立?

解 等式不一定成立,如本章第 3 题中作出的开集 G_0,由于 G_0 包含了 $[0,1]$ 中一切有理点,可知 $\bar{G}_0\supset[0,1]$,于是 $m\bar{G}_0\geqslant 1$,但 $mG_0<\varepsilon$.

6. 如把外测度的定义改为"有界集 E 的外测度是包含 E 的闭集的测度的下确界",是否合理?

解 这种改法不合理. 如设 $[0,1]$ 中有理点集为 Q,无理点集为 I,则 $[0,1]=Q\cup I$,显然,任何包含 Q 的闭集 F,必有

$$F\supset\bar{Q}=[0,1].$$

因此,如采用上述方法定义外测度,就有 $m^*Q=1$,但 $m_*Q=0$,这就使 Q 成为不可测集. 即使采用其他方法定义内测度,使 Q 与 I 均可测,那将出现 $mQ+mI=1+1=2$,而 $m(Q\cup I)=m[0,1]=1$,测度的有限可加性又不成立了.

7. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是有限个互不相交的可测集,且 $E_k\subset A_k$, $k=1,2,\cdots,n$,试证

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*E_k.$$

证法 1 据外测度的半可加性有

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m^*E_k.$$

又令 $E=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$,则对任一开集 $G\supset E$,有

$$G\supset\bigcup_{k=1}^{n}(G\cap E_k).$$

注意到各 $G\cap E_k$ 互不相交,且 $G\cap A_k\supset E_k\quad(k=1,2,\cdots,n)$,便有

$$mG\geqslant m\bigcup_{k=1}^{n}(G\cap A_k)=\sum_{k=1}^{n}m(G\cap A_k)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}m^*(G\cap A_k)\geqslant\sum_{k=1}^{n}m^*E_k.$$

因 G 是任一包含 E 的开集,故

$$m^*E=\inf_{G\supset E}mG\geqslant\sum_{k=1}^{n}m^*E_k.$$

综上即得

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)=\sum_{k=1}^{n}m^*E_k.$$

证法 2 当 $n=2$ 时,因 A_1 可测,据文献[1]第二章定理 3.5,有

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*((E_1\cup E_2)\cap A_1)+m^*((E_1\cup E_2)\cap \complement A_1)$$
$$=m^*E_1+m^*E_2.$$

当 $n>2$ 时,用数学归纳法可证得.

8. 设 G 是开集,E 是零测度集,试证 $\bar{G}=(\overline{G-E})$.

证 因 $G\supset G-E,\bar{G}\supset\overline{G-E}$ 为显然.另一方面,因为 G 是开集,有 $\bar{G}=G\cup G'=G'$.任取 $x\in\bar{G}$,在 x 的任一邻域(α,β)中,必有 $x_0\neq x$,而 $x_0\in G\cap(\alpha,\beta)$,又因 $G\cap(\alpha,\beta)$为开集,必存在 x_0 的邻域(a,b),使得$(a,b)\subset G\cap(\alpha,\beta)$.由 $mE=0$ 可推知,在(a,b)中必有异于 x 的点 $y\in G-E$ (否则,$mE\geqslant m(a,b)>0$).因$(a,b)\subset(\alpha,\beta)$,故 $y\in(\alpha,\beta)$,于是

$$x\in(G-E)'\subset\overline{G-E},\ \bar{G}\subset\overline{G-E}.$$

综上等式得证.

9. 设 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$,试证

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to+\infty}m^*E_n.$$

证 令 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$,由 $E_n\subset E,m^*E_n\leqslant m^*E\quad(n=1,2,\cdots)$,有

$$\lim_{n\to+\infty}m^*E_n\leqslant m^*E=m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right).$$

又作开集 $G_n\supset E_n$,且 $mG_n<m^*E_n+\varepsilon\ (n=1,2,\cdots)$,并令

$$P_k=\bigcap_{n=k}^{\infty}G_n,$$

则

$$P_k\subset G_k\qquad(k=1,2,\cdots),$$

于是

$$mP_k \leqslant mG_k < m^* E_k + \varepsilon \qquad (k = 1,2,\cdots).$$

由题设知,当 $n \geqslant k$ 时,有 $G_n \supset E_k$,故

$$P_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} G_n \supset E_k, \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E,$$

且 $P_1 \subset P_2 \subset \cdots$,由文献[1]第二章定理 3.6(i)得

$$m^* E \leqslant m \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = \lim_{k \to +\infty} mP_k \leqslant \lim_{k \to +\infty} m^* E_k + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性,便有

$$m^* E \leqslant \lim_{k \to +\infty} m^* E_k.$$

综上得

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = m^* E = \lim_{n \to +\infty} m^* E_n.$$

10. 设 E 为一维有界集,$I_1, I_2, \cdots$是闭区间列(可以相交),其并覆盖 E,试证

$$m^* E = \inf_{\bigcup I_k \supset E} \sum_{k=1}^{\infty} mI_k,$$

对二维情形如何?

证 因 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$,由外测度的单调性和半可加性有

$$m^* E \leqslant m^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m^* I_k = \sum_{k=1}^{\infty} mI_k,$$

取下确界便得

$$m^* E \leqslant \inf_{\bigcup I_k \supset E} \sum_{k=1}^{\infty} mI_k.$$

又由外测度的定义,对任意正数 ε,有开集 $G \supset E$,使 $mG < m^* E + \varepsilon$. 设 G 的结构表示为 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha_k, \beta_k)$,作 $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$ $(k = 1,2,\cdots)$,则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset G \supset E,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} mI_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) = mG < m^* E + \varepsilon,$$

从而

$$\inf_{\bigcup I_k \supset E} \sum_{k=1}^{\infty} mI_k < m^* E + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性得

$$m^* E \geqslant \inf_{\bigcup I_k \supset E} \sum_{k=1}^{\infty} mI_k.$$

综上即得所要证明的等式.

对二维情形,将上述闭区间 $I_1, I_2, \cdots$改为闭长方形即可.

11. 试作一闭集 $F\subset[0,1]$,使 F 中不含任何开区间,而 $mF=1/2$.

解 首先在$[0,1]$的中央挖去长为$\frac{1}{4}$的开区间$\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$,然后在余下的两个闭区间的中央各挖去长为$\frac{1}{4^2}$的开区间$\left(\frac{5}{32},\frac{7}{32}\right)$,$\left(\frac{25}{32},\frac{27}{32}\right)$,再在余下的 4 个闭区间的中央挖去长为$\frac{1}{4^3}$的开区间(共 4 个).一般地,第 n 次挖去的开区间长为$\frac{1}{4^n}$(共 2^{n-1} 个).这样一直挖下去,就得到一列开区间,令这些开区间的并为

$$G=\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)\cup\left(\frac{5}{32},\frac{7}{32}\right)\cup\left(\frac{25}{32},\frac{27}{32}\right)\cup\cdots,$$

则

$$\begin{aligned}mG&=\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4^2}+\cdots+2^{n-1}\frac{1}{4^n}+\cdots\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

现令 $F=[0,1]-G$,显然 F 为不含任何开区间的闭集,且

$$mF=m[0,1]-mG=1/2,$$

故这个 F 即为所求之闭集.

12. 如把外测度的定义改为:m^*E 为包含 E 的可测集测度的下确界,问在这个新意义下的外测度与原来的外测度有何关系?

解 两者相等.事实上,设 $\inf\limits_{\substack{A\supset E\\A可测}} mA=a$,由于可测集类包含开集类,故有

$$\inf_{\substack{G\supset E\\G为开集}} mG\geqslant\inf_{\substack{A\supset E\\A可测}} mA=a.$$

又因 $\inf\limits_{\substack{A\supset E\\A可测}} mA=a$,对任意 $\varepsilon>0$,存在可测集 $A_1\supset E$,使 $mA_1<a+\frac{\varepsilon}{2}$,因 A_1 可测,必存在开集 $G_1\supset A_1\supset E$,使 $mG_1\leqslant mA_1+\frac{\varepsilon}{2}<a+\varepsilon$.由 ε 的任意性便得

$$\inf_{\substack{G\supset E\\G为开集}} mG\leqslant a.$$

综上得

$$\inf_{\substack{G\supset E\\G为开集}} mG=a=\inf_{\substack{A\supset E\\A可测}} mA.$$

13. 试证定义在$(-\infty,+\infty)$上的单调函数的不连续点至多可列,因而为零测度集.

证 先对$(-\infty,\infty)$上的递增函数 $f(x)$来证明.

设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上的不连续点的集合为 A,由数学分析的知识知:$x\in A$ 的充要条件是$f(x-0)<f(x+0)$,且对任意的 $x_1,x_2\in A$,若 $x_1<x_2$,则 $f(x_1-0)<f(x_1+0)\leqslant f(x_2-0)<f(x_2+0)$.因此,对每一个 $x\in A$,对应于直线上一个

开区间$(f(x-0),f(x+0))$,且这些开区间是互不相交的.于是,据直线上互不相交的开区间至多可列,便知 A 至多为可列集.

对$(-\infty,\infty)$上的递减函数,证法类同.

14. 下列各题中给出在 σ 环 $\mathscr{R}_\sigma$ 上集函数 λ 的例子,问哪些是外测度,哪些不是:

(i) X 是任意非空集,$\mathscr{R}_\sigma$ 是 X 的一切子集的类.对于 $\mathscr{R}_\sigma$ 中任意元 E,令 $\lambda E=\chi_E(x_0)$,这里 $x_0\in X$ 是固定的一点.$\chi_E(x)$是集 E 的特征函数:$\chi_E(x)=1$(当 $x\in E$),$\chi_E(x)=0$(当 $x\overline{\in} E$).

解　λ 是外测度,验证如下:

(1) $\lambda E\geqslant 0,\lambda\varnothing=0$ 为显然.

(2) 若 $x_0\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$,则存在自然数 n_0,使 $x_0\in E_{n_0}$,于是

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=1=\lambda E_{n_0}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\lambda E_n,$$

若 $x_0\overline{\in}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$,则 $x_0\overline{\in}E_n,\lambda E_n=0\quad(n=1,2,\cdots)$,于是

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda E_n\qquad\text{(半可加性成立)}.$$

(3) 设 $E_1\subset E_2$,若 $x_0\in E_1$,则 $\lambda E_1=\lambda E_2=1$;若 $x_0\overline{\in}E_1$,则

$$\lambda E_1=0\leqslant\lambda E_2\qquad\text{(单调性成立)}.$$

(ii) X 是正整数集,$\mathscr{R}_\sigma$ 是 X 的一切子集的类.对 X 的任一有限子集 E,用 $N(E)$表示 E 中点的个数,令

$$\lambda E=\overline{\lim}\frac{1}{n}N(E\cap\{1,2,\cdots,n\}),\qquad E\in\mathscr{R}_\sigma.$$

解　λ 不是外测度,因为半可加性不成立.

事实上,令 $E_i=\{i\}$,则

$$X=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,$$

$$N(X\cap\{1,2,\cdots,n\})=N(\{1,2,\cdots,n\})=n,$$

可知 $\lambda X=\overline{\lim}\frac{1}{n}n=1$,但 $\lambda E_i=0\quad(i=1,2,\cdots)$,$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda E_i=0$,于是有

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)>\sum_{i=1}^{\infty}\lambda E_i.$$

(iii) 设 μ^*是 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的外测度,E_0 是 $\mathscr{R}_\sigma$ 上一个确定的集,令 $\lambda E=\mu^*(E\cap E_0)$($\lambda$ 称为 μ^* 关于 E_0 的吸收),$E\in\mathscr{R}_\sigma$.

解　λ 是外测度.验证如下:

(1) $\lambda E\geqslant 0,\lambda\varnothing=0$ 为显然.

(2)
$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu^*\left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\cap E_0\right]$$
$$=\mu^*\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap E_0)\right]$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n\cap E_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda E_n.$$

(3) 设 $E_1\subset E_2$，则 $E_1\cap E_0\subset E_2\cap E_0$，于是
$$\lambda E_1=\mu^*(E_1\cap E_0)\leqslant\mu^*(E_2\cap E_0)=\lambda E_2.$$
注意，(2)和(3)中的不等式成立的根据是外测度 μ^* 的半相加性和单调性.

(iv) 设 μ_1^*,μ_2^* 是 $\mathscr{R}_\sigma$ 上的两个外测度，令
$$\lambda E=a\mu_1^*E+b\mu_2^*E,\qquad E\in\mathscr{R}_\sigma,$$
这里 a,b 是实数.

解 (1) 当 $a\geqslant0,b\geqslant0$ 时，λ 为外测度，验证如下：

① $\lambda E\geqslant0,\lambda\varnothing=0$ 为显然.

②
$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=a\mu_1^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)+b\mu_2^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)$$
$$\leqslant a\sum_{n=1}^{\infty}\mu_1^*E_n+b\sum_{n=1}^{\infty}\mu_2^*E_n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a\mu_1^*E_n+b\mu_2^*E_n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda E_n.$$

③ 设 $E_1\subset E_2$，则 $\mu_1^*E_1\leqslant\mu_1^*E_2,\mu_2^*E_1\leqslant\mu_2^*E_2$，于是
$$\lambda E_1=a\mu_1^*E_1+b\mu_2^*E_1\leqslant a\mu_1^*E_2+b\mu_2^*E_2=\lambda E_2.$$

(2) 当 $a<0,b<0$ 时，在 μ_1^*,μ_2^* 中至少有一个不等于 0 时，λ 肯定不是外测度，因 $\lambda E\geqslant0$ 不成立.

(3) 当 a,b 中有一个为负数时，λ 不一定成为外测度.

15. 设 m 表示 $\mathbf{R}^1$ 中外测度限制在博雷尔集类上的测度，a,b 为实数，集 E 的 T 变换定义为 $T(E)=\{ax+b:x\in E\}$. 试证，对每个博雷尔集 E，有 $mT(E)=|a|mE$.

证 根据测度对平移的不变性，只要证明变换 $T(E)=\{ax:x\in E\}$ 对每个博雷尔集 E 有 $mT(E)=|a|mE$.

对于 $a=0$ 的特殊情形，结论显然正确. 对 $a\neq0$，分下述四步证之.

(1)
$$T\left(\bigcup_k E_k\right)=\bigcup_k T(E_k),$$

$$T\left(\bigcap_k E_k\right) = \bigcap_k T(E_k).$$

事实上

$$x \in T\left(\bigcup_k E_k\right) \Rightarrow \frac{x}{a} \in \bigcup_k E_k \Rightarrow \text{存在 } k_0, \text{使} \frac{x}{a} \in E_{k_0}$$

$$\Rightarrow x \in T(E_{k_0}) \Rightarrow x \in \bigcup_k T(E_k).$$

反之

$$x \in \bigcup_k T(E_k) \Rightarrow \text{存在 } k_0, \text{使 } x \in T(E_{k_0})$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} \in E_{k_0} \Rightarrow \frac{x}{a} \in \bigcup_k E_k$$

$$\Rightarrow x \in T\left(\bigcup_k E_k\right),$$

故

$$T\left(\bigcup_k E_k\right) = \bigcup_k T(E_k).$$

同理可证另一等式.

(2) 若 G 为开集,则 $T(G)$ 也为开集,且 $mT(G) = |a| mG$.

事实上,对开区间 (α,β),有

$$T(\alpha,\beta) = \begin{cases} (a\alpha, a\beta) & (\text{当 } a > 0), \\ (a\beta, a\alpha) & (\text{当 } a < 0), \end{cases}$$

显然, $T(\alpha,\beta)$ 仍为开区间,且 $mT(\alpha,\beta) = |a|(\beta-\alpha)$.

设 $G = \bigcup_k (\alpha_k,\beta_k)$,则 $T(G) = \bigcup_k T(\alpha_k,\beta_k)$, $T(\alpha_k,\beta_k)$ 互不相交,于是

$$mT(G) = \sum_k mT(\alpha_k,\beta_k) = \sum_k |a|(\beta_k - \alpha_k)$$

$$= |a| \sum_k (\beta_k - \alpha_k) = |a| mG.$$

(3) 若 F 为闭集,则 $T(F)$ 也为闭集.

事实上,因 $F \cup \mathscr{C}F = \mathbf{R}^1$, $F \cap \mathscr{C}F = \varnothing$,由(1)有

$$T(F) \cup T(\mathscr{C}F) = T(\mathbf{R}^1) = \mathbf{R}^1,$$

$$T(F) \cap T(\mathscr{C}F) = T(\varnothing) = \varnothing,$$

故

$$T(F) = \mathbf{R}^1 - T(\mathscr{C}F).$$

由(2)知 $T(\mathscr{C}F)$ 为开集,于是 $T(F)$ 为闭集.

(4) 对博雷尔集 E,据其定义,由(1),(2),(3)即得 $T(E)$ 为博雷尔集. 下证 $m^* T(E) = |a| m^* E$.

事实上,对任意的开集 $G \supset E$,显然有

$$G \supset E \Leftrightarrow T(G) \supset T(E),$$

于是由(2)有

$$m^* T(E) = \inf_{T(G) \supset T(E)} mT(G) = \inf_{G \supset E} |a| mG = |a| m^* E.$$

再注意到博雷尔集的可测性，便得

$$mT(E) = m^* T(E) = |a| m^* E = |a| mE.$$

16. 试证：若存在 μ 可测集 $X \supset E$，且满足

$$\mu X < \infty, \qquad \mu X = \mu^* E + \mu^* (X - E),$$

则 E 为 μ 可测的.

证 仅对 μ 为勒贝格测度 m 给出证明. 对于一般抽象测度 μ，可先引进内测度 μ_*，然后证明 E 为 μ 可测的充要条件是 $\mu^* E = \mu_* E$，再证明本题结论.

(1) 先证：对任一集 A，存在 G_δ 型集 B，使 $B \supset A$，且 $mB = m^* A$.

事实上，由外测度的定义，对任何自然数 n，存在开集 $G_n \supset A$，且

$$mG_n < m^* A + \frac{1}{n}.$$

令

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

则

$$A \subset B \subset G_n, \quad m^* A \leqslant mB < m^* A + \frac{1}{n}.$$

令 $n \to \infty$，得

$$mB = m^* A.$$

(2) 次证：$mX = m_* E + m^* (X - E)$.

事实上，对任何闭集 $F \subset E$，有 $X - F \supset X - E$，于是

$$m^* (X - E) \leqslant m(X - F) = mX - mF,$$

即

$$mF \leqslant mX - m^* (X - E),$$

取上确界得

$$m_* E \leqslant mX - m^* (X - E),$$

即

$$mX \geqslant m_* E + m^* (X - E).$$

另一方面，对集 $X - E$，由(1)有 G_δ 型集 B，使

$$B \supset X - E, \qquad mB = m^* (X - E).$$

因 $E \supset X - B$，故

$$m_* E \geqslant m(X - B) \geqslant mX - mB$$

$$= mX - m^*(X - E),$$

即

$$mX \leqslant m_* E + m^*(X - E).$$

综上即得

$$mX = m_* E + m^*(X - E).$$

(3) 再证 E 可测.

事实上,由(2)和题设 $mX = m^* E + m^*(X - E)$ 可得 $m^* E = m_* E$,故 E 可测.

17. 设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中任一子集,α 为给定正数,对于任何 $\varepsilon > 0$,令

$$H_{\alpha,\varepsilon}(E) = \inf \sum_k \delta(E_k)^\alpha,$$

其中 $\delta(E_k)$ 表示 E_k 的直径,且下确界对一切满足 $E \subset \bigcup E_k$ 而 $\delta(E_k) < \varepsilon$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 的集列 $\{E_k\}$ 而取. 再令

$$H_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_{\alpha,\varepsilon}(E) = \sup_{\varepsilon > 0} H_{\alpha,\varepsilon}(E),$$

试证 H_α 为基本集 $\mathbf{R}^n$ 上的外测度,并满足条件:

若 $H_\alpha(E) < \infty$,则当 $\beta > \alpha$ 时,$H_\beta(E) = 0$ (H_α 称为豪斯多夫(F. Hausdorff)测度).

证 先证 H_α 为外测度.

(1) $H_\alpha(E) \geqslant 0$, $H_\alpha(\varnothing) = 0$ 为显然.

(2) 若 $E_1 \subset E_2$,则对任何 $\varepsilon > 0$,显然有

$$H_{\alpha,\varepsilon}(E_1) \leqslant H_{\alpha,\varepsilon}(E_2).$$

令 $\varepsilon \to 0$,便得

$$H_\alpha(E_1) \leqslant H_\alpha(E_2).$$

(3) 设 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$,任给正数 ε,对每个 E_n,由下确界的意义,对任意的 $\Delta > 0$,存在 $E_{n,k}$,使 $\bigcup_k E_{n,k} \supset E_n$, $\delta(E_{n,k}) < \varepsilon$,且

$$\sum_k \delta(E_{n,k})^\alpha < H_{\alpha,\varepsilon}(E_n) + \frac{\Delta}{2^n} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

显然

$$\bigcup_{n,k} E_{n,k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_k E_{n,k} \supset E,$$

于是

$$H_{\alpha,\varepsilon}(E) = \inf \sum_k \delta(E_k)^\alpha \leqslant \sum_{n,k} \delta(E_{n,k})^\alpha$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_k \delta(E_{n,k})^\alpha < \sum_{n=1}^{\infty} H_{\alpha,\varepsilon}(E_n)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}H_{\alpha,\varepsilon}(E_n)+\Delta.$$

由 Δ 的任意性得

$$H_{\alpha,\varepsilon}(E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}H_{\alpha,\varepsilon}(E_n),$$

令 $\varepsilon\to0$，便得

$$H_{\alpha}(E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}H_{\alpha}(E_n).$$

由(1)，(2)，(3)知 H_α 为外测度.

次证当 $\beta>\alpha$，$H_\alpha(E)<\infty$ 时，$H_\beta(E)=0$.

对任何正数 ε，当 $\delta(E_k)<\varepsilon$，$\bigcup\limits_k E_k\supset E$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_k\delta(E_k)^\beta&=\sum_k\delta(E_k)^\alpha\cdot\delta(E_k)^{\beta-\alpha}\\&\leqslant\varepsilon^{\beta-\alpha}\sum_k\delta(E_k)^\alpha,\end{aligned}$$

取下确界得

$$H_{\beta,\varepsilon}(E)\leqslant\varepsilon^{\beta-\alpha}H_{\alpha,\varepsilon}(E).$$

因为 $H_\alpha(E)<\infty$，$\beta-\alpha>0$，令 $\varepsilon\to0$，便得 $H_\beta(E)=0$.

18. 证明：用十进小数表示[0,1]中的数时，不含数码 7 的一切数所成之集 E 是完全集，并求 mE.

答 $mE=0$.

19. 证明：

(1) 直线上一切可测集所成之集 μ 的势为 $2^{\aleph}$.

(2) 直线上一切不可测集所成之集 v 的势是什么？

提示 (1) $\bar{\bar{\mu}}\geqslant2^{\aleph}$ 可由康托尔集 P_0 的一切子集均可测推得. $\bar{\bar{\mu}}\leqslant2^{\aleph}$ 可由直线上一切点集所成之集族的势为 $2^{\aleph}$ 推知.

(2) $\bar{\bar{v}}=2^{\aleph}$.

20. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为[0,1]中 n 个可测集，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}mA_i>n-1$，则有 $m\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\right)>0$.

提示 可先证 $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathscr{C}A_i\right)<1$，再用对偶原理推得结论.

21. 若存在两列可测集 $\{A_n\}$，$\{B_n\}$，使 $A_n\subset E\subset B_n(n=1,2,\cdots)$，且 $m(B_n-A_n)\to0(n\to\infty)$，则 E 可测.

提示 可先证 $m^*\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n-E\right)=0$.

22. 设 A,B 是互不相交的可测集,则对任一集 E,有

(1) $m^*(E\cap(A\cup B))=m^*(E\cap A)+m^*(E\cap B)$;

(2) $m_*(E\cap(A\cup B))=m_*(E\cap A)+m_*(E\cap B)$.

提示 (1) 可用外测度的定义证

$$m^*(E\cap(A\cup B))\geqslant m^*(E\cap A)+m^*(E\cap B),$$

相反的不等号可由外测度的半可加性得到.

(2) 证法与(1)类似.

23. 设 E 与 F 有一为可测集,则

$$m^*E+m^*F=m^*(E\cup F)+m^*(E\cap F).$$

提示 用卡氏条件,分别取 T 为 $E\cup F$ 和 F.

24. 设 E,F 为互不相交的点集,则

$$m_*(E\cup F)\leqslant m_*E+m^*F\leqslant m^*(E\cup F).$$

提示 对 $E\cup F$,有 F_σ 型集 $B\subset E\cup F$, $mB=m_*(E\cup F)$. 对 F,有 G_δ 型集 $A\supset F$, $mA=m^*F$. 据此可证左边的不等式,用类似的方法可证右边.

25. 证明下列两个条件均为 E 可测的充要条件:

(1) 对任意的 $\varepsilon>0$,存在开集 $G\supset E$,使 $m^*(G-E)<\varepsilon$.

(2) 对任意的 $\varepsilon>0$,存在闭集 $F\subset E$,使 $m^*(E-F)<\varepsilon$.

提示 (1) 必要性由测度定义推得,充分性可由上题推得.

(2) 用取补集的方法由(1)推得.

26. 设 E 为可测集,则对任意集 T,有

$$m_*(E\cap T)+m^*(E\cap \complement T)=mE.$$

提示 用题 24 的结论即得.

27. 设 $m^*E=q>0$,则对任何实数 $C\in(0,q)$,存在 $E_0\subset E$,使 $m^*E_0=C$.

提示 令 $E_x=E\cap(-\infty,x]$, $f(x)=m^*E_x$,先证 f 连续,再用介值定理.

28. 设 $\{A_n\}$ 为可测集列,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}mA_n<\infty$,则

$$m(\overline{\lim_n}A_n)=0.$$

提示 对任意的 $\varepsilon>0$,由题设,有自然数 N,使 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}mA_n<\varepsilon$,再由 $\overline{\lim\limits_n}A_n\subset\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}A_n$,可推得结论.

第三章 可测函数

一、基本概念和主要定理

可测函数 设 $f(x)$是定义在可测集 E 上的实函数.如果对每一实数 a,集 $E(f>a)$恒可测(勒贝格可测),则称 $f(x)$是 E 上勒贝格可测函数.其中条件"$E(f>a)$恒可测"可换成如下三个条件中的任何一个:"$E(f\geqslant a)$恒可测";"$E(f<a)$恒可测";"$E(f\leqslant a)$恒可测".

简单函数 设 E 是一可测集,$f(x)$在 E 上只取有限多个值 $C_1,C_2,\cdots,C_n$,且 $E(f=C_1),E(f=C_2),\cdots,E(f=C_n)$均可测.若设 $e_K=E(f=C_K)$

$$\chi_{e_K}(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\in e_K,\\ 0, & 若\ x\notin e_K\end{cases}$$

($\chi_{e_K}(x)$称为集 e_K 的特征函数),则简单函数可写成如下形式

$$f(x)=\sum_{K=1}^{n}C_K\chi_{e_K}(x).$$

连续函数 设 $f(x)$为定义在集 E 上的有限函数.如果对任何 $x_n\to x(x_n\in E)$有 $f(x_n)\to f(x)$,则称 $f(x)$于一点 $x\in E$ 连续.如果 $f(x)$于 E 中每一点连续,则称 $f(x)$在 E 上连续.这里,对于 E 的孤立点处,总约定 $f(x)$是连续的.

可测集 E 上的连续函数,必是可测函数.

"几乎处处"概念 如果命题 S 在集 E 上除了某个零测度子集外,处处成立,则说命题 S 在 E 上几乎处处成立.

例如,E 上定义的两个函数 $f(x)$与 $g(x)$称为在 E 上几乎处处相等,指

$$mE(f(x)\neq g(x))=0,$$

此时又称 $f(x)$与 $g(x)$对等,记作 $f(x)\sim g(x)$.

近一致收敛 设 f,f_n 是可测集上几乎处处有限的可测函数列.如果对任意的 $\delta>0$,都存在 E 的可测子集 E_δ 使在 E_δ 上 f_n 一致收敛于 f,而 $m(E-E_\delta)<\delta$,则称序列 f_n 在 E 上近一致收敛于 f.

测度收敛 设 $f_n(x)$是可测集 E 上的可测函数列,$f(x)$是 E 上可测函数.如果对每个 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}mE(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)=0,$$

则称 f_n 为测度收敛于 f.

定理 1 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 是可测集 E 上可测函数列，则当 $\lim f_n(x)$ 几乎处处存在时，它是 E 上的可测函数.

定理 2 设 $f(x)$ 是可测集 E 上非负可测函数，则存在一列非负递增的简单函数 $\varphi_n(x)$

$$0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \cdots$$

使等式 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ 在 E 上处处成立.

定理 3 在可测集 E 上定义的两个可测函数的和、差、积、商(假定运算几乎处处有意义)都是可测的.

定理 4 (叶果洛夫(Егоров)定理) 设 E 是可测集，$mE < +\infty$，$f_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$ 与 $f(x)$ 是在 E 上几乎处处有限的可测函数，且 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$. 则 $f_n(x)$ 在 E 上近一致收敛于 $f(x)$.

定理 5 (里斯(Riesz)定理) 设 $f_n(x)$ 在 E 上测度收敛于 $f(x)$，而 $mE < +\infty$，则存在 $\{f_n(x)\}$ 的子序列 $\{f_{n_k}(x)\}$，几乎处处收敛于 $f(x)$.(条件 $mE < +\infty$ 可除去).

定理 6 (鲁津(Лузин)定理) 设 $f(x)$ 是有界可测集 E 上的可测函数，则对任意的 $\varepsilon > 0$，存在闭集 $F \subset E$，$m(E-F) < \varepsilon$，而 $f(x)$ 限制在 F 上是连续的.

二、习题、练习题与解法

1. 设 $f(x), g(x)$ 为 E 上可测函数，试证 $E(f>g)$ 是可测集.

证 设 $\{r_n\}$ 是全体有理数所成的序列，则

$$E(f > g) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [E(f > r_n) \cap E(g < r_n)].$$

事实上，若有 $x_0 \in E(f>g)$，则 $f(x_0) > g(x_0)$，必存在有理数 r_k，使 $f(x_0) > r_k > g(x_0)$，于是

$$x_0 \in E(f > r_k) \cap E(g < r_k),$$

从而

$$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [E(f > r_n) \cap E(g < r_n)],$$

所以有

$$E(f > g) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [E(f > r_n) \cap E(g < r_n)].$$

反之，若有

$$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [E(f > r_n) \cap E(g < r_n)],$$

则存在 n_0，使 $x_0 \in E(f > r_{n_0}) \cap E(g < r_{n_0})$，于是

$$f(x_0) > r_{n_0} > g(x_0), \qquad f(x_0) > g(x_0),$$

从而 $x_0 \in E(f>g)$. 所以

$$E(f > g) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty}[E(f > r_n) \cap E(g < r_n)],$$

故

$$E(f > g) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[E(f > r_n) \cap E(g < r_n)].$$

又, f, g 皆 E 上可测函数, 对一切 n. $E(f>r_n)$, $E(g<r_n)$ 皆为可测集, 因此 $\bigcup_{n=1}^{\infty}[E(f>r_n)\cap E(g<r_n)]$ 是可测集, 故 $E(f>g)$ 是可测集.

2. 证明 $f(x)$ 是 E 上可测函数的充要条件是: 对任一有理数 r, 集 $E(f>r)$ 恒可测. 如果集 $E(f=r)$ 恒可测, 问 $f(x)$ 是否可测?

证 必要性: 根据可测函数的定义, 必要性显然成立.

充分性: 任取实数 a, 设有理数列 $\{r_n\}$ 满足 $r_1<r_2<r_3<\cdots<r_n<r_{n+1}<\cdots$, 且 $\lim_{n\to\infty} r_n = a$. 则

$$E(f \geqslant a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f > r_n).$$

因为每一个 $E(f>r_n)$ 都可测, 所以 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E(f>r_n)$ 可测, 从而 $E(f\geqslant a)$ 可测, 故 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

若仅有 $E(f=r)$ 恒可测 (r 是有理数), 则 $f(x)$ 在 E 上不一定可测.

例如, 设 $E=[0,1]$, M 为 E 中任一不可测子集, 定义

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{当 } X \in M, \\ -\sqrt{2}, & \text{当 } X \in E - M, \end{cases}$$

则对任何有理数 r, $E(f=r)$ 为空集恒可测. 但 $f(x)$ 在 E 上不可测, 因为 $E(f>0)=M$ 是不可测集.

3. 设 $f(x)$ 是 E 上可测函数, G 为开集, F 为闭集. 试问 $E(f\in G)$, $E(f\in F)$ 是否可测? 这里记号 $E(f\in A)=E(x:f(x)\in A)$.

解 (1) 设 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$, 其中每个 (α_n,β_n) 为 G 的构成区间.

$$E(f \in G) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[E(f > \alpha_n) \cap E(f < \beta_n)],$$

因为 $f(x)$ 在 E 上可测, 对一切 n, $E(f>\alpha_n)\cap E(f<\beta_n)$ 必为可测集, 所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty}[E(f>\alpha_n)\cap E(f<\beta_n)]$ 是可测集, 即 $E(f\in G)$ 可测.

(2) 令 $G_0=\mathscr{C}F$, 则由 F 是闭集知 G_0 是开集, 从而 $E(f\in G_0)$ 是可测集.

而

$$E(f \in F) = E - E(f \in G_0),$$

故 $E(f\in F)$是可测集.

4. (i) 证明 $S-\overline{\lim}A_n=\underline{\lim}(S-A_n)$.

(ii) 设 A_n 是下述点集:n 为奇数时,$A_n=\left(0,1-\frac{1}{n}\right)$;$n$ 为偶数时,$A_n=\left(\frac{1}{n},1\right)$.证明$\{A_n\}$有极限,并求之.

证 (i) $S-\overline{\lim}A_n$

$$\begin{aligned}
&=S-\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n=S\cap\mathscr{C}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)\\
&=S\cap\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathscr{C}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)\right]=S\cap\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\mathscr{C}A_n\right]\\
&=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[S\cap\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}\mathscr{C}A_n\right)\right]=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}(S\cap\mathscr{C}A_n)\\
&=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}(S-A_n)\\
&=\underline{\lim}(S-A_n).
\end{aligned}$$

(ii) 因为$\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n=(0,1)$对任何自然数 k 成立.所以

$$\overline{\lim}A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n=(0,1).$$

另一方面,当 k 为奇数$(k>1)$时

$$\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n=\left(\frac{1}{k+1},1-\frac{1}{k}\right),\qquad \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing.$$

当 k 为偶数时

$$\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n=\left(\frac{1}{k},1-\frac{1}{k+1}\right).$$

所以

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n=(0,1),$$

即

$$\underline{\lim}A_n=(0,1).$$

因为$\overline{\lim}A_n=\underline{\lim}A_n=(0,1)$,所以$\{A_n\}$有极限,且 $\lim A_n=(0,1)$.

5. 设 $f(x),f_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$是定义在集 $E=[a,b]$上的实函数,r 为自然数,用记号 $E\left(|f_n-f|<\frac{1}{r}\right)$表示$E$ 中满足$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{r}$的点所成之集,试证$\bigcap_{r=1}^{\infty}\underline{\lim}E\left(|f_n-f|<\frac{1}{r}\right)$是$E$ 中使 $f_n(x)$收敛于 $f(x)$的点集.

证 设 E 中使 $f_n(x)$收敛于 $f(x)$的点集为 A,则 E 中使 $f_n(x)$不收敛于

$f(x)$的点集 $B=E-A$.

由文献[1]74 页例 1 知

$$B=\bigcup_{r=1}^{\infty}\overline{\lim}E\left(|f_n-f|\geqslant\frac{1}{r}\right),$$

因此,把 E 看成基本集合时,有 $A=\mathscr{C}B$.所以

$$\begin{aligned}A=\mathscr{C}B&=\mathscr{C}\left[\bigcup_{r=1}^{\infty}\overline{\lim}E\left(|f_n-f|\geqslant\frac{1}{r}\right)\right]\\&=\mathscr{C}\left[\bigcup_{r=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}E\left(|f_n-f|\geqslant\frac{1}{r}\right)\right]\\&=\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\left[\mathscr{C}E\left(|f_n-f|\geqslant\frac{1}{r}\right)\right]\\&=\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}E\left(|f_n-f|<\frac{1}{r}\right)\\&=\bigcap_{r=1}^{\infty}\underline{\lim}E\left(|f_n-f|<\frac{1}{r}\right),\end{aligned}$$

故集$\bigcap_{r=1}^{\infty}\underline{\lim}E\left(|f_n-f|<\frac{1}{r}\right)$是 E 中使 $f_n(x)$收敛于 $f(x)$的点所成之集.

6. 用 $X_E(x)$表示集 E 的特征函数,试证对于任一集列$\{E_n\}$,有

$$X_{\overline{\lim}E_n}(x)=\overline{\lim}X_{E_n}(x),$$

$$X_{\underline{\lim}E_n}(x)=\underline{\lim}X_{E_n}(x),$$

从而集列 E_n 的极限存在等价于函数列 $X_{E_n}(x)$的极限存在.

证

$$\begin{aligned}&X_{\overline{\lim}E_n}(x)=1\\\Leftrightarrow\ &x\in\overline{\lim}E_n\\\Leftrightarrow\ &\{E_n\}\text{ 中有无限多个含有 }x\\\Leftrightarrow\ &\{X_{E_n}(x)\}\text{ 中, 有无限多个取值为 }1\\\Leftrightarrow\ &\overline{\lim}X_{E_n}(x)=1,\end{aligned}$$

所以使函数 $X_{\overline{\lim}E_n}(x)$取值为 1 的点与使函数$\overline{\lim}X_{E_n}(x)$取值为 1 的点完全一致,而两函数 $X_{\overline{\lim}E_n}(x)$与$\overline{\lim}X_{E_n}(x)$的值不取 1 便取 0,因此使两函数取值为 0 的点也必定一致.故

$$X_{\overline{\lim}E_n}(x)=\overline{\lim}X_{E_n}(x).$$

同理可证

$$X_{\underline{\lim}E_n}(x)=\underline{\lim}X_{E_n}(x).$$

于是,集列$\{E_n\}$的极限存在

$$\Leftrightarrow \underline{\lim} E_n = \overline{\lim} E_n$$
$$\Leftrightarrow \chi_{\underline{\lim} E_n}(x) = \chi_{\overline{\lim} E_n}(x)$$
$$\Leftrightarrow \underline{\lim} \chi_{E_n}(x) = \overline{\lim} \chi_{E_n}(x)$$
$$\Leftrightarrow \text{函数列}\{\chi_{E_n}(x)\}\text{的极限存在.}$$

所以集列$\{E_n\}$的极限存在等价于函数列$\{\chi_{E_n}(x)\}$的极限存在.

7. 设$\{f_n\}$是 E 上可测函数列. 试证它的收敛点集与发散点集都是可测的.

证 设$\{f_n\}$的收敛点集为 A,发散点集为 B,则

$$A = E(\overline{\lim} f_n = \underline{\lim} f_n)$$
$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} E\left(|\overline{\lim} f_n - \underline{\lim} f_n| < \frac{1}{k}\right).$$

因为$\{f_n\}$是 E 上可测函数列,所以$\overline{\lim} f_n$ 与$\underline{\lim} f_n$ 皆 E 上可测函数,从而$|\overline{\lim} f_n - \underline{\lim} f_n|$也是 E 上可测函数. 于是对任何自然数 k,$E\left(|\overline{\lim} f_n - \underline{\lim} f_n| < \frac{1}{k}\right)$是可测集,故 $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} E\left(|\overline{\lim} f_n - \underline{\lim} f_n| < \frac{1}{k}\right)$是可测集.

而 $B = E - A$,所以$\{f_n\}$的发散点集也必定是可测集.

8. 设 E 是$[0,1]$中的一个不可测集,令

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in E, \\ -x, & x \overline{\in} E, \end{cases}$$

问 $f(x)$在$[0,1]$上是否可测?$|f(x)|$是否可测?

解 设 $I = [0,1]$,则 $I(f(x) > 0) = E - \{0\}$. 因为 E 不可测,所以 $E - \{0\}$也不可测,故 $f(x)$在$[0,1]$上不可测.

而$|f(x)| = x$,$x \in [0,1]$,是$[0,1]$上的连续函数,所以$|f(x)|$必在$[0,1]$上可测.

9. 设 $f_n(x)$是 E 上几乎处处有限的可测函数列,而 $f_n(x)$几乎处处收敛,则存在常数 C 与正测度集合 $E_0 \subset E$,使在 E_0 上,对一切 n,有$|f_n(x)| \leqslant C$.

证 由题意知,显然应该有 $mE > 0$,且可假设 E 有界(否则任取 E 的有界可测子集 A,使 $0 < mA < +\infty$,而用 A 去代替 E).

证法 1 设 E 中使 f_n 不收敛的点所成之集为 Q,则 $mQ = 0$,E 中使$|f_n| = +\infty$的点所成之集为 E_n,则 $mE_n = 0(n = 1,2,3,\cdots)$,于是 $m\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = 0$.

令 $B = E - \left[Q \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right]$,则 $mB = mE > 0$,任取 $x_0 \in B$,则 $f_n(x_0)$对一切 n 都是有限数. 因为$\{f_n(x_0)\}$是收敛数列,所以$\sup_n |f_n(x_0)|$也必定是有限数.

于是

$$B=\bigcup_{k=1}^{\infty}B(\sup_n|f_n|\leqslant k).$$

因为

$$B(\sup_n|f_n|\leqslant k)\subset B(\sup_n|f_n|\leqslant k+1),$$

所以

$$mB=\lim_{k\to\infty}mB(\sup_n|f_n|\leqslant k),$$

故存在自然数 k_0,使

$$mB(\sup_n|f_n|\leqslant k_0)>\frac{1}{2}mB.$$

令 $E_0=B(\sup_n|f_n|\leqslant k_0)$, $C=k_0$,则 $mE_0>0$ 且对任何 $x\in E_0$ 及一切 n,都有 $|f_n(x)|\leqslant C$.

证法 2 因为 f_n 在 E 上几乎处处收敛,设其极限函数为 $f(x)$,则根据叶果洛夫定理,对 $\delta=\frac{mE}{4}$,存在集 $F_\delta\subset E$,使 $m(E-E_\delta)<\delta=\frac{mE}{4}$,而在 E_δ 上,f_n 一致收敛到 $f(x)$. 此时必有 $mE_\delta>\frac{3}{4}mE$,且 $f(x)$ 在 E_δ 上可测.

再由鲁津定理,对 $\varepsilon=\frac{mE}{4}$,存在闭集 $F\subset E_\delta$, $m(E_\delta-F)<\frac{mE}{4}$,即 $mF>\frac{mE}{2}$,使 $f(x)$ 在 F 上连续. 因为 $f(x)$ 在有界闭集 F 上连续,必有界. 所以存在 $M>0$,当 $x\in F$ 时恒有 $|f(x)|<M$.

因为 f_n 在 F 上一致收敛到 $f(x)$,所以存在 N,当 $n>N$ 时,在 F 上恒有 $|f_n-f|<1$,从而 $|f_n|<M+1$,即 $n>N$ 时,在 F 上 $|f_n|<M+1$ 一致地成立.

下面再来处理 $f_1,f_2,f_3,\cdots,f_N$.

因为 f_i $(i=1,2,\cdots,N)$ 几乎处处有限,所以

$$mE(|f_i|=+\infty)=0,\qquad i=1,2,\cdots,N.$$

又 $E(|f_i|>r)\supset E(|f_i|>r+1)$ 对 $i=1,2,\cdots,N$ 及一切自然数 r 成立,而

$$E(|f_i|=+\infty)=\bigcap_{r=1}^{\infty}E(|f_i|>r),$$

所以对每一个固定的 i,有

$$\lim_{r\to\infty}E(|f_i|>r)=\bigcap_{r=1}^{\infty}E(|f_i|>r),$$

于是

$$\lim_{r\to\infty}mE(|f_i|>r)=0,$$

故对每一个固定的 i,存在相应的 r_i,使

$$mE(|f_i|>r_i)<\frac{mF}{N}.$$

取 $r_0=\max(r_1,r_2,r_3,\cdots,r_N)$，则 $mE(|f_i|>r_0)<\frac{mF}{N}$ 对任何 i 成立（$i=1,2,3,\cdots,N$），故

$$m\bigcup_{i=1}^{N}E(|f_i|>r_0)\leqslant\sum_{i=1}^{N}mE(|f_i|>r_0)<mF.$$

令 $E_0=F-\bigcup_{i=1}^{N}E(|f_i|>r_0)$，$C=\max(M+1,r_0)$，则 $mE_0>0$，且在 E_0 上恒有 $|f_n(x)|\leqslant C$ 对一切 n 成立.

10. 试作 $E=[0,1]$ 上的可测函数 $f(x)$，使对任何连续函数 $g(x)$ 有 $mE(f\neq g)\neq0$. 此结果与鲁津定理有无矛盾？

解 令

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\in(0,1],\\ +\infty, & x=0.\end{cases}$$

显然，$f(x)$ 在 $E=[0,1]$ 上可测. 设 $g(x)$ 是 $E=[0,1]$ 上的任一连续函数，则 $g(x)$ 必在 E 上有界. 故存在 $M>1$，使当 $x\in E$ 时，恒有 $|g(x)|\leqslant M$.

在 $\left[0,\frac{1}{M}\right)$ 上，因为 $f(x)>M$，所以在 $\left[0,\frac{1}{M}\right)$ 上 $f(x)\neq g(x)$. 故 $E(f\neq g)\supset\left[0,\frac{1}{M}\right)$，于是 $mE(f\neq g)\geqslant\frac{1}{M}>0$. 即对任何连续函数 $g(x)$ 都有 $mE(f\neq g)\neq0$.

此结果与鲁津定理并无矛盾.

事实上，对任给的 $\varepsilon>0$ $\left(\text{不妨设 }\varepsilon<\frac{1}{2}\right)$，存在闭集 $F=\left[\frac{\varepsilon}{2},1\right]\subset E$，$m(E-F)=m\left[0,\frac{\varepsilon}{2}\right]=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. 而所作的函数 $f(x)$ 在 F 上显然连续.

11. 设 $f(x)$ 是 $-\infty<x<+\infty$ 上的连续函数，$g(x)$ 是 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的可测函数，则 $f(g(x))$ 是可测函数.

证 记 $E=[a,b]$，$\mathbf{R}^1=(-\infty,+\infty)$.

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上连续，所以对任意实数 c 有 $\mathbf{R}^1(f>c)=G_0$ 是开集.

由于 $E(f(g(x))>c)=E(g(x)\in G_0)$，而 $g(x)$ 是 E 上的可测函数，所以 $E(g(x)\in G_0)$ 是可测集，从而 $E(f(g(x))>c)$ 可测，故 $f(g(x))$ 是集 E 上的可测函数.

12. 设函数列 $f_n(x)$ 在有界集 E 上近一致收敛于 $f(x)$，试证 $f_n(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$.

证 因为 $f_n(x)$ 在 E 上近一致收敛于 $f(x)$，所以对任何自然数 r，存在可测集 $E_r\subset E$，$mE_r<\frac{1}{r}$，在 $E-E_r$ 上 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

令 $E_0=\bigcap_{r=1}^{\infty}E_r$，则 $E_0\subset E_r$ 对一切 r 成立，所以 $mE_0\leqslant mE_r<\frac{1}{r}$ 对一切自然数

r 成立，故 $mE_0=0$.

又

$$E-E_0=E\cap \mathscr{C}E_0=E\cap\left(\mathscr{C}\bigcap_{r=1}^{\infty}E_r\right)$$
$$=E\cap\left(\bigcup_{r=1}^{\infty}\mathscr{C}E_r\right)=\bigcup_{r=1}^{\infty}(E\cap \mathscr{C}E_r)$$
$$=\bigcup_{r=1}^{\infty}(E-E_r),$$

所以任取 $x_0\in E-E_0$，必存在 r_0 使 $x_0\in E-E_{r_0}$，从而 $f_n(x_0)\to f(x_0)$. 故 $f_n(x)$ 在 $E-E_0$ 上处处收敛于 $f(x)$. 而 $mE_0=0$，所以 $f_n(x)$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

13. 设函数列 $f_n(x)$ 在 E 上测度收敛于 $f(x)$，且 $f_n(x)\leqslant g(x)$ 在 E 上几乎处处成立，$n=1,2,3,\cdots$. 试证 $f(x)\leqslant g(x)$ 在 E 上几乎处处成立.

证 因为函数列 $f_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$，所以存在子函数列 $f_{n_k}(x)$ 几乎处处收敛到 $f(x)$. 令

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n>g)\cup E(f_{n_k}\not\to f),$$

则 $mA=0$. 而在 $E_0=E-A$ 上，恒有 $f_{n_k}\leqslant g$ 且 f_{n_k} 收敛于 f. 所以 $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_{n_k}(x)\leqslant g(x)$ 在 E_0 上处处成立，故 $f(x)\leqslant g(x)$ 在 E 上几乎处处成立.

14. 设 $f_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$，且 $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$ 几乎处处成立，$n=1,2,3,\cdots$. 则几乎处处有 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$.

证 为叙述方便，设在可测集 E 上讨论问题.

因为 $f_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$，所以存在子函数列 $f_{n_k}(x)$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$. 令

$$A=\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n>f_{n+1})\right]\cup E(f_{n_k}\not\to f),$$

则 $mA=0$.

设 $E_0=E-A$，任取 $x_0\in E_0$，则 $f_n(x_0)\leqslant f_{n+1}(x_0)$ 对任何 n 成立，且 $f_{n_k}(x_0)\to f(x_0)$.

因为 $\{f_n(x_0)\}$ 是单调递增函数列，所以

$$f(x_0)=\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x_0)=\lim_{n\to\infty}f_n(x_0),$$

即在 E_0 上处处有 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$，所以在 E 上几乎处处有 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$.

15. 设 $f_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$，而 $f_n(x)\sim g_n(x)$，$n=1,2,3,\cdots$，则有 $g_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$.

证 为叙述方便,设在可测集 E 上讨论问题.

令 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n\neq g_n)$,则 $mA=0$,任给 $\sigma>0$,因为

$$E(|g_n-f|\geqslant\sigma)\subset E(|f_n-f|\geqslant\sigma)\cup A,$$

所以

$$mE(|g_n-f|\geqslant\sigma)\leqslant mE(|f_n-f|\geqslant\sigma)$$

对任何 n 成立.

由于 $f_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$,所以

$$\lim_{n\to\infty}mE(|f_n-f|\geqslant\sigma)=0,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}mE(|g_n-f|\geqslant\sigma)=0,$$

故在 E 上也有 $g_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$.

16. 设 $mE<\infty$,几乎处处有限的可测函数列 $f_n(x)$,$g_n(x)$分别测度收敛于 $f(x)$,$g(x)$.试证 $f_n(x)\cdot g_n(x)$测度收敛于 $f(x)\cdot g(x)$.

提示 用公式 $ab=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]$.

证 首先证明,若 $f_n(x)$测度收敛于 $f(x)$,则 $f_n^2(x)$必测度收敛于 $f^2(x)$.

用反证法. 若 f_n^2 不依测度收敛于 f^2,则存在 $\sigma_0>0$,使

$$\lim_{n\to\infty}mE(|f_n^2-f^2|\geqslant\sigma_0)\neq0,$$

于是必有子函数列$\{f_{n_k}\}$,满足

$$\lim_{k\to\infty}mE(|f_{n_k}^2-f^2|\geqslant\sigma_0)=l>0.$$

另一方面,因 f_n 测度收敛于 f,f_{n_k} 也必测度收敛于 f,于是存在子列 f_{n_k}'几乎处处收敛到 f.所在 $f_{n_k}'^2$ 也几乎处处收敛到 f^2,从而 $f_{n_k}'^2$ 测度收敛到 f^2,这与 $\lim\limits_{k\to\infty}mE(|f_{n_k}^2-f^2|\geqslant\sigma_0)=l>0$ 相矛盾,所以 f_n^2 测度收敛于 f^2.

其次再完成本题结论的证明.

因 f_n 测度收敛于 f,g_n 测度收敛于 g,所以 $f_n\pm g_n$ 测度收敛于 $f\pm g$,,从而 $(f_n\pm g_n)^2$ 测度收敛于$(f\pm g)^2$.

于是

$$f_n\cdot g_n=\frac{1}{4}\{(f_n+g_n)^2-(f_n-g_n)^2\}$$

依测度收敛到

$$\frac{1}{4}\{(f+g)^2-(f-g)^2\}=f\cdot g.$$

17. (1) $E_k(k=1,2,3,\cdots)$皆为可测集,$E=\bigcup\limits_{k}E_k$,试证:$f(x)$在 E 上可测的

充要条件是$f(x)$在每个$E_k(k=1,2,3,\cdots)$上可测.

(2) 若$E_\lambda(\lambda\in A)$皆为可测集,A为不可列的指标集,$E=\bigcup\limits_{\lambda\in A}E_\lambda$.(1)中的结论是否仍旧成立? 为什么?

提示 (2)结论不再成立.

例如,取$E_\lambda=\{\lambda\},\lambda\in[0,1]=A$. B是A的任一不可测子集,且假定$0\in B$.则

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in B,\\ -x, & x\in A-B\end{cases}$$

在每个E_λ上可测,而在$E=\bigcup\limits_{\lambda\in A}E_\lambda$上不可测.

18. 设$f(x)$在E上可测,$\varphi(y)$是$f(E)$上的单调函数,则$\varphi(f(x))$在E上可测.

19. 设$f(x)$在E上可测,B是$\mathbf{R}^1$上的博雷尔集.试证$f^{-1}(B)$是可测集.

若A是$\mathbf{R}^1$上任意可测集,问$f^{-1}(A)$是否必定可测?

提示 (1) 当G是开区间、开集、闭集时,分别证明$f^{-1}(G)$可测,再证$f^{-1}(B)$可测.

(2) 当A是$\mathbf{R}^1$上任意可测集时,$f^{-1}(A)$不一定可测.

例 设P_0是康托尔完备集,称其长为$\dfrac{1}{3^K}$的余区间为第K级余区间.第K级余区间从左往右数的第i个记作δ_i^K.

定义

$$\varphi(x)=\begin{cases}x+\dfrac{2i-1}{2^K}, & \text{当 } x\in\delta_i^K \text{ 时},\\ x+\sup\limits_{\xi<x,\xi\in[0,1]-P_0}\{\varphi(\xi)\}, & \text{当 } x\in P_0 \text{ 时},\end{cases}$$

$$K=1,2,3,\cdots,\qquad i=1,2,3,\cdots,2^{K-1},$$

可以证明,$\varphi(x)$在$[0,1]$上连续且严格单调递增.

设$\varphi(P_0)=F$,则$mF=1$.以A_0表示F的任一不可测子集,f表示φ的反函数,显然f是$[0,2]$上的可测函数且$A=f(A_0)\subset P_0$,故可测,但$f^{-1}(A)=A_0$却不可测.

20. 设E是$\mathbf{R}^1$上有界可测集,$f(x)$是E上几乎处处有限的可测函数,则对任意$\varepsilon>0$,有闭集$F\subset E$及$g(x)\in C_{\mathbf{R}^1}$,使

(1) 当$x\in F$时,$f(x)=g(x)$;

(2) $m(E-F)<\varepsilon$.

提示 由鲁津定理得所需的闭集F,并设含F的最小闭区间为$[c,d]$,$[c,d]-F=\bigcup\limits_i(c_i,d_i)$,于是

$$g(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant a \text{ 或 } x\geqslant b \text{ 时},\\ f(x), & \text{当 } x\in F \text{ 时},\\ f(c)\cdot\dfrac{x-a}{c-a}, & \text{当 } x\in(a,c) \text{ 时},\\ f(d)\cdot\dfrac{b-x}{b-d}, & \text{当 } x\in(d,b) \text{ 时},\\ f(c_i)+\dfrac{f(d_i)-f(c_i)}{d_i-c_i}(x-c_i), & \text{当 } x\in(c_i,d_i) \text{ 时},\end{cases}$$

即为所求.

21. E 是 $\mathbf{R}^1$ 上的有界可测集，$f(x)$在 E 上几乎处处有限，则 $f(x)$在 E 上可测的充要条件是：有 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数列$\{\varphi_n(x)\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$在 E 上几乎处处成立.

22. 鲁津定理中，将连续函数改为多项式，成立不成立？为什么？

提示　不成立.

不妨设 $E=[0,1]$，$f(x)=\sin x$，若对 $\varepsilon>0$，有闭集 $F\subset[0,1]$，$mF>1-\varepsilon$，使得在 F 上

$$f(x)=\sin x=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

则在 F 上 $\sin x-(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_nx+a_0)$的任何阶导数都将为 0，表明 $\sin x$ 或 $\cos x$ 将在$[0,1]$上有无限多个 0 点，这显然是不可能的.

23. 设 $f(x)$是区间$[a,b]$上几乎处处有限的可测函数，则对于任意的 $\varepsilon>0$ 及 $\delta>0$，恒有闭集 $F\subset[a,b]$及多项式 $P(x)$，使 $mF>b-a-\delta$，而在 F 上 $|f(x)-P(x)|<\varepsilon$.

24. 鲁津定理中，如果取 $\varepsilon=0$，结论还对不对？为什么？

解　结论不成立.

例如，取 $E=[-1,1]$，令

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1],\\ 0, & x\in[-1,0).\end{cases}$$

若 $\varepsilon=0$，则存在 $g(x)\in C(-\infty,+\infty)$使 $mE(f\neq g)=0$. 取 $\delta>0$，使$|x|<\delta$ 时，$|g(x)-g(0)|<\dfrac{1}{4}$，则当 $g(0)\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，有 $E(f\neq g)\supset(0,\delta)$，$g(0)\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$E(f\neq g)\supset(0,\delta)$，故 $mE(f\neq g)>\delta$，矛盾。

25. $mE<+\infty$，f 及 $f_n(n=1,2,3,\cdots)$是 E 上几乎处处有限的可测函数. 试证：f_n 在E 上依测度收敛于f 的充要条件是：$\{f_n\}$的任一子序列$\{f_{n_k}\}$中，存在子序列$\{f_{n_{k'}}\}$使 $\lim\limits_{k'\to\infty}f_{n_{k'}}=f$ 在E 上几乎处处成立.

提示　充分性的证明可采用反证法.

第四章 勒贝格积分

一、基本概念和主要定理

简单函数的勒贝格积分 设在 E 上定义的简单函数 $\varphi(x)$ 有表示式

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n}y_k\chi_{e_k}(x).$$

其中各 $e_k=E(\varphi=y_k)$ 为互不相交的可测集，各 y_k 互异，而 $\chi_{e_k}(x)$ 表示 e_k 上的特征函数. 我们称和数 $\sum\limits_{k=1}^{n}y_k me_k$ 为简单函数 $\varphi(x)$ 在 E 上的勒贝格积分，并记为

$$\int_E\varphi(x)\mathrm{d}m=\sum_{k=1}^{n}y_k me_k.$$

一般可测函数的勒贝格积分 设 $f(x)$ 是有界可测集 E 上的可测函数. 对于 $f(x)\geqslant 0$ 的情形，取 $\varphi(x)$ 为任一满足 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)(x\in E)$ 的简单函数，让 φ 变动，定义 $f(x)$ 在 E 上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m=\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)\mathrm{d}m.$$

若此量为有限数，则称 $f(x)$ 在 E 上勒贝格可积. 对于一般可测函数 $f(x)$，当 $\int_E f_+(x)\mathrm{d}m$ 与 $\int_E f_-(x)\mathrm{d}m$ 不同时为 $+\infty$ 时，称 $f(x)$ 的积分存在，定义 $f(x)$ 在 E 上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m=\int_E f_+(x)\mathrm{d}m-\int_E f_-(x)\mathrm{d}m.$$

当此量为有限数时，称 $f(x)$ 在 E 上勒贝格可积.

无界集上的勒贝格积分 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数. $\{\Delta_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中任一渐张的“区间”列 $\Delta_1\subset\Delta_1\subset\cdots$，$\bigcup\limits_k\Delta_k=\mathbf{R}^n$，若极限

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Delta_k}|f(x)|\mathrm{d}m$$

存在且有限，则称 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上可积，积分记为

$$\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\mathrm{d}m=\lim_{k\to\infty}\int_{\Delta_k}f(x)\mathrm{d}m.$$

如果 $f(x)$ 仅在 $\mathbf{R}^n$ 的无界子集 E 上有定义，则定义

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\chi_E(x)\mathrm{d}m,$$

其中 χ_E 为集 E 的特征函数.

囿变函数 设 $f(x)$是区间$[a,b]$上的有限函数,考察区间$[a,b]$的任一组分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

当分点变动时,称上确界

$$\sup_{(x_0,x_1,\cdots,x_n)} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

为 $f(x)$在$[a,b]$上的总变分,并记为 $\bigvee_a^b(f)$.若 $\bigvee_a^b(f) < +\infty$,称 $f(x)$为$[a,b]$上的囿变函数.

绝对连续函数 设$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots$表示$[a,b]$中任意有限个互不相交的区间所成的区间系,如果当 $m\left(\bigcup_k (a_k,b_k)\right) \to 0$ 时,有

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| \to 0,$$

则称 $f(x)$为$[a,b]$上的绝对连续函数.

奇异函数 设 $\gamma(x)$为连续囿变函数,不等于常数,且 $\gamma'(x)\sim 0$,则称 $\gamma(x)$为奇异函数.

定理 1(积分的绝对连续性) 设 $f(x)$在 E 上可积,则对任一正数 ε,有正数 δ,使当 $me<\delta$ $(e\subset E)$时,就有

$$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}m\right| < \varepsilon.$$

定理 2(积分的完全可加性) 设 $f(x)$在可测集 E 上的积分存在,$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$,每个 E_k 都是可测的且两两不相交,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}m.$$

定理 3(积分的线性) 设 $f(x),g(x)$在 E 上可积, a,b 为常数,则

$$\int_E [af(x) + bg(x)]\mathrm{d}m = a\int_E f(x)\mathrm{d}m + b\int_E g(x)\mathrm{d}m.$$

定理 4(惟一性定理) $\int_E |f(x)|\mathrm{d}m = 0$ 的充要条件是 $f(x)\sim 0$.

定理 5 设 $f(x)$是$[a,b]$上的可积函数,则对任何正数 ε,必有区间$[a,b]$上的连续函数 $g(x)$,使

$$\int_{[a,b]} |f(x) - g(x)|\mathrm{d}m < \varepsilon.$$

定理 6（勒维定理(live)） 设可测函数列满足下面的性质

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots, \lim f_n(x) = f(x),$$

则 $f_n(x)$的积分列收敛于 $f(x)$的积分. 即

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

定理 7（法图(fatou)引理） 设 $f_n(x)$是非负可测函数列,则

$$\int_E \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}m \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

定理 8（勒贝格控制收敛定理(L.D.C)） 设

(1) $\{f_n(x)\}$是可测集 E 上的可测函数列;

(2) $|f_n(x)| \leqslant F(x)$ a.e. 于 E, $n = 1,2,\cdots$,且 $F(x)$在 E 上可积分(称 $\{f_n(x)\}$为 $F(x)$所控制,而 $F(x)$叫控制函数);

(3) $f_n(x)$测度收敛于 $F(x)$或 a.e. 收敛于 $F(x)$,则 $f(x)$在 E 上可积且有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

定理 9 区间$[a,b]$上的有界函数 $f(x)$为 **R** 可积的充要条件是 $f(x)$的不连续点集为零测度集. 又,当 $f(x)$在$[a,b]$上 **R** 可积时,必定也 L 可积且两积分值相等.

定理 10 $f(x)$是区间$[a,b]$上的囿变函数的充要条件是它可以表示成两个单调增函数的差.

定理 11 $f(x)$为$[a,b]$上的绝对连续函数的充要条件是存在可积函数 $g(x)$,使

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(x)\mathrm{d}m.$$

定理 12 定义于区间$[a,b]$上的囿变函数 $f(x)$可以分解为

$$f(x) = \varphi(x) + r(x) + S(x),$$

其中 $\varphi(x)$为绝对连续函数,$r(x)$为奇异函数或零,而 $S(x)$为 $f(x)$的跳跃函数.

二、习题、练习题与解法

1. 设 $f(x)$,$g(x)$都是 E 上可测函数,$g(x)\in L$,且几乎处处成立 $f(x)\leqslant g(x)$,问 $f(x)$是否可积?

解 $f(x)$未必可积,例如:设

$$E = [0,1],\ g(x) = 0,$$

$$f(x)=\begin{cases}-2, & x\in\left(\frac{1}{2},1\right],\\ -4, & x\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right],\\ \vdots & \vdots\\ -2^n, & x\in\left(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right],\\ \vdots & \vdots\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

显然 $g(x)\in L$，$f(x)\leqslant g(x)$．但

$$\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}m=\sum_{k=1}^{\infty}(-2^k)\frac{1}{2^k}=-\infty.$$

注 若还存在 $\varphi(x)\in L$，使 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，则 $f(x)\in L$．

2．设 $f(x)$ 于 E 上可积，令 $E_n=E(|f|\geqslant n)$，则

$$\lim_{n\to\infty} mE_n=0.$$

证 因为 $f(x)$ 在 E 上可积，所以

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}m=S<\infty.$$

但

$$S\geqslant\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}m\geqslant\int_{E_n} n\,\mathrm{d}m=n\cdot mE_n,$$

所以

$$mE_n\leqslant\frac{1}{n}S.$$

故有

$$\lim_{n\to\infty} mE_n=0.$$

3．设在康托尔闭集 P_0 上定义函数 $f(x)$ 为零，而在 P_0 的补集中长为 $\frac{1}{3^n}$ 的构成区间上定义 $f(x)$ 为 $n(n=1,2,3,\cdots)$，试证 $f\in L$，并求积分值．

证 令 e_n 为 G_0 中长为 $\frac{1}{3^n}$ 的各开区间之并（$n=1,2,3,\cdots$），则

$$G_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}e_n,\qquad me_n=\frac{2^{n-1}}{3^n}.$$

令

$$f_n(x)=\begin{cases}i, & x\in e_i\quad (i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & x\in[0,1]-\bigcup_{i=1}^{n}e_i.\end{cases}$$

则简单函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant \cdots$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad x \in [0,1].$$

由文献[1]第四章的基本引理的注得

$$\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)\mathrm{d}m$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} i\,\frac{2^{i-1}}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} i\,\frac{2^{i-1}}{3^i} = 3.$$

这就证明了 $f(x)\in L$，且其积分值为 3.

4. 设 $f(x)\geqslant 0$ 为可测函数，令

$$\{f(x)\}_n = \begin{cases} f(x), & \text{若 } f(x) \leqslant n, \\ 0, & \text{若 } f(x) > n. \end{cases}$$

则当 $f(x)$ 几乎处处有限时，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \{f(x)\}_n \mathrm{d}m = \int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

证法 1 令 $A = E(f=\infty)$，则 $mA = 0$. 于是

$$\int_A f(x)\mathrm{d}m = 0, \qquad \int_A \{f(x)\}_n \mathrm{d}m = 0.$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \{f(x)\}_n \mathrm{d}m = \int_A f(x)\mathrm{d}m.$$

在 $E-A$ 上，令

$$u_n(x) = \begin{cases} f(x), & n-1 < f(x) \leqslant n, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad n = 1,2,\cdots,$$

则

$$\{f(x)\}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x),$$

由文献[1]第四章定理 3.1，得

$$\int_{E-A} f(x)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E-A} u_k(x)\mathrm{d}m$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{E-A} u_k(x)\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_{E-A}\{f(x)\}_n \mathrm{d}m.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \{f(x)\}_n \mathrm{d}m$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_A \{f(x)\}_n \mathrm{d}m + \lim_{n\to\infty}\int_{E-A}\{f(x)\}_n \mathrm{d}m$$

$$=\int_A f(x)\mathrm{d}m+\int_{E-A} f(x)\mathrm{d}m=\int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

证法 2 令 $f_n(x)=\{f(x)\}_n$，则 $f_n(x)\geqslant 0$，$f_n(x)$单调上升，且 a.e. 收敛于 $f(x)$，据勒维定理立即知

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m=\int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

5. 设由$[0,1]$中取出 n 个可测子集 $E_1,E_2,\cdots,E_n$. 假定$[0,1]$中任一点至少属于这 n 个集中的 q 个，试证必有一集，它的测度大于或等于 q/n.

证 令 $\mathscr{I}(x)=\sum_{k=1}^{n}\chi_{E_k}(x)$，$x\in[0,1]$，其中 $\chi_{E_k}(x)$表示 E_k 的特征函数. 由题设 $\mathscr{I}(x)\geqslant q$，于是得

$$q=\int_{[0,1]}q\mathrm{d}m\leqslant\int_{[0,1]}\mathscr{I}(x)\mathrm{d}m$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{[0,1]}\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}m=\sum_{k=1}^{n}mE_k,$$

因此，$E_1,E_2,\cdots,E_n$ 中必有一集，它的测度不小于 q/n.

6. 勒维定理中去掉函数列的非负性假定，结论是否成立？

解 未必成立. 例如在$[0,1]$上定义

$$f_n(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{nx}, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots,$$
$$f(x)=0.$$

则有

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant f_3(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots\leqslant\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x).$$

但

$$\int_{[0,1]}f_n(x)\mathrm{d}m=-\infty,\qquad n=1,2,\cdots,$$
$$\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}m=0.$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[0,1]}f_n(x)\mathrm{d}m=\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}m$ 的结论不成立.

注 容易证明，若存在 $g(x)\in L$ 满足 $g(x)\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$，则勒维定理的结论仍成立.

7. 设 $mE>0$，又设 E 上可积函数 $f(x)$，$g(x)$满足 $f(x)<g(x)$，试证

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m<\int_E g(x)\mathrm{d}m.$$

证 因为 $g(x)-f(x)>0$,所以

$$\int_E [g(x)-f(x)]\mathrm{d}m \geqslant 0.$$

若

$$\int_E [g(x)-f(x)]\mathrm{d}m = 0,$$

则

$$g(x)-f(x)\sim 0,$$

与题设矛盾,故得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m < \int_E g(x)\mathrm{d}m.$$

8. 设 $f(x)$为 E 上可积函数,如果对任何有界可测函数 $\varphi(x)$,都有

$$\int_E f(x)\varphi(x)\mathrm{d}m = 0,$$

则 $f\sim 0$.

证 令

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in E(f\geqslant 0),\\ -1, & x\in E(f<0).\end{cases}$$

因为

$$E(\varphi>a)=\begin{cases}\varnothing, & a\geqslant 1,\\ E(f\geqslant 0), & -1\leqslant a<1,\\ E, & a<-1,\end{cases}$$

所以 $\varphi(x)$为 E 上的有界可测函数.由题设,有

$$\int_E f(x)\varphi(x)\mathrm{d}m = \int_E |f(x)|\mathrm{d}m = 0.$$

根据惟一性定理,得 $f\sim 0$.

9. 设 $f(x)$是$[0,1]$上的可积函数.若对任何 $c(0<c<1)$恒有

$$\int_{(0,c)} f(x)\mathrm{d}m = 0,$$

则 $f\sim 0$.

证法 1 由题设,显然有

$$\int_{(0,1)} f(x)\mathrm{d}m = 0.$$

于是对任何开区间$(\alpha,\beta)\subset(0,1)$,有

$$\int_{(\alpha,\beta)} f(x)\mathrm{d}m = \int_{(0,\beta)} f(x)\mathrm{d}m - \int_{(0,\alpha)} f(x)\mathrm{d}m = 0.$$

从而可知,对任何开集 $G=\bigcup_k(\alpha_k,\beta_k)$,有

$$\int_G f(x)\mathrm{d}m = \sum_k\int_{(\alpha_k,\beta_k)} f(x)\mathrm{d}m = 0.$$

对于(0,1)中的任意闭集 F,$G=(0,1)-F$ 是(0,1)中的开集,有

$$\int_F f(x)\mathrm{d}m = \int_{(0,1)} f(x)\mathrm{d}m - \int_G f(x)\mathrm{d}m = 0.$$

若在 $E=(0,1)$上,$f\sim 0$ 不成立,令

$$E_1 = E(f>0), \qquad E_2 = E(f<0),$$

则 mE_1,mE_2 中至少有一个大于零.不妨设 $mE_1>0$,由测度的定义,必存在闭集 $F_0\subset E_1\subset(0,1)$,使 $mF_0>0$,而在 F_0 上,$f(x)>0$,由本章第 7 题知

$$\int_{F_0} f(x)\mathrm{d}m > 0,$$

得出矛盾,因此 $f\sim 0$.

证法 2 根据积分的绝对连续性,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $e\subset E=(0,1)$,$me<\delta$ 时,

$$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}m\right| < \varepsilon.$$

对于 E 中任意一个可测集 S,必存在(0,1)中的开集 $G\supset S$,使 $m(G-S)<\delta$,于是

$$\left|\int_{G-S} f(x)\mathrm{d}m\right| < \varepsilon,$$

因此

$$\left|\int_S f(x)\mathrm{d}m\right| = \left|\int_G f(x)\mathrm{d}m - \int_{G-S} f(x)\mathrm{d}m\right| = \left|\int_{G-S} f(x)\mathrm{d}m\right| < \varepsilon.$$

由 ε 的任意性,知

$$\int_S f(x)\mathrm{d}m = 0.$$

即在 E 中的任一可测集 S 上的积分都为 0.特别地,对任一自然数 n,

$$\int_{E(f\geqslant 1/n)} f(x)\mathrm{d}m = 0.$$

但

$$\int_{E(f\geqslant 1/n)} f(x)\mathrm{d}m \geqslant \frac{1}{n}mE\left(f\geqslant\frac{1}{n}\right),$$

所以

$$mE\left(f \geqslant \frac{1}{n}\right) = 0.$$

由于 $-f(x)$ 同 $f(x)$ 一样符合题设条件，所以

$$mE\left(-f \geqslant \frac{1}{n}\right) = 0,$$

即

$$mE\left(f \leqslant -\frac{1}{n}\right) = 0.$$

故有

$$mE\left(|f| \geqslant \frac{1}{n}\right) = 0, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

因为

$$E(f \neq 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(|f| \geqslant \frac{1}{n}\right),$$

所以

$$mE(f \neq 0) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} mE\left(|f| \geqslant \frac{1}{n}\right) = 0,$$

即 $f \sim 0$.

10. 证明 $\displaystyle\int_{(0,1)} \frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} \mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2} \quad (p > -1)$.

证 在 $(0,1)$ 上，$\displaystyle\frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^{p+n} \ln x$，由文献[1]第四章定理 3.1，得

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)} \frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} \mathrm{d}m &= -\sum_{n=0}^{\infty} \int_{(0,1)} x^{p+n} \ln x \mathrm{d}m \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (R)\int_0^1 x^{p+n} \ln x \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(p+n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2}.\end{aligned}$$

11. 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (R) \int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^5 nx \mathrm{d}x$.

解 因为 $\displaystyle\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^5 nx$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以在 $[0,1]$ 上 R 可积，又因为

$$\begin{aligned}\left|\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} \sin^5 nx\right| &\leqslant \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} = \frac{nx}{1+n^2x^2} x^{-\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \in L[0,1],\end{aligned}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx=0,\qquad x\in[0,1].$$

由勒贝格控制收敛定理,得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\,\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}(L)\int_{[0,1]}\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\,\mathrm{d}m\\&=\int_{[0,1]}0\,\mathrm{d}m=0.\end{aligned}$$

12. 设 $f_n(x)$是 E 上可积函数,$f_n(x)$几乎处处收敛于 $f(x)$,且

$$\int_E|f_n(x)|\mathrm{d}m\leqslant K\qquad(K\text{ 为常数}),$$

则 $f(x)$可积.

证 设 $E_0=E(f_n\to f)$,则

$$m(E-E_0)=0,\qquad\int_{E-E_0}|f(x)|\mathrm{d}m=0.$$

在 E_0 上,$|f_n(x)|\to|f(x)|\ (n\to\infty)$,由法图定理,得

$$\int_{E_0}|f(x)|\mathrm{d}m\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_{E_0}|f_n(x)|\mathrm{d}m\leqslant K,$$

所以

$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}m=\int_{E_0}|f(x)|\mathrm{d}m\leqslant K,$$

即 $f(x)$在 E 上可积.

13. 设 $f(x),f_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$都是 E 上可积函数,$f_n(x)$几乎处处收敛于 $f(x)$,且

$$\int_E|f_n(x)|\mathrm{d}m\to\int_E|f(x)|\mathrm{d}m.$$

试证:对任意可测子集 $e\subset E$,

$$\int_e|f_n(x)|\mathrm{d}m\to\int_e|f(x)|\mathrm{d}m.$$

证 由法图定理,有

$$\int_e|f(x)|\mathrm{d}m\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_e|f_n(x)|\mathrm{d}m.$$

及

$$\int_{E-e}|f(x)|\mathrm{d}m\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_{E-e}|f_n(x)|\mathrm{d}m.$$

由数列极限的性质“$\overline{\lim_n}(x_n+y_n)\geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim_n}\, y_n$”.得

$$\begin{aligned}\int_e |f(x)|\,\mathrm{d}m &= \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}m - \int_{E-e}|f(x)|\,\mathrm{d}m\\ &= \lim_n\int_E |f_n(x)|\,\mathrm{d}m - \int_{E-e}|f(x)|\,\mathrm{d}m\\ &\geqslant \overline{\lim_n}\left\{\int_e |f_n(x)|\,\mathrm{d}m + \int_{E-e}|f_n(x)|\,\mathrm{d}m\right\}\\ &\quad - \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_{E-e}|f_n(x)|\,\mathrm{d}m \geqslant \overline{\lim_n}\int_e |f_n(x)|\,\mathrm{d}m\\ &\quad + \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_{E-e}|f_n(x)|\,\mathrm{d}m - \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_{E-e}|f_n(x)|\,\mathrm{d}m\\ &= \overline{\lim_n}\int_e |f_n(x)|\,\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

综上得

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_e |f_n(x)|\,\mathrm{d}m &\leqslant \int_e |f(x)|\,\mathrm{d}m\\ &\leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\,\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

所以,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\,\mathrm{d}m = \int_e |f(x)|\,\mathrm{d}m.$$

14. 设 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可积,则

$$\lim_{h\to\infty}\int_{(-\infty,\infty)}|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}m = 0.$$

证 因为 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可积,所以对任意 $\varepsilon>0$,存在 N_0,使

$$\int_{(-\infty,-N_0+1)}|f(x)|\,\mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{8},\qquad \int_{(N_0-1,+\infty)}|f(x)|\,\mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{8}.$$

于是,当$|h|<1$时,有

$$\begin{aligned}&\int_{(-\infty,-N_0)}|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}m\\ \leqslant&\int_{(-\infty,-N_0)}|f(x+h)|\,\mathrm{d}m + \int_{(-\infty,-N_0)}|f(x)|\,\mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}=\frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

同样可证

$$\int_{(N_0,+\infty)}|f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{4}.$$

因 $f(x)$在$[-N_0,N_0+1]$上可积,根据文献[1]第四章定理 2.8,存在连续函数 $g(x)$,使

$$\int_{[-N_0-1,N_0+1]}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}m<\frac{\varepsilon}{6}.$$

由 $g(x)$在$[-N_0-1,N_0+1]$上的一致连续性,存在 $0<\delta<1$,使当$|h|<\delta$ 时,对一切 $x\in[-N_0,N_0]$有

$$|g(x+h)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{12N_0},$$

于是

$$\int_{[-N_0,N_0]}|g(x+h)-g(x)|\mathrm{d}m\leqslant\int_{[-N_0,N_0]}\frac{\varepsilon}{12N_0}\mathrm{d}m=\frac{\varepsilon}{6},$$

从而

$$\begin{aligned}&\int_{[-N_0,N_0]}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}m\\ \leqslant&\int_{[-N_0,N_0]}|f(x+h)-g(x+h)|\mathrm{d}m\\ &+\int_{[-N_0,N_0]}|g(x+h)-g(x)|\mathrm{d}m\\ &+\int_{[-N_0,N_0]}|g(x)-f(x)|\mathrm{d}m<\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

于是当$|h|<\delta(\delta<1)$时

$$\begin{aligned}&\int_{(-\infty,+\infty)}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}m\\ =&\int_{(-\infty,-N_0)}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}m\\ &+\int_{[-N_0,N_0]}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}m\\ &+\int_{(N_0,+\infty)}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}m\\ <&\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{h\to0}\int_{(-\infty,+\infty)}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}m=0.$$

15. 设 $f(x)$是$(-\infty,\infty)$上的可积函数,试证

$$\hat{f}(x)=\int_{(-\infty,+\infty)}e^{-itx}f(t)\mathrm{d}t$$

是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数,且

$$\hat{f}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{(-\infty,+\infty)}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}-1}{-\mathrm{i}t}f(t)\mathrm{d}t.$$

证 对任何 $x\in\mathbf{R}$,

$$\hat{f}(x+\Delta x)-\hat{f}(x)$$
$$=\int_{(-\infty,+\infty)}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+\Delta x)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}]f(t)\mathrm{d}t.$$

因为

$$|[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+\Delta x)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}]f(t)|\leqslant 2|f(t)|\in L(-\infty,+\infty),$$

由勒贝格控制收敛定理,得

$$\lim_{\Delta x\to 0}[\hat{f}(x+\Delta x)-\hat{f}(x)]$$
$$=\int_{(-\infty,+\infty)}\lim_{\Delta x\to 0}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+\Delta x)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}]f(t)\mathrm{d}t=0.$$

此即 $\hat{f}(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

令

$$g(x)=\int_{(-\infty,+\infty)}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}-1}{-\mathrm{i}t}f(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\int_{(-\infty,+\infty)}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(x+\Delta x)}-1}{-\mathrm{i}t}-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}-1}{-\mathrm{i}t}\right]\frac{f(t)}{\Delta x}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{(-\infty,+\infty)}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\Delta x}-1)}{-\mathrm{i}t}\frac{f(t)}{\Delta x}\mathrm{d}t.$$

由微分学中值定理

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\Delta x}-1)}{-\mathrm{i}t}\frac{f(t)}{\Delta x}\right|=\left|\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\theta\Delta x}(-\mathrm{i}t\Delta x)}{-\mathrm{i}t\Delta x}f(t)\right|$$
$$\leqslant|f(t)|\in L(-\infty,\infty),$$

其中 $0<\theta<1$,再由勒贝格控制收敛定理,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\int_{(-\infty,+\infty)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\theta\Delta x}f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_{(-\infty,+\infty)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}f(t)\mathrm{d}t=\hat{f}(x).$$

16. 设 $f(x)$是(a,b)上的可积函数,试证

$$\lim_{t\to\infty}\int_{(a,b)}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}x=0.$$

证 由于在 a,b 两点补充或改变函数值,不改变函数的可积性和积分值,故

可将题中(a,b)改为$[a,b]$.

(1) 当$f(x)$为$[a,b]$上的连续函数时,令

$$M=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|,$$

因为$f(x)$在$[a,b]$上一致连续,任给$\varepsilon>0$,必有$\delta>0$,使当$x',x''\in[a,b]$, $|x'-x''|<\delta$时,有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

对$[a,b]$作分割,$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=b$,使得$|x_k-x_{k+1}|<\varepsilon\quad(k=0,1,\cdots,m-1)$,则

$$\begin{aligned}\left|\int_{(a,b)}f(x)e^{itx}dx\right|&=\left|\sum_{k=0}^{m-1}\int_{[x_k,x_{k+1}]}f(x)e^{itx}dx\right|\\&\leqslant\left|\sum_{k=0}^{m-1}\int_{[x_k,x_{k+1}]}[f(x)-f(x_k)]e^{itx}dx\right|\\&\quad+\left|\sum_{k=0}^{m-1}\int_{[x_k,x_{k+1}]}f(x_k)e^{itx}dx\right|\\&\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_{[x_k,x_{k+1}]}|e^{itx}|dx+M\sum_{k=0}^{m-1}\left|\int_{[x_k,x_{k+1}]}e^{itx}dx\right|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{[x_k,x_{k+1}]}dx+M\sum_{k=0}^{m-1}\left|\left[\frac{1}{it}e^{itx}\right]_{x_k}^{x_{k+1}}\right|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{k=0}^{m-1}(x_{k+1}-x_k)+M\sum_{k=0}^{m-1}\frac{2}{t}\\&=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2Mm}{t}.\end{aligned}$$

于是当$t>\frac{4Mm}{\varepsilon}$时,有

$$\left|\int_{(a,b)}f(x)e^{itx}dx\right|<\varepsilon,$$

故有

$$\lim_{t\to\infty}\int_{(a,b)}f(x)e^{itx}dx=0.$$

(2) 当$f(x)$在$[a,b]$上可积时,由文献[1]第四章定理2.8,任给$\varepsilon>0$,在$[a,b]$上存在连续函数$g(x)$,满足

$$\int_{[a,b]}|f(x)-g(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由(1),对于连续函数$g(x)$,存在T,使当$t>T$时,有

$$\left|\int_{[a,b]} g(x)e^{itx}dx\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

于是 $t>T$ 时,有

$$\left|\int_{[a,b]} f(x)e^{itx}dx\right| \leqslant \left|\int_{[a,b]} [f(x)-g(x)]e^{itx}dx\right| + \left|\int_{[a,b]} g(x)e^{itx}dx\right|$$
$$< \int_{[a,b]} |f(x)-g(x)|dx + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

此即证明

$$\lim_{t\to\infty}\int_{[a,b]} f(x)e^{itx}dx = 0.$$

17. 设 $mE<\infty$,则 $f(x)$在 E 上可积的充要条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant n)$$

收敛. 当 $mE=\infty$时,结论是否成立?

证 设 $E_n=E(n\leqslant|f|<n+1)$,则

$$n\cdot mE_n \leqslant \int_{E_n} |f(x)|dm \leqslant (n+1)mE_n,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot mE_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n} |f(x)|dm \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)mE_n.$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot mE_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} mE_k = \sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant n),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)mE_n = \sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant n) + mE,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n} |f(x)|dm$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant n) + mE.$$

若 $f(x)$在 E 上可积,则 $f(x)$在 E 上几乎处处有限,于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geqslant n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n} |f(x)|dm$$
$$= \int_E |f(x)|dm < +\infty.$$

反之，若 $\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f| \geqslant n) < \infty$，则 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限. 又据 $mE<\infty$，得

$$\int_E |f(x)| \mathrm{d}m = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |f(x)| \mathrm{d}m$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} mE(|f| \geqslant n) + mE < +\infty.$$

若 $mE=\infty$，则充分性不成立. 例如，设 $E=[1,\infty)$，$f(x)=\frac{1}{x}$，则有 $\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f| \geqslant n) = 0$，但 $f(x) \overline{\in} L(E)$.

但必要性仍成立，这是因为，当 $f(x) \in L$ 时，若令 $E_0 = E(|f| \geqslant 1)$，则 $mE_0 < \infty$，且 $f \in L(E_0)$，由此得

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE_0(|f| \geqslant n) < \infty.$$

但

$$mE_0(|f| \geqslant n) = mE(|f| \geqslant n), \quad n = 1,2,\cdots,$$

于是，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE(|f| \geqslant n) < \infty.$$

18. 设 $f(x)$，$g(x)$ 分别是定义在集 X，Y 上的 μ，ν 可积函数，则 $h(x,y)=f(x)g(y)$ 是乘积空间 $X \times Y$ 上的可积函数，且有

$$\int_{X \times Y} h \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_X f \mathrm{d}\mu \int_Y g \mathrm{d}\nu.$$

证 (1) 当 $f(x)=\chi_{E_1}(x)$，$g(y)=\chi_{E_2}(y)$，其中 E_1，E_2 分别为集 X，Y 上的 μ，ν 可测集时

$$h(x,y) = \chi_{E_1 \times E_2}(x,y),$$

于是

$$\int_{X \times Y} h \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \mu(E_1)\nu(E_2) = \int_X f \mathrm{d}\mu \int_Y g \mathrm{d}\nu.$$

(2) 当 $f(x)$，$g(y)$ 分别为 X，Y 上的简单函数时，设

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E_k}(x), \qquad g(y) = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{F_j}(y),$$

则

$$h(x,y) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_k b_j \chi_{E_k \times F_j}(x,y)$$

为 $X \times Y$ 上的简单函数，由(1)，有

$$\int_{X\times Y} h(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_k b_j \mu(E_k)\nu(E_j)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}a_k\mu(E_k)\sum_{j=1}^{n}b_j\nu(E_j)$$
$$=\int_X f(x)\mathrm{d}\mu\int_Y g(y)\mathrm{d}\nu.$$

(3) 当 $f(x)\geqslant 0, g(y)\geqslant 0$ 时,因为 $f(x)$在 X 上 μ 可积,所以在 X 上存在简单函数列$\{f_n(x)\}$,满足

$$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots,\qquad \lim_n f_n(x)=f(x),$$

且

$$\lim_n\int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu=\int_X f(x)\mathrm{d}\mu.$$

同理,在 Y 上存在简单函数列$\{g_n(y)\}$,满足

$$0\leqslant g_1(y)\leqslant g_2(y)\leqslant\cdots\leqslant g_n(y)\leqslant\cdots,\qquad \lim_n g_n(y)=g(y),$$

且

$$\lim_n\int_Y g_n(y)\mathrm{d}\nu=\int_Y g(y)\mathrm{d}\nu.$$

因为$\{f_n(x)g_n(y)\}$为 $X\times Y$ 上的简单函数列,满足

$$0\leqslant f_1(x)g_1(y)\leqslant f_2(x)g_2(y)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)g_n(y)\leqslant\cdots,$$
$$\lim_n f_n(x)g_n(y)=f(x)g(y)=h(x,y),$$

由勒维定理及(2),得

$$\int_{X\times Y}h(x,y)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu=\lim_n\int_{X\times Y}f_n(x)g_n(y)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu$$
$$=\lim_n\int_X f_n(x)\mathrm{d}\mu\int_Y g_n(y)\mathrm{d}\nu$$
$$=\int_X f(x)\mathrm{d}\mu\int_Y g(y)\mathrm{d}\nu.$$

(4) 当 $f(x),g(y)$分别在 X,Y 上 μ,ν 可积时,f_+,f_-在 X 上 μ 可积,g_+,g_-在 Y 上 γ 可积,由(3),$f_+g_+,f_-g_-,f_+g_-,f_-g_+$在 $X\times Y$ 上 $\mu\times\nu$ 可积,于是

$$h=h_+-h_-=(f_+g_++f_-g_-)-(f_+g_-+f_-g_+)$$

在 $X\times Y$ 上 $\mu\times\nu$ 可积,且

$$\int_{X\times Y}h\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\int_{X\times Y}(f_+g_++f_-g_-)\mathrm{d}(\mu\times\nu)$$
$$-\int_{X\times Y}(f_+g_-+f_-g_+)\mathrm{d}(\mu\times\nu)$$

$$= \int_X f_+ \mathrm{d}\mu \int_Y g_+ \mathrm{d}\nu$$
$$+ \int_X f_- \mathrm{d}\mu \int_Y g_- \mathrm{d}\nu - \int_X f_+ \mathrm{d}\mu \int_Y g_- \mathrm{d}\mu$$
$$- \int_X f_- \mathrm{d}\mu \int_Y g_+ \mathrm{d}\nu$$
$$= \left(\int_X f_+ \mathrm{d}\mu - \int_X f_- \mathrm{d}\mu\right)\left(\int_Y g_+ \mathrm{d}\nu - \int_Y g_- \mathrm{d}\nu\right)$$
$$= \int_X f \mathrm{d}\mu \int_Y g \mathrm{d}\nu .$$

19. 设$(X,\mathscr{R},\mu)=(Y,\mathscr{R},\nu)$为勒贝格测度的单位区间这样的测度空间,$E$ 是 $X\times Y$ 中适合下述条件的集:对每个 x 与每个 y,E_x 与 $X-E^y$ 都是可列集,那么,E 是不可测的.

证 假设 E 是可测的,则有

$$(\mu\times\nu)(E)=\int_{X\times Y}\chi_E(x,y)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu$$
$$=\int_{X\times Y}\chi_E(x,y)\mathrm{d}m\mathrm{d}m .$$

由富比尼(Fubini)定理

$$\int_{X\times Y}\chi_E(x,y)\mathrm{d}m\mathrm{d}m=\int_Y mE_x(y)\mathrm{d}m=\int_X mE^y(x)\mathrm{d}m .$$

但因为 E_x 与 $X-E^y$ 为可列集,所以

$$mE_x=0,\ mE^y=m(X-(X-E^y))=mX=1,$$

所以

$$\int_Y mE_x(y)\mathrm{d}m=0,\qquad \int_X mE^y(x)\mathrm{d}m=1,$$

与前述等式矛盾.所以 E 是不可测的.

20. 设在可测空间(X,R)上给定两个测度 μ_1,μ_2,令 $\mu=a_1\mu_1+a_2\mu_2(a_1,a_2$ 是任意实数).试证存在 X 的分解 $X=A\cup B$,$A\cap B=\varnothing$,使 A 为 μ 的正集,B 为 μ 的负集(μ 的正集 A 的定义为:对每个可测集 E,$E\cap A$ 可测,且 $\mu(E\cap A)\geqslant 0$,负集的定义类似).

证 首先应假设 μ_1,μ_2 中至少有一个为有限测度,否则当 a_1,a_2 异号时,将可能出现$\infty-\infty$的情形.在此假设下,$\mu(E)$不可能既出现$+\infty$,又出现$-\infty$,不妨假定

$$-\infty<\mu(E)\leqslant+\infty .$$

易见,可列个负集的并仍为负集.设

$$\beta=\inf\{\mu(s):s\ \text{为可测负集}\},$$

又设$\{B_i\}$为可测负集列,满足

$$\lim_i \mu(B_i) = \beta, \qquad B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

则 B 是一可测负集,且 $\mu(B)=\beta$.

再令 $A=X-B$,可证 A 为正集.事实上,若 A 不是正集,则必存在 $E_0\subset A$,使 $\mu(E_0)<0$.

E_0 不可能为负集,否则 $B\cup E_0$ 仍为负集,且

$$\mu(B\cup E_0) < \mu(B) = \beta,$$

与 β 是下确界相矛盾.

因为 E_0 不是负集,所以必有 $E\subset E_0$,使 $\mu(E)>0$,由于 $-\infty<\mu(E_0)<0$,可知任何 $E\subset E_0$, $-\infty<\mu(E)<+\infty$.事实上,因为 $\mu(E_0)=\mu(E_0-E)+\mu(E)$, $-\infty<\mu(E-E_0)\leqslant+\infty$,若 $\mu(E)=+\infty$,则 $\mu(E_0)=+\infty$,与 $\mu(E_0)<0$ 矛盾.

由上可见,对任何自然数 n, $E\subset E_0$,且 $\mu(E)>\frac{1}{n}$ 的集 E 最多为有限个,将 $\mu(E)>\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$的至多可列个集 E 排列为

$$E_1,E_2,\cdots,E_k,\cdots.$$

令

$$F_0 = E_0 - \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

则对任何含于 F_0 的可测子集 F,必有 $\mu(F)\leqslant 0$.因此 F_0 是一个负集.

又 F_0 与 B 不相交,且 $\mu(F_0)=\mu(E_0)-\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\leqslant\mu(E_0)<0$.于是 $B\cup F_0$ 为负集,且 $\mu(B\cup F_0)=\mu(B)+\mu(F_0)<\mu(B)=\beta$,又与 β 为下确界相矛盾.

因此 $\mu(E_0)<0$ 的假设不能成立,所以 A 为一个正集.

21. 研究函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n x\}}{10^n}$的可微性,其中记号$\{y\}$表示数 y 与它最近整数间的距离,例如$\{3.1\}=0.1$, $\{3.5\}=0.5$.

解 显然 $f(x)$以 1 为周期,因此我们只要对 $0\leqslant x<1$ 进行讨论.

若将[0,1)中的 x 定成无穷小数的形式

$$x = 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

则

$$10^n x = a_1a_2\cdots a_n + 0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots,$$

当$0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots\leqslant\frac{1}{2}$时,$\{10^n x\}=0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots$,而当 $0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots>\frac{1}{2}$时,$\{10^n x\}=1-0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots$,可以证明,对[0,1)中任意的 $x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,存在数列 $h_m(m=1,2,\cdots)$,当 $m\to\infty$时,$h_m\to 0$,但

$$\Delta_m f(x) = \frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}$$

的极限不存在，于是 $f(x)$ 处处不可微.

事实上，当 a_m 等于 4 或 9 时，取 $h_m = -10^{-m}$，否则取 $h_m = 10^{-m}$，显然当 $m\to\infty$ 时，$h_m\to 0$，而

$$\begin{aligned}\Delta_m f(x) &= \frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n(x\pm 10^{-m})\}}{10^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n x\}}{10^n}}{\pm 10^{-m}}\\ &= \pm 10^m \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n(x\pm 10^{-m})\} - \{10^n x\}}{10^n}.\end{aligned}$$

当 $n\geqslant m$ 时

$$\{10^n(x\pm 10^{-m})\} - \{10^n x\} = \{10^n x \pm 10^{n-m}\} - \{10^n x\} = 0,$$

当 $n<m$ 时

$$\{10^n(x\pm 10^{-m})\} = \{10^n x \pm 10^{n-m}\} = \{10^n x\} \pm 10^{n-m},$$

$$10^m\frac{\{10^n(x\pm 10^{-m})\} - \{10^n x\}}{10^n} = 10^m\frac{\pm 10^{n-m}}{10^n} = \pm 1.$$

于是，$\Delta_m f(x)$ 是 m 个 ± 1 相加，它是一个整数，当 m 为奇数时为奇数，当 m 为偶数时为偶数. 即 $\{\Delta_m f(x)\}$ 是一个奇偶相间的整数列，这样的数列是不可能有极限存在的.

此外，$f(x)$ 处处连续. 事实上，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n x\}}{10^n}$$

有收敛的优势级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}$，故在 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛.

又级数的每一项皆在 $(-\infty,\infty)$ 上连续，由数学分析的知识知，其和函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续.

22. 设 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上囿变函数列，$f_n(x)$ 收敛于一有限函数 $f(x)$，且若 $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f_n)\leqslant K\ (n=1,2,\cdots)$，则 $f(x)$ 亦囿变.

证 在 $[a,b]$ 上任取一组分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b,$$

则对任何 n，有

$$\sum_{k=1}^{m}|f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})| \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f_n) \leqslant K.$$

而

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

所以

$$\sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}|f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})| \leqslant K,$$

故有

$$\bigvee_a^b (f) \leqslant K,$$

即 $f(x)$在$[a,b]$上囿变.

23. 若函数 $f(x)$在$[a,b]$上为绝对连续,且几乎处处存在非负导数,则 $f(x)$必为增函数.

证 任取 $x_1,x_2\in[a,b]$,$x_1<x_2$,由 $f(x)$的绝对连续性及 $f'(x)\geqslant 0$,得

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_2}^{x_1} f'(t)\mathrm{d}t \geqslant 0,$$

即 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$,亦即 $f(x)$为增函数.

24. 讨论函数 $f(x)=x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}}(0\leqslant x\leqslant 1;\alpha,\beta>0)$的囿变性,绝对连续性.

解 当 $\alpha\leqslant\beta$ 时,在$[0,1]$上取分点 $x_0=0,x_n=1$

$$x_i = \left[\frac{1}{(n-1-i)\pi+\frac{\pi}{2}}\right]^{\frac{1}{\beta}},\quad i = 1,2,\cdots,n-1,$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i) - f(x_{i-1})| &\geqslant \sum_{i=2}^{n-1}\left\{\left[\frac{1}{(n-1-i)\pi+\frac{\pi}{2}}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}} + \left[\frac{1}{(n-i)\pi+\frac{\pi}{2}}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}\right\}\\ &\geqslant \sum_{i=2}^{n-1}\left[\frac{1}{(n-1-i)\pi+\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{(n-i)\pi+\frac{\pi}{2}}\right]\\ &> \sum_{i=2}^{n-1}\left[\frac{1}{(n-i)\pi} + \frac{1}{(n-i+1)\pi}\right] > \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

于是

$$\bigvee_a^b (f) = \sup\sum_{i=1}^{n}|f(x_i) - f(x_{i-1})| = +\infty,$$

所以 $f(x)$在$[0,1]$上非囿变,非绝对连续.

当 $\alpha>\beta$ 时,若 $x\neq 0$

$$|f'(x)| = \left|\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^{\beta}} - \beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{x^{\beta}}\right|$$

$$\leqslant \alpha x^{\alpha-1} + \beta x^{\alpha-\beta-1}.$$

因为 $\alpha-1>-1$, $\alpha-\beta-1>-1$,所以 $f'(x)$在$[0,1]$上 R 可积,于是

$$(L)\int_0^x f'(t)\mathrm{d}m = (R)\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \lim_{\delta\to 0}(R)\int_\delta^x f'(t)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{\delta\to 0} t^\alpha \sin\frac{1}{t^\beta}\bigg|_\delta^x = x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta} - 0 = f(x).$$

故由文献[1]第四章定理 6.8 知,$f(x)$在$[0,1]$上绝对连续,囿变.

25. 试作一增函数使其不连续点处处稠密.

解 设$[0,1]$上的全体有理点为

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

令

$$f(x) = \begin{cases} \sum\limits_{\{n: a_n < x\}} \dfrac{1}{2^n}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

则 $f(x)$为增函数,事实上,若 $x_2>x_1$,则

$$\{n: a_n < x_2\} \supset \{n: a_n < x_1\},$$

因此 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$.

另一方面,$[0,1]$的任何有理点 a_k 都是$f(x)$的不连续点,即 $f(x)$的不连续点在$[0,1]$上处处稠密,事实上,$x>a_k$,则

$$f(x) - f(a_k) \geqslant \frac{1}{2^k},$$

因此

$$f(a_k+0) - f(a_k) \geqslant \frac{1}{2^k},$$

故 $f(x)$即为所要作的函数.

26. $f(x)$为$[a,b]$上的可积正函数,设$0<q\leqslant b-a$, $S=\{e: e\subset[a,b], me\geqslant q\}$,试证

$$\inf_{e\in S}\left\{\int_e f(x)\mathrm{d}x\right\} > 0.$$

27. 设 $g(x)=\sup\limits_{i\in I}|f_i(x)|$, $\psi(x)=\inf\limits_{i\in I}|f_i(x)|$,其中 $f_i(x)(i\in I)$为可测集 E 上的可积函数,试问 $g(x)$, $\psi(x)$是否在 E 上可积?

答 当 I 为有限集时,$g(x)$, $\psi(x)$在 E 上可积;否则,$g(x)$, $\psi(x)$在 E 上不一定可积.

28. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可积,而在$[a,b]$外等于0,设

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t,$$

试证

$$\int_a^b |\varphi(x)|\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

29. 假设$\{f_n(x)\}$为 E 上的非负可积函数列，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = 0$，则$f_n(x)$测度收敛于 0，并举例说明在题设下不能得到 $f_n(x)$ 几乎处处收敛于 0.

30. 设 $mE<+\infty$，$f(x)\in L(E)$，$E_n=E(|f|\geqslant n)$，试证

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot mE_n = 0.$$

提示 利用第四章习题 2 的结论及积分的绝对连续性.

31. 设 $mE<\infty$，$f,g,f_n,g_n\in L(E)$，$n=1,2,\cdots$，又

$$\int_E |f_n - f|\,dx \to 0, \qquad \int_E |g_n - g|\,dx \to 0 \quad (n\to\infty),$$

若 $f_n(x)$在 E 上一致有界，则

$$\int_E |f_n g_n - fg|\,dx \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

32. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x}\cos x\,dx = 0.$$

33. 设 $f,f_n(n=1,2,\cdots)$是 $\mathbf{R}$ 上的可积函数，$f_n(x)$几乎处处收敛于 $f(x)$，且$\int_{\mathbf{R}} |f_n|\,dx \to \int_{\mathbf{R}} |f|\,dx\,(n\to\infty)$，则

(i) $\int_E |f_n|\,dx \to \int_E |f|\,dx\ (n\to\infty)$，对一切可测集 E 成立；

(ii) $\int_{\mathbf{R}} |f_n - f|\,dx \to 0\ (n\to\infty)$；

(iii) $\int_{\mathbf{R}} f_n g\,dx \to \int_{\mathbf{R}} fg\,dx\ (n\to\infty)$，对一切有界可测函数 $g(x)$ 成立.

34. 若$\{f_n(x)\}$是可测集 E 上的可积函数列，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n(x)|\,dx < \infty,$$

试证明

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 E 上几乎处处收敛于一几乎处处有限的函数$f(x)$；

(ii) $f(x)$在 E 上可测；

(iii) $f(x)$在 E 上可积，且

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\,dx.$$

35. 设 $mE<\infty$，E 上的非负可积函数列$\{f_n(x)\}$满足

(i) $\{f_n(x)\}$依测度收敛于 $F(x)$;

(ii) 任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $e\subset E$, $me<\delta$ 时,对一切 $n=1,2,\cdots$,有 $\int_e f_n(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$ 成立,则有

(1) $F(x)$为 E 上几乎处处非负的可测函数;

(2) $F(x)$在 E 上可积;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E F(x)\mathrm{d}x$.

36. 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$定义在 $E=(0,1)\times(0,1)$上,证 $f(x,y)$在 E 上不可积.

37. (i) 求函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & 当\ x=0\\ 1-x, & 当\ 0<x<1\\ 5, & 当\ x=1\end{cases}\quad 在[0,1]上的总变分;$$

(ii) 求函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & 当\ x<1\\ 10, & 当\ x=1\\ x^2, & 当\ x>1\end{cases}\quad 在[0,2]上的总变分.$$

38. $f(x)$在$[a,b]$上为囿变函数的充要条件是:存在这样一个增函数 $\varphi(x)$,使对任意的 $x\in[a,b]$, $h>0$($x+h\in[a,b]$)恒有

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant\varphi(x+h)-\varphi(x).$$

39. 设 $f(x)$和 $g(x)$是$[a,b]$上的囿变函数,证明集合$\{(f(x),g(x)):x\in[a,b]\}$不可能充满一个正方形.

40. 囿变连续函数的一致收敛级数之和是否一定是囿变函数?

答　不一定,如考虑定义在$[0,1]$上的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$,其中

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\sin n\pi[x(n+1)-1], & 当\ x\in\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]时,\\ 0, & 当\ x\in[0,1]-\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]时.\end{cases}$$

41. 试证,若 $f(x)$在$[a,b]$上满足利普希茨(Lipschitz)条件,则 $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续,反之是否成立?

答　反之不一定成立.

第五章　函数空间 L^p

一、基本概念和主要定理

L^p 空间　设 $p \geq 1$，若 $|f|^p$ 在可测集 E 上可积，称 f 是 E 上的 p 幂可积函数. p 幂可积函数构成的类，称为 L^p 空间. 记为 $L^p(E)$ 或简记为 L^p. 即

$$L^p = \left\{ f : \int_E |f|^p \mathrm{d}m < \infty \right\}.$$

对于 $f \in L^p$，称

$$\| f \|_p = \left\{ \int_E |f|^p \mathrm{d}m \right\}^{1/p}$$

为 f 的范数. 范数 $\| f \|_p$ 满足范数公理：

(i) $\| f \|_p \geq 0$，等号当且仅当 $f \sim 0$ 时成立；

(ii) $\| af \|_p = |a| \, \| f \|_p$，$a$ 为实数；

(iii) $\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$，$f, g \in L^p$.

称上述不等式 $\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$ 为闵可夫斯基(Minkowski)不等式.

对于 $f \in L^p$，$g \in L^p$，称 $\| f - g \|_p$ 为 f 与 g 之间的距离，它满足距离公理：

(i) $\| f - g \|_p \geq 0$，等式当且仅当 $f \sim g$ 时成立；

(ii) $\| f - g \|_p = \| g - f \|_p$；

(iii) $\| f - g \|_p \leq \| f - h \|_p + \| h - g \|_p$，$f, g, h \in L^p$.

于是，L^p 是距离空间.

本性有界函数空间　若定义在可测集 E 上的可测函数 f 满足 $\inf\limits_{me=0} \sup\limits_{x \in E-e} |f(x)| < \infty$，则称 f 为 E 上的本性有界函数. 本性有界函数构成的类称为本性有界函数空间，记为 $L^\infty(E)$ 或简记为 L^∞.

对 $f \in L^\infty$，称

$$\| f \|_\infty = \inf_{me=0} \sup_{x \in E-e} |f(x)|$$

为 f 的范数.

相伴数与赫尔得(Hölder)不等式　设 $p > 1$，q 满足等式 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，则称 p, q 为相伴数. 显然 $q > 1$，约定 $p = 1$ 的相伴数为 $q = \infty$，$p = \infty$ 的相伴数为 $q = 1$.

设 $p \geq 1$，q 为相伴数，则对任何 $f \in L^p$，$g \in L^q$，$fg \in L$，且有不等式

$$\left| \int_E fg \mathrm{d}m \right| \leq \| f \|_p \| g \|_q$$

成立,称此不等式为赫尔得不等式.

强收敛与弱收敛 设 $f, f_n \in L^p, n=1,2,\cdots$,若 f_n 与 f 的距离 $\|f_n - f\|_p$ 收敛于 0 ($n\to\infty$),则称 f_n 强收敛于 f 或称 f_n 依范数收敛于 f. 称 f 是 f_n 的强极限,简记为

$$f_n \xrightarrow{\text{强}} f.$$

设 $f, f_n \in L^p, n=1,2,\cdots$,若对每个 $g\in L^q$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$,都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n g\,\mathrm{d}m = \int_E fg\,\mathrm{d}m,$$

则称 f_n 在 L^p 中弱收敛于 f,记作 $f_n \xrightarrow{\text{弱}} f$.

基本列与完备性 设 $\{f_n\}$ 是 L^p 中的元列,如果当 $n, m\to\infty$ 时,有 $\|f_m - f_n\|\to 0$,则称 $\{f_n\}$ 是 L^p 中的基本列. 如果 L^p 空间的任何基本列 $\{f_n\}$,都有 $f\in L^p$,使 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$,则称 L^p 空间是完备的.

稠密与可分性 设 A 是 L^p 的一个子类,若对任一个 $f\in L^p$,恒有元列 $g_n\in A$,使 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$,则称 A 在 L^p 中稠密. 如果存在可列子类 A,使 A 在 L^p 中稠密,则称 L^p 具有可分性.

傅里叶(Fourier)变式 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的可积函数,称含参量积分

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}x$$

为可积函数 f 的傅里叶变式.

设 $f\in L^2_{(-\infty,+\infty)}$,则 $\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}x$ 按 L^2 意义强收敛于一个函数 $\hat{f}(t)$,称之为 f 依 L^2 意义的傅里叶变式,并记为

$$\hat{f}(t) = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}x.$$

两个函数的卷积 两个函数 $f(x), g(x)$ 的卷积指

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t.$$

$L^2(E)$ 中的标准直交系 设 $mE<\infty, \omega_n\in L^2(E)$,且

$$\int_E \omega_i\omega_j\,\mathrm{d}m = \begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j,\end{cases}$$

则称 $\{\omega_n\}$ 为 $L^2(E)$ 中的标准直交系.

定理 1 L^p 是一线性空间.

定理 2 设 $f, f_n\in L^p, n=1,2,\cdots$,若 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$,则 $f_n \xrightarrow{\text{弱}} f$.

定理 3 L^p 空间是完备的.

定理 4 设 E 是有界可测集,则 $L^p(E)$是可分的.

定理 5(黎曼-勒贝格定理) 设 $f \in L_{(-\infty,+\infty)}$,则当 $t \to \pm\infty$时,$\hat{f}(t) \to 0$.

定理 6 设 $x^r f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可积,则 $\hat{f}(t)$为 r 阶可微,且有等式

$$\hat{f}^{(r)}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-\mathrm{i}x)^r \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}x.$$

定理 7 设 $f(x) \in L^2_{(-\infty,+\infty)}$,$\hat{f}(t)$是它的依 L^2 意义的傅里叶变式,则 $\hat{f} \in L^2_{(-\infty,+\infty)}$,且有帕塞瓦尔(Parseval)公式成立

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

定理 8 设 $f \in L$,$g \in L$,则有

$$(f * g)\hat{}\,(t) = 2\pi\hat{f}(t)\hat{g}(t).$$

当 $f \in L^2$,$g \in L^2$ 时,有

$$(f * g)(t) = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u)\hat{g}(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu}\mathrm{d}u.$$

二、习题、练习题与解法

1. 设 $f_n(x)$是 L^2 中的序列,若 f_n 测度收敛于 f,$|f_n| \leqslant K$,K 为常数,则 $f_n \xrightarrow{\text{弱}} f$.

证 因为 $f_n(x)$测度收敛于 $f(x)$,所以存在子列$\{f_{n_k}(x)\}$几乎处处收敛于 $f(x)$,于是$\{f_{n_k}^2(x)\}$几乎处处收敛于 $f^2(x)$,由法图定理,得

$$\int_E f^2 \mathrm{d}m \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_{n_k}^2 \mathrm{d}m \leqslant K^2,$$

即 $f \in L^2$,且 $\|f\| \leqslant K$.

以下不妨设 $E = (-\infty,+\infty)$,否则在 $\mathscr{C}E$ 上,令 $f_n(x) = 0$,$f(x) = 0$.

(1) 先证对 L^2 中的任意有界可测函数 $g_1(x)$有

$$\lim_n \int_E f_n(x) g_1(x)\mathrm{d}m = \int_E f(x) g_1(x)\mathrm{d}m.$$

由于 $g_1(x) \in L^2$,对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $M > 0$,使

$$\int_{|x| \geqslant M} |g_1|^2 \mathrm{d}m < \left(\frac{\varepsilon}{4K}\right)^2,$$

于是由施瓦茨(Schwarz)不等式,得

$$\int_{|x| \geqslant M} |f_n - f|\,|g_1|\,\mathrm{d}m \leqslant \left\{\int_{|x| \geqslant M} |f_n - f|^2 \mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left\{\int_{|x|\geqslant M}|g_1|^2\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon/2.$$

设 $|g_1(x)|\leqslant S$, $E_1=[-M,M]$,则对任意的 $\sigma>0$

$$\begin{aligned}\int_{E_1}|f_n-f|\,|g_1|\mathrm{d}m&=\int_{E_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)}|f_n-f|\cdot|g_1|\mathrm{d}m\\&\quad+\int_{E_1(|f_n-f|<\sigma)}|f_n-f|\,|g_1|\mathrm{d}m\\&\leqslant S\int_{E_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)}|f_n-f|\mathrm{d}m+S\sigma mE_1\\&\leqslant S\left\{\int_{E_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)}|f_n-f|\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{2}}\\&\quad\times\left\{\int_{E_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)}\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{2}}+S\sigma mE_1\\&\leqslant 2KS\{mE_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)\}^{\frac{1}{2}}+2MS\sigma.\end{aligned}$$

取 $\sigma<\frac{\varepsilon}{8MS}$,固定 σ,因为

$$\lim_{n\to\infty}mE_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)=0,$$

所以存在 N,使当 $n>N$ 时

$$mE_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)<\left(\frac{\varepsilon}{8KS}\right)^2.$$

于是当 $n>N$ 时

$$\int_{E_1}|f_n-f|\cdot|g_1|\mathrm{d}m<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\begin{aligned}\left|\int_E f_ng_1\mathrm{d}m-\int_E fg_1\mathrm{d}m\right|&\leqslant\int_E|f_n-f|\cdot|g_1|\mathrm{d}m\\&=\int_{|x|\geqslant M}|f_n-f|\cdot|g_1|\mathrm{d}m+\int_{E_1}|f_n-f|\cdot|g_1|\mathrm{d}m\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

即

$$\lim_n\int_E f_ng_1\mathrm{d}m=\int_E fg_1\mathrm{d}m.$$

(2) 证 $f_n\xrightarrow{\text{弱}}f$.

任取一个 $g(x)\in L^2$,由文献[1]第五章引理 2.1,对任给的 $\varepsilon>0$,在 L^2 中存

在有界可测函数 $g_1(x)$，使

$$\| g - g_1 \| < \frac{\varepsilon}{3K},$$

由已证的(1)，存在 N，使当 $n > N$ 时

$$\left| \int_E (f_n - f) g_1 \mathrm{d}m \right| < \varepsilon/3,$$

于是

$$\begin{aligned} \left| \int_E (f_n - f) g \mathrm{d}m \right| &\leqslant \left| \int_E f_n (g - g_1) \mathrm{d}m \right| \\ &\quad + \left| \int_E (f_n - f) g_1 \mathrm{d}m \right| + \left| \int_E f(g_1 - g) \mathrm{d}m \right| \\ &\leqslant \| g - g_1 \| \cdot \| f_n \| + \varepsilon/3 + \| f \| \cdot \| g - g_1 \| \\ &< \frac{\varepsilon}{3K} K + \varepsilon/3 + K \frac{\varepsilon}{3K} = \varepsilon, \end{aligned}$$

即

$$\lim_n \int_E f_n g \mathrm{d}m = \int_E f g \mathrm{d}m.$$

由 $g \in L^2$ 的任意性，即得 $f_n \xrightarrow{弱} f$.

2. 问在 L^2 中弱收敛于 f 的元列是否测度收敛？

解　不一定测度收敛. 例如：$\{\sin nx\}$ 为 $L^2[0,\pi]$ 中的元列，对任意的 $f \in L^2[0,\pi] \subset L[0,\pi]$，由黎曼-勒贝格引理

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} f(x) \sin nx \mathrm{d}m = 0,$$

即 $\{\sin nx\}$ 弱收敛于 $F(x) = 0$. 但对任意 $n = 1, 2, \cdots$

$$mE\left(|\sin nx - 0| \geqslant \frac{1}{2} \right) \geqslant \frac{\pi}{3},$$

所以 $\{\sin nx\}$ 并非测度收敛于 $F(x)$.

3. 设在 L^2 中 $f_n \xrightarrow{强} f$，又 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} g$，则 $f \sim g$.

证　任给 $\varepsilon > 0$，令

$$E_n(\varepsilon) = E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon),$$

则

$$\int_E |f_n - f|^2 \mathrm{d}m \geqslant \int_{E_n(\varepsilon)} |f_n - f|^2 \mathrm{d}m \geqslant \varepsilon^2 mE_n(\varepsilon).$$

由 $\int_E |f_n - f|^2 \mathrm{d}m \to 0$ 即得

$$mE_n(\varepsilon) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

也即 f_n 测度收敛于 f. 再由里斯定理，存在子列 $\{f_{n_k}\}$，几乎处处收敛于 f. 而 $\{f_{n_k}\}$ 几乎处处收敛于 g，所以 $f \sim g$.

4. 设 $f, f_n \in L^p (p \geqslant 1)$，$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$，又设

$$\int_E |f_n|^p \mathrm{d}m \to \int_E |f|^p \mathrm{d}m,$$

则对任何可测子集 $e \subset E$，有

$$\int_e |f_n|^p \mathrm{d}m \to \int_e |f|^p \mathrm{d}m.$$

证　因为 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$，所以 $|f_n|^p \xrightarrow{\text{a.e.}} |f|^p$，由本书第四章习题 13，即得所要的结论.

5. 设 $f, f_n \in L^p (p \geqslant 1)$，$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$，则在 L^p 中，$f_n \xrightarrow{\text{强}} f$ 的充分必要条件是 $\| f_n \|_p \to \| f \|_p$.

证　必要性：由 $\big| \| f_n \|_p - \| f \|_p \big| \leqslant \| f_n - f \|_p$ 即可得.

充分性：对任意的 $\varepsilon > 0$，因为 $f \in L^p$，即 $|f|^p \in L$，所以存在 K，使

$$\left\{ \int_{|x| \geqslant K} |f(x)|^p \mathrm{d}m \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

设 $E_0 = (-\infty, -K) \cup (K, \infty)$，因为 $\| f_n \|_p \to \| f \|_p$，$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$，由本章第 4 题知

$$\left\{ \int_{E_0} |f_n|^p \mathrm{d}m \right\}^{\frac{1}{p}} \to \left\{ \int_{E_0} |f|^p \mathrm{d}m \right\}^{\frac{1}{p}},$$

于是存在 N_1，当 $n > N_1$ 时，有

$$\left\{ \int_{E_0} |f_n|^p \mathrm{d}m \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}},$$

因此

$$\int_{E_0} |f_n - f|^p \mathrm{d}m \leqslant \left\{ \left[\int_{E_0} |f_n|^p \mathrm{d}m \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{E_0} |f|^p \mathrm{d}m \right]^{\frac{1}{p}} \right\}^p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $\| f_n \|_p \to \| f \|_p$，所以存在 $N_2 \geqslant N_1$，当 $n > N_2$ 时

$$\| f_n \|_p^p < \| f \|_p^p + 1.$$

又 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$，故在 $E_1 = [-K, K]$ 上 f_n 测度收敛于 f，因此，对正数 $\sigma < \frac{\varepsilon}{8K}$，存在 $N > N_2$，使当 $n > N$ 时

$$mE_1(|f_n - f|^p \geqslant \sigma) < \frac{\varepsilon}{4(2\| f \|_p^p + 1)}.$$

于是

$$\int_{E_1}|f_n-f|^p\mathrm{d}m=\int_{E_1(|f_n-f|^p<\sigma)}|f_n-f|^p\mathrm{d}m$$
$$+\int_{E_1(|f_n-f|^p\geqslant\sigma)}|f_n-f|^p\mathrm{d}m$$
$$<\sigma\cdot mE_1+(2\|f\|_p^p+1)mE_1(|f_n-f|^p\geqslant\sigma)$$
$$<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

故当 $n>N$ 时,有

$$\int_E|f_n-f|^p\mathrm{d}m=\int_{E_0}|f_n-f|^p\mathrm{d}m+\int_{E_1}|f_n-f|^p\mathrm{d}m$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即 $\|f_n-f\|_p^p\to 0$,亦即 $f_n\xrightarrow{\text{强}}f$.

6. 设 $F(x)$是 $L^p(p>1)$中某元的不定积分,则渐近式

$$F(x+h)-F(x)=o(h^{1-\frac{1}{p}})\qquad(h\to 0)$$

成立.

证 设

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\qquad f(t)\in L^p,$$

则

$$|F(x+h)-F(x)|\leqslant\int_x^{x+h}|f(t)|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\left|\int_x^{x+h}|f(t)|^p\mathrm{d}t\right|^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left|\int_x^{x+h}\mathrm{d}t\right|^{1-\frac{1}{p}}$$
$$=o(h^{1-\frac{1}{p}})\qquad(h\to 0).$$

7. 设 p,q,r 是满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$ 的三个正数,则对任何可测函数 f,g,h,有

$$\int_E|fgh|\mathrm{d}m\leqslant\|f\|_p\cdot\|g\|_q\cdot\|h\|_r.$$

证 若$\|f\|_p,\|g\|_q,\|h\|_r$中至少有一个为∞,则不等式显然成立.

证法 1 若 $f\in L^p,g\in L^q,h\in L^r$,则

$$g^{\frac{p}{p-1}} \in L^{\frac{p-1}{p}q}, \qquad h^{\frac{p}{p-1}} \in L^{\frac{p-1}{p}r},$$

因为

$$\frac{1}{\frac{p-1}{p}q} + \frac{1}{\frac{p-1}{p}r} = 1,$$

由赫尔得不等式，得

$$g^{\frac{p}{p-1}} h^{\frac{p}{p-1}} \in L^1, \qquad \text{即 } gh \in L^{\frac{p}{p-1}},$$

且有

$$\int_E |gh|^{\frac{p}{p-1}} dm \leqslant \| g^{\frac{p}{p-1}} \|_{\frac{p-1}{p}q} \| h^{\frac{p}{p-1}} \|_{\frac{p-1}{p}r}$$

$$= \left\{\int_E |g|^q dm\right\}^{\frac{p}{(p-1)q}} \left\{\int_E |h|^r dm\right\}^{\frac{p}{(p-1)r}}.$$

又因为 $gh \in L^{\frac{p}{p-1}}$，$f \in L^p$，及 $\frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{p}{p-1}} = 1$，再由赫得不等式，得 $fgh \in L^1$，且

$$\int_E |fgh| dm \leqslant \| f \|_p \| gh \|_{\frac{p}{p-1}}$$

$$\leqslant \| f \|_p \left\{\int_E |g|^q dm\right\}^{1/q} \left\{\int_E |h|^r dm\right\}^{1/r}$$

$$= \| f \|_p \| g \|_q \| h \|_r .$$

证法 2　令 $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$，则 $\frac{1}{p'} + \frac{1}{r} = 1$，且 $\frac{p'}{p} + \frac{p'}{q} = 1$，则

$$\int_E |fgh| dm \leqslant \left\{\int_E |fg|^{p'} dm\right\}^{\frac{1}{p'}} \cdot \left\{\int_E |h|^r dm\right\}^{\frac{1}{r}}.$$

再令 $p_1 = \frac{p}{p'}$，$q_1 = \frac{q}{p'}$，则 $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$，所以

$$\int_E |fg|^{p'} dm \leqslant \left\{\int_E (|f|^{p'})^{p_1} dm\right\}^{\frac{1}{p_1}} \left\{\int_E (|g|^{p'})^{q_1} dm\right\}^{\frac{1}{q_1}}$$

$$= \left\{\int_E |f|^p dm\right)^{\frac{p'}{p}} \cdot \left\{\int_E |g|^q dm\right\}^{\frac{p'}{q}}.$$

代入上式即得所要证的不等式.

8．设 $f \in L^p(E)$，e 为 E 的可测子集，则

$$\left\{\int_E |f|^p dm\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\int_e |f|^p dm\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_{E-e} |f|^p dm\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

证 令

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & x\in e,\\ 0, & x\in E-e,\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}0, & x\in e,\\ f(x), & x\in E-e,\end{cases}$$

则由闵可夫斯基不等式,得

$$\begin{aligned}\left\{\int_E|f|^p\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}&=\left\{\int_E|f_1+f_2|^p\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left\{\int_E|f_1|^p\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\int_E|f_2|^p\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}\\&=\left\{\int_e|f|^p\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\int_{E-e}|f|^p\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

9. 设 $f\in L^p[a,b]$, $p>0$, 试证

$$\lim_{h\to0}\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}=0\quad(0<2\delta\leqslant b-a).$$

证 (i) 先证明,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$,使

$$\left\{\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|^p\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}<\varepsilon.$$

事实上,令

$$E=[a,b],\qquad E_n=E(|f|>n),$$

由积分的绝对连续性,存在 $\delta_1>0$,使当 $e\subset E$, $me<\delta_1$ 时

$$\left\{\int_e|f|^p\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

又因为 $\lim\limits_n mE_n=0$(见第四章习题 2),所以存在 N,使

$$mE_N<\delta_1,$$

于是,有

$$N\cdot mE_N<\left\{\int_{E_N}|f|^p\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

又由鲁津定理,存在闭集 $F\subset E-E_N$,使

$$[m(E-E_N-F)]^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{4N},$$

而 $f(x)$ 在 F 上是连续的,在 $[a,b]$ 上作连续函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in F,\\ \text{函数保持线性}, & x\in E-F,\end{cases}$$

则 $\varphi(x)$即为所求.事实上,$|\varphi(x)|\leqslant N$,而

$$\left\{\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|^p \mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left\{\int_F |f-\varphi|^p \mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\int_{E_N} |f-\varphi|^p \mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left\{\int_{E-E_N-F} |f-\varphi|^p \mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\left\{\int_{E_N} |f|^p \mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left\{\int_{E_N} |\varphi|^p \mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}+2N\cdot|m(E-E_N-F)|^{\frac{1}{p}}$$

$$<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(ii) 证本题的结论.

由已证明的(i),对任意的 $\varepsilon>0$,存在$[a,b]$上的连续函数 $\varphi(x)$,使

$$\left\{\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|^p \mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{3},$$

由于 $\varphi(x)$在$[a,b]$上一致连续,存在 $0<\delta_2<\delta_1$,使对任何 $x',x''\in[a,b]$,当 $|x'-x''|<\delta_2$ 时,有

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{1}{b-a}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p,$$

因此,当$|h|<|\delta_2|$时

$$\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x+h)-f(x)|^p \mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x+h)-\varphi(x+h)|^p \mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta} |\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p \mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta} |\varphi(x)-f(x)|^p \mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{h\to 0}\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x+h)-f(x)|^p \mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}=0.$$

10. 设 $f\in L^p(-\infty,+\infty)$, $g\in L^q(-\infty,+\infty)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $p\geq 1$, 试证

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)g(x)\mathrm{d}x$$

为 t 的连续函数.

证 (i) 先证明

$$\lim_{h\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}=0$$

事实上,任给 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,使当 $|h|<1$ 时,有

$$\left\{\int_{-\infty}^{-N}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left\{\int_{N}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{3},$$

由本章第 9 题,存在 $0<h_0<1$,使当 $|h|<h_0$ 时,有

$$\left\{\int_{-N}^{N}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

从而,当 $|h|<h_0$ 时

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}<\varepsilon,$$

即有

$$\lim_{h\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}m\right\}^{\frac{1}{p}}=0.$$

(ii) 再证 $F(t)$ 的连续性.

对任意的 $t\in(-\infty,+\infty)$,由赫尔得不等式,有

$$\begin{aligned}|F(t+\Delta t)-F(t)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+t+\Delta t)-f(x+t)||g(x)|\mathrm{d}x\\ &\leq \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+t+\Delta t)-f(x+t)|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\|g\|_q\\ &= \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+\Delta t)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\|g\|_q.\end{aligned}$$

根据(i),得

$$\lim_{\Delta t\to 0}|F(t+\Delta t)-F(t)|=0,$$

即 $F(t)$ 为 t 的连续函数.

11. 设积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 对于任何 $g\in L^2$ 都存在且为有限,则 $f\in L^2$.

证法 1 第一步证明:若在 L^2 中 $f_n \xrightarrow{弱} f$,则$\{\|f_n\|_2\}$有界.

(1) 先证,若有一个 $\varphi_0(x)\in L^2$,存在 $M>0$ 及 $r>0$,使对所有 n 及满足 $\|\varphi(x)-\varphi_0(x)\|\leqslant r^2$ 的任一 $\varphi(x)$,总有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M,$$

则$\{\|f_n\|_2\}$有界.

事实上,由于 $h_n(x)=\dfrac{r}{\|f_n\|_2}f_n(x)+\varphi_0(x)(n=1,2,\cdots)$满足

$$\|h_n(x)-\varphi_0(x)\|_2\leqslant r,$$

所以有

$$\begin{aligned}\|f_n\|_2&=\frac{1}{\|f_n\|_2}\left|\int_a^b f_n^2(x)\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\int_a^b\frac{f_n^2(x)}{\|f_n\|_2}\mathrm{d}x+\frac{1}{r}\int_a^b f_n(x)\varphi_0(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{r}\int_a^b f_n(x)\varphi_0(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{1}{r}\left|\int_a^b f_n(x)\left[\frac{r}{\|f_n\|_2}f_n(x)+\varphi_0(x)\right]\mathrm{d}x\right|\\&\quad+\frac{1}{r}\left|\int_a^b f_n(x)\varphi_0(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{1}{r}M+\frac{1}{r}M,\end{aligned}$$

此即说明$\{\|f_n\|_2\}$有界.

(2) 证$\{\|f_n\|_2\}$有界.

反设$\{\|f_n\|_2\}$无界,则由(1)知,对 $\varphi_0(x)\equiv0$, $r=1$ 及 $M=1$,存在 $\varphi_1(x)$及 n_1 满足

$$\|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)\|_2\leqslant1,\quad\left|\int_a^b f_{n_1}(x)\varphi_1(x)\mathrm{d}x\right|>1.$$

容易看出,当 φ 与 φ_1 充分接近时,$\left|\int_a^b f_{n_1}\varphi\mathrm{d}x\right|>1$ 也成立. 事实上,设 $\|\varphi-\varphi_1\|_2=\varepsilon$,则

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_{n_1}\varphi\mathrm{d}x\right|&\geqslant\left|\int_a^b f_{n_1}\varphi_1\mathrm{d}x\right|-\left|\int_a^b f_{n_1}(\varphi-\varphi_1)\mathrm{d}x\right|\\&\geqslant\left|\int_a^b f_{n_1}\varphi_1\mathrm{d}x\right|-\left\{\int_a^b f_{n_1}^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac12}\left\{\int_a^b|\varphi-\varphi_1|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac12}\\&=\left|\int_a^b f_{n_1}\varphi_1\mathrm{d}x\right|-\varepsilon\|f_{n_1}\|_2,\end{aligned}$$

因此,当 ε 充分小时

$$\left|\int_a^b f_{n_1}\varphi \mathrm{d}x\right| > 1.$$

再由(1)知，对 $\varphi_1(x)$，$r_1=\min\left(\frac{1}{2},\varepsilon\right)$，$M=2$，存在 $\varphi_2(x)$ 及 $n_2>n_1$，满足

$$\|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\|_2\leqslant r_1,\quad \left|\int_a^b f_{n_2}(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x\right|>2.$$

连续利用(1)，得到一数列

$$n_1<n_2<n_3<\cdots$$

与 L^2 中的函数列

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x),\cdots$$

及一个以 0 为极限的数列 $\{r_k\}$，其中 $r_k=\min\left(\frac{1}{2^k},\varepsilon\right)$，使得

$$\left|\int_a^b f_{n_k}\varphi_k\mathrm{d}x\right|>k,\qquad \|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)\|_2\leqslant r_k,$$

且当 $\|\varphi-\varphi_k\|_2\leqslant r_k$ 时，也有

$$\left|\int_a^b f_{n_k}\varphi\mathrm{d}x\right|>k.$$

由 L^2 空间的完备性，存在 $\tilde{\varphi}(x)\in L^2$，使

$$\|\tilde{\varphi}-\varphi_k\|_2\leqslant r_k,$$

于是

$$\left|\int_a^b f_{n_k}\tilde{\varphi}\mathrm{d}x\right|>k,\qquad k=1,2,3,\cdots.$$

但从

$$\int_a^b f_n(x)\tilde{\varphi}(x)\mathrm{d}x\to\int_a^b f(x)\tilde{\varphi}(x)\mathrm{d}x$$

知 $\left|\int_a^b f_{n_k}\tilde{\varphi}\mathrm{d}x\right|$ 是有界的，这矛盾说明 $\{\|f_n\|_2\}$ 必有界.

第二步证明：$f\in L^2$.

在题设中，令 $g(x)=1$，则得 $f\in L$，于是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处有限可测，令

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & x\in E(|f|\leqslant n),\\ n, & x\in E(|f|>n),\end{cases}\qquad n=1,2,3,\cdots,$$

则对任意的 $g(x)\in L^2$，有

$$|f_n(x)g(x)|\leqslant|f(x)g(x)|,$$

而 $\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x<\infty$，且 $f_n(x)g(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}f(x)g(x)$. 由勒贝格控制收敛定理，得

$$\int_a^b f_n(x)g(x)\mathrm{d}x \to \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

即 $f_n(x) \xrightarrow{\text{弱}} f(x)$. 由第一步, $\{\|f_n\|_2\}$有界, 设

$$\int_a^b |f_n(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant K, \qquad n = 1,2,3,\cdots,$$

则由法图定理, 得

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to+\infty}\int_a^b |f_n(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant K.$$

证法 2 反设 $f(x)\overline{\in} L^2$, 即 $\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x = +\infty$, 令

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当} |f(x)| \leqslant n \text{ 时}, \\ 0, & \text{当} |f(x)| > n \text{ 时}, \end{cases}$$

则 $f_n \in L^2$.

在题设中, 令 $g(x)=1$ 得 $f\in L$, 从而 $f(x)$在$[a,b]$上几乎处处有限, 于是 $|f_n(x)|^2$几乎处处收敛于$|f(x)|^2$.

又因$\{|f_n(x)|^2\}$为非负单调增序列, 由勒维定理, 得

$$\lim_n\int_a^b |f_n(x)|^2\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x = +\infty.$$

记 $C_n = \int_a^b |f_n(x)|^2\mathrm{d}x$, 则 $C_n \to +\infty$, 故不妨设 $C_n > 0$. 又令 $g_n(x) = \dfrac{|f_n(x)|}{C_n}$, 则 $g_n(x)\geqslant 0$, 且 $g_n(x)\in L^2$.

因为

$$\int_a^b |f(x)|g_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{C_n}\int_a^b |f(x)|\,|f_n(x)|\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{C_n}\int_a^b |f_n(x)|^2\mathrm{d}x = 1,$$
$$\|g_n\|^2 = \int_a^b |g_n(x)|^2\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{C_n^2}\int_a^b |f_n(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{C_n} \to 0,$$

所以必存在单调上升的子列$\{n_k\}$, 满足

$$\|g_{n_k}\| \leqslant \frac{1}{2^k}, \qquad \int_a^b |f(x)|g_{n_k}(x)\mathrm{d}x = 1.$$

令

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{n_k}(x), \qquad h_m(x) = \sum_{k=1}^{m} g_{n_k}(x),$$

由于

$$\| h_{m+p} - h_m \| \leqslant \sum_{i=m+1}^{m+p} \| h_i \| < \frac{1}{2^m},$$

所以 $\{h_m(x)\}$ 是 L^2 中的基本列.

由 L^2 空间的完备性及本章习题 3, $h_m(x)$ 在 L^2 中平均收敛于 $h(x)$, 于是存在 m_0, 使 $\| h - h_{m_0} \| < 1$, 从而

$$\| h \| \leqslant \| h_{m_0} \| + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \| g_{n_k} \| + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} + 1 < +\infty,$$

即

$$h(x) \in L^2.$$

但另一方面, 对任何自然数 m

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)h(x)| \mathrm{d}x &= \int_a^b |f(x)| h(x) \mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_a^b |f(x)| h_m(x) \mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{m} \int_a^b |f(x)| g_k(x) \mathrm{d}x = m \cdot 1 = m.\end{aligned}$$

由 m 的任意性得

$$\int_a^b |f(x)h(x)| \mathrm{d}x = +\infty,$$

即在 L^2 中找到函数 $h(x)$, 使

$$\int_a^b |f(x)h(x)| \mathrm{d}x = +\infty,$$

与题设矛盾. 故有 $f(x) \in L^2$.

证法 3 设 $\{f_n(x)\}$ 为证法 2 中构造的函数列, 则 $f_n(x)$ 有界可测, 且 $|f_n g| \leqslant |f(x)g(x)| \in L$, $\{f_n(x)g(x)\}$ a.e. 收敛于 $f(x)g(x)$, 据勒贝格控制收敛定理知, 对任一 $g(x) \in L^2$ 成立

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)g(x) \mathrm{d}m = \int_a^b f(x)g(x) \mathrm{d}m.$$

令 $F_n(g) = \int_a^b f_n(x)g(x)\mathrm{d}m$, $g(x) \in L^2$, 则 F_n 是 L^2 上的有界线性泛函数, 且 $\| F_n \| = \| f_n \|_2$. 按照共鸣定理, $\| F_n \| \leqslant K \quad (\forall n)$, 故 $\| f_n \|_2 \leqslant K$. $f_n^2(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f^2(x)$. 由法图定理立即得 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}m \leqslant K$, 所以 $f(x) \in L^2[a,b]$.

证法 4 作一个 $L^2[a,b] \to L[a,b]$ 的线性算子 T 如下: $Tg = f \cdot g \ (\forall g \in L^2[a,b])$, 我们证明 T 是闭算子. 设 $g_n(x)$ 在 $L^2[a,b]$ 中收敛于 g, Tg_n 在 $L[a,b]$ 中收敛于 $h(x)$. 因为 $L^2[a,b]$ 中 $\{g_n(x)\}$ 强收敛于 $g(x)$, 则必有 $g(x)$

$\in L^2[a,b]$以及 $g_n(x)\xrightarrow{\text{mes}}g(x)$，同样$\{f(x)g_n(x)\}$在 $L[a,b]$中收敛于 $h(x)$，也有 $f(x)g_n(x)\xrightarrow{\text{mes}}h(x)$，$f(x)\in L[a,b]$，必 a.e. 有限，故 $f(x)g_n(x)\xrightarrow{\text{mes}}f(x)g(x)$，从而 $h(x)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}f\cdot g=Tg$，$T$ 是闭算子得证，由闭图像定理，T 为有界线性算子，则

$$\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}m\leqslant\|T\|\cdot\|g\|.$$

现取 $g(x)=f_n(x)\in L^2[a,b]$，则得 $\int_a^b|f_n(x)|^2\mathrm{d}m\leqslant\|T\|\cdot\|f_n\|$，故 $\|f_n\|\leqslant\|T\|$，再由法图定理立即得

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}m\leqslant\|T\|.$$

12. 试证，当 $1\leqslant r<p$ 时，$L^p\subset L^r$，假定基本集 E 的测度为有限. 若 $mE=\infty$，结论如何？

证 设 $f\in L^p$，令

$$A=E(|f|\geqslant1),\qquad B=E-A,$$

则有

$$\begin{aligned}\int_E|f|^r\mathrm{d}m&=\int_A|f|^r\mathrm{d}m+\int_B|f|^r\mathrm{d}m\\&\leqslant\int_A|f|^p\mathrm{d}m+mB<\infty,\end{aligned}$$

即 $f\in L^r$，于是证得 $L^p\subset L^r$.

当 $mE=+\infty$时，结论不成立. 例如，设 $E=[1,+\infty)$，$f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$，则 $f\in L^4$，但 $f\notin L^2$.

13. 设 $p>1$，$f_n\in L^p$，若在 L^p 中，$f_n\xrightarrow{\text{强}}f$，$f\in L^p$，则当 $1\leqslant r\leqslant p$ 时，在 L^r 中，$f_n\xrightarrow{\text{强}}f$，假定基本集 E 的测度为有限.

证 令 $A_n=E(|f_n-f|\geqslant1)$，$B_n=E(|f_n-f|<1)$，则

$$\begin{aligned}\int_E|f_n-f|^r\mathrm{d}m&=\int_{A_n}|f_n-f|^r\mathrm{d}m+\int_{B_n}|f_n-f|^r\mathrm{d}m\\&\leqslant\int_{A_n}|f_n-f|^p\mathrm{d}m+\int_{B_n}|f_n-f|\mathrm{d}m\\&\leqslant\int_E|f_n-f|^p\mathrm{d}m+\|f_n-f\|_p(mE)^{\frac{1}{q}}\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)\\&=\|f_n-f\|_p^p+\|f_n-f\|_p(mE)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

由 $\|f_n-f\|_p\to0$，得 $\|f_n-f\|_r\to0$.

14. 试证 $L^2(0,1)$中标准直交系的基数不超过$\aleph_0$.

证　因为 L^2 为可分空间,所以存在 L^2 中的稠密子类

$$A = \{g_1, g_2, \cdots\}.$$

设$\{\omega_i\}$为标准直交系,任一 ω_k 必在A 中存在g_k,使得

$$\| \omega_k - g_k \|_2 < \frac{1}{2}, \qquad k = 1,2,\cdots$$

且当 $j \neq k$ 时

$$\| \omega_k - \omega_j \|_2 = \left\{\int_0^1 (\omega_k - \omega_j)^2 \mathrm{d}m \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{\int_0^1 \omega_k^2 \mathrm{d}m + \int_0^1 \omega_j^2 \mathrm{d}m \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2},$$

所以

$$\| g_k - g_j \|_2 = \| g_k - \omega_k + \omega_k - \omega_j + \omega_j - g_j \|_2$$

$$\geqslant \| \omega_k - \omega_j \|_2 - \| g_k - \omega_k \|_2 - \| g_j - \omega_j \|_2 > \sqrt{2} - 1.$$

即不同的 ω_i 对应于A 中不同的g_i,因此 ω_j 至多有可列个.

15. 设三角级数 $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$在任一正测度集 E 上收敛,试证 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0, \lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$.

证　因为 $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$在任一正测度集 E 上收敛,所以

$$\lim_{k\to\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = 0$$

在 E 上成立.令

$$r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

则有 θ_k,满足

$$a_k\cos kx + b_k\sin kx = r_k\cos(kx + \theta_k).$$

若 a_k, b_k 中有一个不收敛于零,即 $r_k \to 0 (k\to\infty)$不成立,则存在子列$\{k_i\}$及正数 σ,满足

$$k_1 < k_2 < \cdots, \qquad r_{k_i} > \sigma,$$

且当 $x \in E$ 时

$$\cos(k_ix + \theta_{k_i}) \to 0 \qquad (i\to\infty).$$

因为$|\cos^2(k_ix + \theta_{k_i})| \leqslant 1$,由有界收敛定理,得

$$\lim_{i\to\infty}\int_E \cos^2(k_ix + \theta_{k_i})\mathrm{d}m$$

$$= \int_E \lim_{i\to\infty} \cos^2(k_i x + \theta_{k_i}) dm = 0.$$

但

$$\int_E \cos^2(kx + \theta_k) dm = \frac{1}{2}\int_E [1 + \cos(2kx + 2\theta_k)] dm$$

$$= \frac{1}{2} mE + \cos 2\theta_k \int_E \cos 2kx dm$$

$$- \sin 2\theta_k \int_E \sin 2kx dm,$$

注意到 $\int_E \cos kx dm$, $\int_E \sin kx dm$ 是E 的特征函数的傅里叶系数，由黎曼-勒贝格引理知

$$\int_E \cos 2kx dm \to 0, \qquad \int_E \sin 2kx dm \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

从而得

$$\lim_{k\to\infty} \int_E \cos^2(kx + \theta_k) dm = \frac{1}{2} mE > 0,$$

得出矛盾. 由此可见，当 $k\to\infty$时，$a_k \to 0$, $b_k \to 0$.

16. 设 $f \in L_{2\pi}$，而 g 有界且有周期 2π，则

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(nx) dm = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dm \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dm.$$

证 设

$$|g(x)| \leqslant M, \qquad \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dm \right| = K.$$

(i) 设 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续，则 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上 **R** 可积，于是

$$\int_{\pi}^{\pi} f(x) g(nx) dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\pi+\frac{2k\pi}{n}}^{-\pi+\frac{2(k+1)\pi}{n}} f(x) g(nx) dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} f\left(t - \pi + \frac{2k+1}{n}\pi\right) g(nt - n\pi + (2k+1)\pi) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\pi-n\pi}^{\pi-n\pi} \frac{1}{n} f\left(\frac{u}{n} + \frac{2k+1}{n}\pi\right) g(u+\pi) du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{u}{n} + \frac{2k+1}{n}\pi\right) g(u+\pi) du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right) g(u+\pi) du$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{u}{n}+\frac{2k+1}{n}\pi\right)-f\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)\right]g(u+\pi)\mathrm{d}u$$
$$=I_1+I_2.$$

因为

$$|f(x)g(nx)|\leqslant M|f(x)|,$$

而 $|f(x)|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，由勒贝格控制收敛定理，得

$$\lim_{n\to\infty}I_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)g(u+\pi)\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{0}^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t\right)g(u+\pi)\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\mathrm{d}x.$$

由 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的一致连续性，任给 $\varepsilon>0$，当 n 充分大时，有

$$\left|f\left(\frac{u}{n}+\frac{2k+1}{n}\pi\right)-f\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)\right|<\varepsilon,$$

对 $[-\pi,\pi]$ 上的任何 u 及任何 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 都成立，从而当 n 充分大时

$$|I_2|\leqslant M\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon\mathrm{d}u=2M\pi\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}I_2=0.$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(nx)\mathrm{d}m$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}m\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\mathrm{d}m.$$

(ii) 设 $f\in L_{2\pi}$，则对任何 $\varepsilon>0$，由文献[1]第四章定理 2.8 知，存在 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数 $h(x)$，使

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-h(x)|\mathrm{d}m<\varepsilon.$$

由(i)知，存在 N，使当 $n>N$ 时，有

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}h(x)g(nx)\mathrm{d}m-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\mathrm{d}m\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\mathrm{d}m\right|<\varepsilon$$

于是当 $n>N$ 时

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(nx)\mathrm{d}m-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}m\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\mathrm{d}m\right|$$
$$\leqslant\left|\int_{\pi}^{\pi}f(x)g(nx)\mathrm{d}m-\int_{-\pi}^{\pi}h(x)g(nx)\mathrm{d}m\right|$$

$$
\begin{aligned}
&+\left|\int_{-\pi}^{\pi} h(x)g(nx)\mathrm{d}m-\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} h(x)\mathrm{d}m\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}m\right| \\
&+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\mathrm{d}m\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}m-\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}m\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}m\right| \\
\leqslant\ & M\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-h(x)|\mathrm{d}m+\varepsilon+\frac{K}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|h(x)-f(x)|\mathrm{d}m \\
<\ & \left(M+\frac{K}{2\pi}+1\right)\varepsilon.
\end{aligned}
$$

此即证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)\mathrm{d}m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}m\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}m.$$

17. 设 $f,f_n\in L(-\infty,+\infty)$，且 $f_n\xrightarrow{\text{强}}f$（在 $L(-\infty,+\infty)$ 中），则在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致地有 $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{f}_n(x)=\hat{f}(x)$，问在 $L^2(-\infty,+\infty)$ 中相应的命题是否成立.

证　因为

$$
\begin{aligned}
|\hat{f}_n(x)-\hat{f}(x)|&=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}[f_n(t)-f(t)]\mathrm{e}^{-ixt}\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(t)-f(t)|\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

由 $f_n\xrightarrow{\text{强}}f$ 知，$\hat{f}_n(x)$ 一致趋于 $\hat{f}(x)$.

在 $L^2(-\infty,+\infty)$ 中，相应的命题不成立. 例如，令

$$f_n(x)=\frac{\sin\frac{x}{n}}{x},\qquad f(x)=0,$$

则

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{n}}{x^2}\mathrm{d}x \\
&=\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{n}\to 0\qquad(n\to\infty).
\end{aligned}
$$

即 $f_n\xrightarrow{\text{强}}f$. 另一方面，对任何 n

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_n(t)&=\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{\sin\frac{x}{n}}{x}\mathrm{e}^{-itx}\mathrm{d}x \\
&=\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega}{n}}^{\frac{\omega}{n}}\frac{\sin u}{u}\mathrm{e}^{-inut}\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega}{n}}^{\frac{\omega}{n}}\frac{\sin u\cos nut}{u}\mathrm{d}u$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{\omega}{n}}^{\frac{\omega}{n}}\frac{\sin(1+nt)u+\sin(1-nt)u}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |nt|<1,\\ 0, & |nt|>1,\\ \dfrac{1}{4}, & |nt|=1,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & |t|<\dfrac{1}{n},\\ 0, & |t|>\dfrac{1}{n},\\ \dfrac{1}{4}, & |t|=\dfrac{1}{n},\end{cases}$$

而

$$\hat{f}(t)=0.$$

可见 $\hat{f}_n(t)\xrightarrow{\text{a.e.}}\hat{f}(t)$，但 $\hat{f}_n(t)$并非一致收敛于 $\hat{f}(t)$.

18. 设 $f\in L(-\infty,+\infty)$，且 $\hat{f}=0$，则 $f\sim 0$.

证法 1 (i)首先证明，当 $f\in L(-\infty,+\infty)$时，对$(-\infty,+\infty)$上几乎所有的 u 有

$$\int_0^h|f(u+x)-f(u)|\mathrm{d}x=o(h)\qquad(h\to 0)$$

成立.这样的点 u 称为$f(x)$的勒贝格点.

设$[a,b]$为任一有限区间，r 为一有理数，则 $f(x)-r$ 在$[a,b]$上可积，由文献[1]第四章引理 6.4，对几乎所有的 $u\in[a,b]$，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h|f(x+u)-r|\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_u^{u+h}|f(x)-r|\mathrm{d}x=|f(u)-r|.\qquad(*)$$

设 $E(r)$是$[a,b]$中不满足$(*)$的点 u 的全体，则 $mE(r)=0$，又设$\{r_n\}$是有理点的全体，令

$$E=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E(r_n)\right)\cup E(|f|=\infty),$$

则 $mE=0$.

设 $u_0\in[a,b]-E$，任取 $\varepsilon>0$，并取有理数 r_n，满足

$$|f(u_0)-r_n|<\frac{\varepsilon}{3},$$

则

$$\big||f(u_0+x)-r_n|-|f(u_0+x)-f(u_0)|\big|<\frac{\varepsilon}{3},$$

因此

$$\left|\frac{1}{h}\int_0^h|f(u_0+x)-r_n|\mathrm{d}x-\frac{1}{h}\int_0^h|f(u_0+x)-f(u_0)|\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $u_0\in E$,所以存在 $\delta(\varepsilon)>0$,当 $|h|<\delta$ 时

$$\left|\frac{1}{h}\int_0^h|f(u_0+x)-r_n|\mathrm{d}x-|f(u_0)-r_n|\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

所以

$$\frac{1}{h}\int_0^h|f(u_0+x)-r_n|\mathrm{d}x<\frac{2}{3}\varepsilon,$$

于是

$$\frac{1}{h}\int_0^h|f(u_0+x)-f(u_0)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h|f(u_0+x)-f(u_0)|\mathrm{d}x=0,$$

所以,$[a,b]$中几乎所有的点都为 $f(x)$的勒贝格点.因$[a,b]$是任一有限区间,可见$(-\infty,\infty)$中几乎所有的点都为 $f(x)$的勒贝格点.

(ii) 再证明,若 $f\in L(-\infty,+\infty)$,u 为 $f(x)$的勒贝格点时,有

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|x|}{R}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\hat{f}(x)\mathrm{d}x=f(u).$$

事实上,对任何 $R>0$,$u\in(-\infty,+\infty)$,令

$$S_R(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|x|}{R}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\hat{f}(x)\mathrm{d}x,$$

将 $\hat{f}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}f(t)\mathrm{d}t$ 代入 $S_R(u)$中,并利用富比尼定理,得

$$\begin{aligned}S_R(u)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|x|}{R}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(u-t)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{1-\cos R(u-t)}{R(u-t)^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u-t)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(u+t)+f(u-t)]\frac{1-\cos Rt}{2Rt^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt=\frac{\pi}{2},$$

所以

$$S_R(u)-f(u)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[f(u+t)+f(u-t)-2f(u)]\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}+\frac{1}{\pi}\int_\delta^{+\infty}=I_1+I_2.$$

令

$$\varphi(t)=|f(u+t)+f(u-t)-2f(u)|,$$
$$\Phi(t)=\int_0^t\varphi(y)dy,$$

则对于给定的 δ，当 $\frac{1}{R}<\delta$ 时

$$|\pi I_1|\leqslant\int_0^{\delta}|f(u+t)+f(u-t)-2f(u)|\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{R}}+\int_{\frac{1}{R}}^{\delta}=I_1'+I_2''.$$

因为 u 是 $f(x)$ 的勒贝格点，所以 $\lim\limits_{t\to0}\frac{\Phi(t)}{t}=0$，对于给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$，当 $0\leqslant t\leqslant\delta$ 时，$\Phi(t)\leqslant\varepsilon t$.

因为 $1-\cos\theta\leqslant\frac{\theta^2}{2}$，所以

$$I_1'\leqslant\frac{R}{2}\int_0^{\frac{1}{R}}\varphi(t)dt=\frac{R}{2}\Phi\left(\frac{1}{R}\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因为 $1-\cos\varepsilon<2$，所以

$$I_2''\leqslant2\int_{\frac{1}{R}}^{\delta}\frac{\varphi(t)}{Rt^2}dt=\frac{2\Phi(\delta)}{R\delta^2}-2R\Phi\left(\frac{1}{R}\right)+4\int_{\frac{1}{R}}^{\delta}\frac{\Phi(t)}{Rt^3}dt$$
$$\leqslant\frac{2\varepsilon}{R\delta}+4\varepsilon\int_{\frac{1}{R}}^{\delta}\frac{dt}{Rt^2}\leqslant2\varepsilon+4\varepsilon=6\varepsilon.$$

因

$$|I_2|\leqslant\frac{2}{\pi R}\int_\delta^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt,$$

而

$$\int_\delta^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt<\infty,$$

故存在 R_0，当 $R>R_0$ 时，$|I_2|<\varepsilon$，于是

$$|S_R(u)-f(u)|<\frac{\varepsilon}{2\pi}+\frac{6\varepsilon}{\pi}+\varepsilon,$$

即证得

$$\lim_{R\to\infty}S_R(u)=f(u).$$

(iii) 最后证 $f\sim 0$. 因为 $\hat{f}=0$，由(ii)，当 u 为 f 的勒贝格点时，有 $f(u)=0$，又由(i)，对 $(-\infty,+\infty)$ 上的几乎所有的 u，$f(u)=0$，即 $f\sim 0$.

证法 2　设 $f\in L(-\infty,+\infty)$，首先证明 $\int_0^{\xi}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi u}-1}{\mathrm{i}u}\hat{f}(u)\mathrm{d}u$. 考察

$$I=\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi u}-1}{\mathrm{i}u}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ut}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi u}-1}{\mathrm{i}u}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ut}\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\left[2\int_0^R\left(\frac{\sin ut}{u}-\frac{\sin(t-\xi)u}{u}\right)\mathrm{d}u\right],$$

利用 $\int_0^R\frac{\sin tu}{u}\mathrm{d}u=\int_0^{tR}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v$，可不妨设 $tR>0$，则

$$\left|\int_0^{tR}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right|\leqslant K,$$

于是 $\left|\int_0^R\frac{\sin(t-\xi)u}{u}\mathrm{d}u\right|\leqslant K$　(对一切 t,ξ)，由勒贝格控制收敛定理

$$\lim_{R\to\infty}I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\cdot\lim_{R\to\infty}2\int_0^R\frac{\sin tu-\sin(t-\xi)u}{u}\mathrm{d}u.$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin tu-\sin(t-\xi)u}{u}\mathrm{d}u=\begin{cases}0, & t<0\text{ 且 }t<\xi,\\ \pi, & 0<t<\xi,\\ 0, & t>\xi,t>0,\\ -\pi, & t<0,t>\xi.\end{cases}$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\cdot 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin tu-\sin(t-\xi)u}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\left[\int_{-\infty}^0+\int_0^{\xi}+\int_{\xi}^{+\infty}\right]\left(f(t)\cdot 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin tu-\sin(t-\xi)u}{u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

$$=2\pi\int_0^{\xi}f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{\xi}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi u}-1}{\mathrm{i}u}\cdot\hat{f}(u)\mathrm{d}u.$$

因为 $\hat{f}(u)=0$，则对任一 ξ，有 $\int_0^{\xi}f(t)\mathrm{d}t=0$，从而 $f(t)\sim 0$.

19. 设 $f\in L^2(-\infty,+\infty)$，令 $f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t$，试证几乎处处成立

$$f_h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(t)\frac{\sin ht}{ht}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t.$$

证 令

$$g(t)=\begin{cases}\frac{1}{2h}, & |t|\leqslant h,\\ 0, & |t|>h,\end{cases}$$

则 $g(t)\in L^2(-\infty,+\infty)$，且

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-h}^{h}\frac{1}{2h}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin ht}{ht},$$

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-h}^{h}\frac{1}{2h}f(x-u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(u)f(x-u)\mathrm{d}u=(g*f)(x).$$

由文献[1]第五章定理 3.6，得

$$f_h(x)=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(u)\hat{f}(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(u)\frac{\sin hu}{hu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xu}\mathrm{d}u.$$

20. 设 $f(x)$是有界连续函数，令

$$L_\sigma(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x+\frac{2t}{\sigma}\right)\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t,$$

证明在任何闭区间$[\alpha,\beta]$上，$L_\sigma(f;x)$一致收敛于 $f(x)$.

证 由文献[1]第五章§3 例 3 知

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t=1.$$

所以

$$L_\sigma(f;x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f\left(x+\frac{2t}{\sigma}\right)-f(x)\right]\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t.$$

设$|f(x)|\leqslant M$，则对任何 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使

$$\int_{|t|>N}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}<\frac{\pi\varepsilon}{4M},$$

于是

$$\frac{1}{\pi}\int_{|t|>N}\left[f\left(x+\frac{2t}{\sigma}\right)-f(x)\right]\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{|t|>N} 2M\frac{\mathrm{d}t}{t^2} < \frac{\pi\varepsilon}{4M}\cdot\frac{2M}{\pi} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

当 $|t|\leqslant N$ 时,因 $f(x)$ 在任何有限区间上都一致连续,所以存在 $\Sigma>0$,使当 $\sigma>\Sigma$ 时,$\frac{2t}{\sigma}$ 充分小,而使

$$\left|f\left(x+\frac{2t}{\sigma}\right)-f(x)\right| < \frac{\pi\varepsilon}{4N}$$

对 $|t|\leqslant N$, $x\in[\alpha,\beta]$ 一致成立. 因此

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}\left[f\left(x+\frac{2t}{\sigma}\right)-f(x)\right]\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}\frac{\pi\varepsilon}{2N}\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}.$$

这样

$$\begin{aligned}|L_\sigma(f;x)-f(x)| \leqslant& \frac{1}{\pi}\left|\int_{-N}^{N}\left[f\left(x+\frac{2t}{\sigma}\right)-f(x)\right]\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t\right| \\ &+\frac{1}{\pi}\left|\int_{|t|>N}\left[f\left(x+\frac{2t}{\sigma}\right)-f(x)\right]\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t\right| \\ <& \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

对 $x\in[\alpha,\beta]$ 一致成立,即 $L_\sigma(f;x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

21. 若 $mE<\infty$, $p>0$, 证明 $L^p(E)\supset L^\infty(E)$ 且 $\|f\|_\infty = \lim\limits_{p\to+\infty}\left(\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$.

本题证明可参阅文献[3]下册 P33.

22. 设 $f(x)\in L^p(-\infty,+\infty)$, $1\leqslant p<\infty$, 而 $g(x)\in L^q(-\infty,+\infty)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

(i) $(f*g)(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续,且有

$$|(f*g)(x)| \leqslant \|f\|_p\|g\|_q,\ x\in(-\infty,\infty);$$

(ii) 若 $1<p<\infty$, 则有 $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(f*g)(x)=0$.

提示 首先证明,$f\in L^p(-\infty,+\infty)(p\geqslant 1)$ 具有平均连续性

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x = 0,$$

再利用赫尔德不等式及平均连续性证得(i).

23. 设周期为 2π 的函数族 $\{g_n(x)\}$ 满足

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} g_n(x)\mathrm{d}x = 2\pi$;

(ii) 存在 $M>0$,使对一切 n,有$\int_{-\pi}^{\pi}|g_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant M$;

(iii) 对任何 $0<\delta<\pi$,有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi}|g_n(x)|\mathrm{d}x=0$.

对于周期为 2π 的函数 f,令

$$I_n(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)g_n(u)\mathrm{d}u,$$

则对每个以 2π 为周期且在$[-\pi,\pi]$上可积的函数 $S(x)$,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[I_n(f;x)-f(x)]S(x)\mathrm{d}x=0.$$

提示 利用富比尼定理,得

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\pi}^{\pi}[I_n(f;x)-f(x)]S(x)\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant&\frac{1}{2\pi}\int_{|u|\leqslant\delta}|g_n(u)|\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[S(x+u)-S(x)]\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}u\\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|u|\leqslant\pi}|g_n(u)|\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[S(x+u)-S(x)]\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

对于不等式右边的第一项,利用 $S(x)$的平均连续性知其可以小于任意小,对于其第二项,根据 $g_n(x)$满足的性质(iii)知其可以小于任意小.

第六章　距离空间

一、基本概念和主要定理

距离和距离空间　设 X 是任一非空集合，$\rho(x,y)$ 是 $X\times X\to\mathbf{R}$ 的函数，如果满足

(i) 非负性：$\rho(x,y)\geqslant 0$；$\rho(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$；

(ii) 对称性：$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(iii) 三点不等式：$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z)$

则称 $\rho(x,y)$ 为 x 和 y 之间的距离．(X,ρ) 为以 ρ 为距离的距离空间．

完备性　设 $\{x_n\}\subset(X,\rho)$，如果对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 N，使得当 $n,m>N$ 时有 $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$，则称 $\{x_n\}$ 为 (X,ρ) 中的基本序列（柯西序列）；如果距离空间 (X,ρ) 中任一基本序列均收敛于 X 中一点，则称 (X,ρ) 为**完备距离空间**．

可分性　若 (X,ρ) 中存在可列稠密子集，则称 (X,ρ) 为可分距离空间；设 $A\subset(X,\rho)$，若 A 中存在可列稠密子集，则称 A 可分．

列紧集　设无穷集 $A\subset(X,\rho)$，如果 A 的任一无穷点列必含有一个收敛点列，则称为列紧集；一个列紧闭集称作自列紧集．

全有界　设 $A,B\subset(X,\rho)$，给定 $\varepsilon>0$，若 $\bigcup\limits_{x\in B}S(x,\varepsilon)\supset A$，则称 B 是 A 的一个 ε-网（这里 $S(x,\varepsilon)=\{y\in X:\rho(y,x)<\varepsilon\}$）；如果对任意的 $\varepsilon>0$，A 总存在有穷的 ε-网 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则称集合 A 全有界．

紧集　设 $A\subset(X,\rho)$，如果从 A 的任一开覆盖 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 中可取出有穷多个开集覆盖 A，则称 A 为紧集；若 (X,ρ) 本身是紧的，则称 (X,ρ) 为紧空间．$A\subset(X,\rho)$ 为紧集的充要条件是 A 为自列紧集．

设 $A,B\subset(X,\rho)$，数

$$\rho(x,A)=\inf_{y\in A}\rho(x,y)$$

叫做点 x 到集 A 的距离；数

$$\rho(A,B)=\inf_{x\in A,y\in B}\rho(x,y)$$

叫做集 A 与 B 间的距离；数

$$\rho_H(A,B)=\sup_{x\in A,y\in B}\{\rho(x,B),\rho(y,A)\}$$

叫做集 A 与 B 之间的豪斯多夫距离．

同胚映射和等距映射　如果映射 T 是 $(X,\rho)\to(X_1,\rho_1)$ 上的一对一映射，且

映射 T 以及逆映射 T^{-1} 都连续，则称 T 为 X 到 X_1 上的同胚映射，称 (X,ρ) 与 (X_1,ρ_1) 同胚；如果存在 (X,ρ) 到 (X_1,ρ_1) 上的映射 T，使对一切 $x,y\in X$，有

$$\rho_1(Tx,Ty)=\rho(x,y),$$

则称 T 为 X 到 X_1 上的等距映射，称 X 和 X_1 等距.

定理 1（完备化定理） 对任一距离空间 (X,ρ)，都存在完备化空间，而且任何两个完备化空间都等距. 即存在一个完备距离空间 X_0，使 X 等距于 X_0 的一个稠密子空间 X_0'，且除去"等距不计外"，X_0 是惟一的.

定理 2 设 (X,ρ) 完备，$A\subset(X,\rho)$，则 A 列紧等价于 A 全有界，也等价于对任给的 $\varepsilon>0$，A 存在列紧的 ε-网.

定理 3（阿尔采拉(Arzela)-阿斯科利(Ascoli)） 集合 $A\subset C[a,b]$ 列紧的充要条件是下列两条件成立：

(i) 集合 A 一致有界，即存在常数 K，使对一切 $x(t)\in A$，有 $|x(t)|\leqslant K\ \forall t\in[a,b]$；

(ii) 集合是等度连续的，即对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对任何 $x(t)\in A$ 以及任意的 $t_1,t_2\in[a,b]$，只要 $|t_1-t_2|<\delta$，就有

$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon.$$

设 T 为 $(X,\rho)\to(X,\rho)$ 的映射，如果存在 $0<\theta<1$，使得对一切 $x,y\in X$，有

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant\theta\rho(x,y)$$

则称 T 为 X 上的压缩映射.

定理 4（压缩映射原理） 完备距离空间 (X,ρ) 中的压缩映射 T 有惟一的不动点，且对任何 $x_0\in X$，序列 $x_n=Tx_{n-1}(n=1,2,\cdots)$ 收敛于 T 的不动点.

二、习题、练习题与解法

1. 设 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维矢量组成的集，在 $\mathbf{R}^n$ 中定义距离如下

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k-\eta_k|,$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，则 $\mathbf{R}^n$ 按距离 ρ_1 是距离空间.

解 ρ_1 显然满足距离公理三个条件，故 $\mathbf{R}^n$ 按 ρ_1 是距离空间.

2. 证明：

(i) 距离空间中的闭集必为可列个开集的交.

(ii) 距离空间中的开集必为可列个闭集的并.

证 (i) 设 F 为距离空间 (X,ρ) 中任一闭集，我们令

$$G_n=\left\{x\in X:\rho(x,F)<\frac{1}{n}\right\},$$

则容易证明每个 G_n 为开集，且

$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n.$$

(ii) 对于 X 中任一开集 G，令 $F=\mathscr{C}G$，则由(i)可知存在开集 G_n，使 $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，从而

$$G=\mathscr{C}F=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}G_n,$$

其中 $\mathscr{C}G_n$ 为 X 的闭集.

3. 设 X 为距离空间，$A\subset X$，证明 A 的一切内点组成的集必为开集.

证 设 $B=\{x\in A: x$ 为 A 的内点$\}$，任取 $x\in B$，因为 x 是 A 的内点，故必存在 $\delta>0$，使开球 $S(x,\delta)\subset A$，现证明 $S(x,\delta)\subset B$. 事实上对于 $S(x,\delta)$ 中任一点 y，令

$$\delta_1=\delta-\rho(x,y)>0,$$

则

$$S(y,\delta_1)\subset S(x,\delta)\subset A,$$

故 y 是 A 的内点，也就是说 $S(x,\delta)\subset B$，从而 B 为开集.

4. 设 X 是可分的距离空间，$\{G_\alpha\}(\alpha\in J)$ 为 X 的一个覆盖，则从 $\{G_\alpha\}$ 中可取出可列个集组成 X 的一个覆盖.

本题可参阅文献[2]定理 2.4(p38～p39)必要性的证明.

5. 设 X 为距离空间，$A\subset X$，令

$$f(x)=\inf_{y\in A}\rho(x,y)\qquad(x\in X),$$

求证 $f(x)$ 是连续函数.

证 任取 $x,x_0\in X$，则由

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x_0)+\rho(x_0,y)$$

可得

$$\inf_{y\in A}\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x_0)+\inf_{y\in A}\rho(x_0,y)\tag{1}$$

同理可得

$$\inf_{y\in A}\rho(x_0,y)\leqslant\rho(x,x_0)+\inf_{y\in A}\rho(x,y)\tag{2}$$

由(1)，(2)立即得

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\rho(x,x_0),$$

故 $f(x)$ 为连续函数.

6. 设 X 为距离空间，F_1,F_2 为 X 中的两个不相交的闭集，则存在定义在 X 上的连续函数 $f(x)$，使当 $x\in F_1$ 时，$f(x)=0$，当 $x\in F_2$ 时，$f(x)=1$.

证 我们记 $\rho(x,A)=\inf\limits_{y\in A}\rho(x,y)$，并且令

$$f(x)=\frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)},$$

则据本章第 5 题知 $f(x)$是 X 上的连续函数,且

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in F_1,\\ 1, & x\in F_2.\end{cases}$$

7. 设 X 为距离空间,F_1,F_2 为 X 中不相交的闭集,证明存在开集 G_1,G_2,使得 $G_1\cap G_2=\varnothing$;$G_1\supset F_1$,$G_2\supset F_2$.

证法 1 利用第 6 题,令

$$f(x)=\frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)},$$

则 $f(x)$连续,$0\leqslant f(x)\leqslant 1$,且

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in F_1,\\ 1, & x\in F_2.\end{cases}$$

再令

$$G_1=\left\{x\in X:f(x)<\frac{1}{2}\right\},$$

$$G_2=\left\{x\in X:f(x)>\frac{1}{2}\right\},$$

则据文献[2]定理 1.5(P15)知 G_1,G_2 均为开集,且显然有 $G_1\cap G_2=\varnothing$;$G_1\supset F_1$,$G_2\supset F_2$.

证法 2 任取 $x\in F_1$,则 $d(x)=\rho(x,F_2)>0$,作开球 $S\left(x,\frac{1}{2}d(x)\right)$,令

$$G_1=\bigcup_{x\in F_1}S\left(x,\frac{1}{2}d(x)\right),$$

同理 $y\in F_2$,有 $d(y)=\rho(y,F_1)>0$,令

$$G_2=\bigcup_{y\in F_2}S\left(y,\frac{1}{2}d(y)\right),$$

则 G_1,G_2 均为开集,且 $G_1\supset F_1$,$G_2\supset F_2$. 我们证明 $G_1\cap G_2=\varnothing$. 设不然,存在一点 $a\in G_1\cap G_2$,则必存在 $x_0\in F_1$,$y_0\in F_2$,使

$$a\in S\left(x_0,\frac{1}{2}d(x_0)\right)\cap S\left(y_0,\frac{1}{2}d(y_0)\right).$$

不妨设 $d(x_0)\geqslant d(y_0)$,则

$$\begin{aligned}d(x_0)&=\rho(x_0,F_2)\leqslant\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_0,a)+\rho(a,y_0)\\&<\frac{1}{2}d(x_0)+\frac{1}{2}d(y_0)\leqslant d(x_0),\end{aligned}$$

矛盾,故 $G_1\cap G_2=\varnothing$.

8. 设 $f(X)$是由距离空间 X 到距离空间 X_1 中的连续映射,A 在 X 中稠密,证明 $f(A)$在 $f(X)$中稠密.

证 任取 $z\in f(X)$，则存在 $x\in X$，使 $z=f(x)$，因为 $\overline{A}=X$，故存在 $x_n\in A$，使 $x_n\xrightarrow{X}x$，再据 $f(x)$ 的连续性得，$f(x_n)\xrightarrow{X_1}f(x)$，所以 $\overline{f(A)}=f(X)$.

9. 求证 l^p 是一个完备的、可分的距离空间. 其中

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|^p\right)^{1/p}\qquad (p\geqslant 1).$$

证 $\rho(x,y)$ 是一个距离显然.

(i) 完备性:

设 $\{x_n\}\subset l^p$ 为基本列，其中 $x_n=(\xi_i^{(n)})$，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n,m\geqslant N$ 时，有

$$\rho(x_n,x_m)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|^p\right)^{1/p}<\varepsilon,\tag{1}$$

则当 $n,m\geqslant N$ 时，有

$$|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|<\varepsilon\qquad (i=1,2,3,\cdots).\tag{2}$$

故对每个 i，$\xi_i^{(n)}$ 收敛. 现设 $\xi_i=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}$，$x=(\xi_i)$，下面证明 $x\in l^p$，且 $x_n\xrightarrow{l^p}x$.

首先由(1)知对任意的自然数 k 都有

$$\sum_{i=1}^{k}|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|^p<\varepsilon^p\qquad (n,m\geqslant N),$$

固定 $n\geqslant N$，让 $m\to\infty$，得

$$\sum_{i=1}^{k}|\xi_i^{(n)}-\xi_i|^p\leqslant\varepsilon^p\qquad (n\geqslant N),$$

再令 $k\to\infty$，得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}-\xi_i|^p\leqslant\varepsilon^p\qquad (n\geqslant N),$$

故 $x\in l^p$，$x_n\xrightarrow{l^p}x$，完备性得证.

(ii) 可分性:

令 $E_0=\{x:x=(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,0,\cdots)$，其中 n 为任一自然数，r_i 均为有理数$\}$（这儿不妨设 l^p 为实空间），则 E_0 为 l^p 的一个可数子集. 下面证明 E_0 在 l^p 中稠密.

任取 $x\in l^p$，$\varepsilon>0$，首先存在 n，使

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2},$$

对于 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 必存在 $r_1,r_2,\cdots,r_n$，使

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-r_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2},$$

故存在点 $x_0=(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,0,\cdots)\in E_0$，使

$$\rho(x,x_0)<\varepsilon,$$

l^p 可分得证.

10. 证明多项式全体在 $C^k[a,b]$ 中稠密，其中 $C^k[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上 k 次连续可微函数的全体，距离定义为

$$\rho(x,y)=\sum_{j=0}^{k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(j)}(t)-y^{(j)}(t)|.$$

证 任取 $x(t)\in C^k[a,b]$，$\varepsilon>0$，因为 $x^{(k)}(t)\in C[a,b]$，则存在多项式 $P(t)$，使

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(k)}(t)-P(t)|<\frac{\varepsilon}{(k+1)A^k},$$

其中 $A=\max\{1,b-a\}$，我们令

$$P_1(t)=\int_a^t P(u)\mathrm{d}u+x^{(k-1)}(a),$$

一般地

$$P_j(t)=\int_a^t P_{j-1}(u)\mathrm{d}u+x^{(k-j)}(a)\quad (j=1,2,\cdots,k,P_0(t)=P(t)).$$

显然有

$$x^{(j-1)}(t)=\int_a^t x^{(j)}(u)\mathrm{d}u+x^{(j-1)}(a)\qquad (j=1,2,\cdots,k),$$

$$P_k^{(j)}(t)=P_{k-j}(t)\qquad (j=1,2,\cdots,k),$$

则 $P_k(t)$ 是一个多项式，且满足

$$\rho(P_k(t),x(t))<\varepsilon,$$

从而多项式全体在 $C^k[a,b]$ 中稠密.

注 本题还可用其他方法证明.

11. 设 X 为距离空间，$A\subset X$，如果 A 按照 X 的距离是完备的距离空间，证明 A 是闭集.

证 任取 $x\in\bar{A}$，则存在 $x_n\in A$，使 $x_n\to x$. 由于收敛点列 $\{x_n\}$ 必是 A 中基本列，A 是完备距离空间，则 $\{x_n\}$ 必在 A 中收敛，但极限元是惟一的，故 $x\in A$，A 是闭集.

12. 证明基本列是有界的.

本题证明留给读者.

13. 设 X 是完备的距离空间，$\{F_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ 为 X 中一列闭集

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$$

并且 $F_n\neq\varnothing$，$\lim\limits_{n\to\infty}d(F_n)=0$ （$d(F_n)$ 表示 F_n 的直径，即 F_n 中任两点的距离的上

确界),则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$.

证 不妨设 $F_1 \supsetneqq F_2 \supsetneqq F_3 \supsetneqq \cdots$,则可取 $x_n \in F_n - F_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$,得 X 中一点列 $\{x_n\}$,因为当 $n>m$ 时,有 $x_n, x_m \in F_m$,所以 $n>m$ 时

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant d(F_m),$$

据条件 $d(F_m) \to 0$,立即知 $\{x_n\}$ 是 X 中基本列,由于 X 是完备的,则存在 $x \in X$,使 $x_n \to x$. 下面证明 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. 事实上对任一自然数 m,当 $n>m$ 时,$x_n \in F_m$,F_m 为闭集,故 $x \in F_m$,从而 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

14. 举例说明全有界集不一定是列紧的.

解 取 $X=(0,1)$,X 中距离 $\rho(x,y)=|x-y|$,则 $A=\left(0,\frac{1}{2}\right) \subset X$ 必全有界,但非列紧.

15. 设 $\{F_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 是紧空间中的一列闭集

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$$

并且 $F_n \neq \varnothing$,则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$.

证 设 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing$,则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}F_n = X$,$\{G_n\} = \{\mathscr{C}F_n\}$ 是 X 的一个覆盖,由 X 的紧性知存在 N,使

$$\bigcup_{i=1}^{N} G_i = X.$$

又因为 $G_n \subset G_{n+1}$,所以 $G_N = X$,这就推出 $F_N = \varnothing$,矛盾,故 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$.

注 亦可取 $x_n \in F_n - F_{n+1}$,然后证明 $\{x_n\}$ 的一个聚点属于 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

16. 证明紧集的闭子集也是紧的.

证法 1 设 A 为紧集,$B \subset A$ 为闭集,因为 A 是紧集 $\Leftrightarrow$ A 自列紧,从而 B 是列紧闭集,故 B 为自列紧的,即 B 为紧集.

证法 2 设 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为 B 的任一开覆盖,$X-B$ 是开集,则 $\{G_\alpha\} \cup \{X-B\}$ 为 A 的一个开覆盖,A 紧,则从这一开覆盖中可取出有穷个开集覆盖 A,不妨设 $\left(\bigcup_{\alpha=1}^{n} G_\alpha\right) \cup (X-B) \supset A$,于是 $\bigcup_{\alpha=1}^{n} G_\alpha \supset B$,故 B 为紧集.

17. 证明如果 F_1, F_2 是距离空间 X 中的紧集,则必存在 $x_0 \in F_1$,$y_0 \in F_2$,使

$$\rho(F_1, F_2) = \rho(x_0, y_0).$$

其中 $\rho(F_1,F_2) = \inf\limits_{\substack{x \in F_1 \\ y \in F_2}} \rho(x,y)$.

证 据 inf 的定义,必存在 $x_n \in F_1$,$y_n \in F_2$,使

$$\rho(F_1,F_2)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n),$$

因为 F_1,F_2 为 X 中紧集,必存在子序列 $\{n_k\}$ 使 $x_{n_k}\to x_0\in F_1$, $y_{n_k}\to y_0\in F_2$,再据 $\rho(x,y)$ 的连续性,即得

$$\rho(F_1,F_2)=\rho(x_0,y_0).$$

18. 证明定义在紧空间上的连续函数必是有界的,而且达到它的上、下确界.

证 设 X 为紧空间,$f(x)$ 为定义在 X 上的连续函数,我们证明 $f(X)$ 是紧集.因为 X 为紧空间,必自列紧,任取 $y_n=f(x_n)\in f(X)$,存在 $x_{n_k}\to x_0\in X$,利用 $f(x)$ 的连续性可得

$$y_{n_k}\xrightarrow{k\to\infty}f(x_0)\in f(X),$$

故 $f(X)$ 为自列紧的,即 $f(X)$ 为紧集,从而 $f(X)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中有界集.

现设 $M=\sup\limits_{x\in X}f(x)$, $m=\inf\limits_{x\in X}f(x)$,则存在 $x_n\in X$, $y_n\in X$,使

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=M,\qquad \lim_{n\to\infty}f(y_n)=m.$$

利用 X 的紧性,存在

$$x_{n_k}\to x_0\in X,\qquad y_{n_k}\to y_0\in X,$$

易知 $M=f(x_0)$, $m=f(y_0)$.

19. 证明定义在紧空间上的连续函数必是一致连续的(一致连续的定义与数学分析中的相同).

证 设 X 为紧空间,$f(x)$ 定义在 X 上连续,任取 $\varepsilon>0$,对每一个 $x\in X$,存在 $\delta_x>0$,使得当 $y\in S(x,\delta_x)$ 时有

$$|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$\bigcup\limits_{x\in X}S\left(x,\dfrac{\delta_x}{2}\right)=X$,因为 X 紧,必存在有限个点 $x_1,x_2,\cdots,x_{n_0}$,使

$$\bigcup_{i=1}^{n_0}S\left(x_i,\frac{\delta_{x_i}}{2}\right)=X.$$

现取 $\delta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n_0}\dfrac{\delta_{x_i}}{2}$,则当 $\rho(x',x'')<\delta$ 时 $\left[\text{不妨设 } x''\in\left[x_{i_0},\dfrac{\delta_{x_{i_0}}}{2}\right]\right]$,有

$$\rho(x',x_{i_0})\leqslant\rho(x',x'')+\rho(x'',x_{i_0})<\delta_{x_{i_0}},$$

故

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant|f(x')-f(x_{i_0})|+|f(x_{i_0})-f(x'')|<\varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 是一致连续的.

20. 证明 l^p 中的子集 A 列紧的充要条件是

(i) 存在 $K>0$,使得对一切 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in A$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<K.$$

(ii) 对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,使得当 $m>N$ 时,对一切 $x\in A$ 有

$$\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n|^p<\varepsilon.$$

证法 1 必要性:设 A 列紧,则 A 全有界,条件(i)显然成立.下证条件(ii).任给 $\varepsilon>0$,因为 A 全有界,必存在有穷的 $\frac{1}{2}\varepsilon^{1/p}$-网 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{n_0}\}$,对于 $x_1,x_2,\cdots,x_{n_0}$,存在 N,使得当 $m>N$ 时有

$$\left\{\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n^{(i)}|^p\right\}^{1/p}<\frac{1}{2}\varepsilon^{1/p}\qquad(\text{对于 } i=1,2,\cdots,n_0 \text{ 一致成立}).$$

现任取 $x\in A$,首先存在 x_i $(1\leqslant i\leqslant n_0)$使

$$\rho(x,x_i)=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\xi_n^{(i)}|^p\right\}^{1/p}<\frac{1}{2}\varepsilon^{1/p}.$$

则

$$\left\{\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n|^p\right\}^{1/p}\leqslant\left\{\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n-\xi_n^{(i)}|^p\right\}^{1/p}+\left\{\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n^{(i)}|^p\right\}^{1/p}<\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}}=\varepsilon^{1/p},$$

故条件(ii)成立.

充分性:因为 l^p 完备,据文献[2]定理 2.1 推论(P30),只需证明对任给的 $\varepsilon>0$,A 存在列紧的 ε-网.

任给 $\varepsilon>0$,由条件(ii),存在 N,当 $m>N$ 时有

$$\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n|^p<\varepsilon^p\qquad(\text{对一切 } x=(\xi_n)\in A \text{ 成立}).$$

我们令

$$B=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N,\cdots)\mid(\xi_n)\in A\},$$

则 B 是 A 的一个 ε-网.现证 B 列紧,事实上,据条件(i)对一切$(\xi_n)\in A$ 成立

$$|\xi_n|<K^{1/p}\qquad(\forall n),$$

故对一切$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N,0,\cdots,0)\in B$ 也有

$$|\xi_n|\leqslant K^{1/p}\qquad(n=1,2,\cdots,N),$$

则存在 $\xi_n^{(i)}\xrightarrow[i\to\infty]{}\xi_n^{(0)}(n=1,2,\cdots,N)$.记

$$x_i=(\xi_1^{(i)},\xi_2^{(i)},\cdots,\xi_N^{(i)},0,\cdots),$$

$$x_0=(\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},\cdots,\xi_N^{(0)},0,\cdots),$$

则 $x_0\in l^p$，且 $\rho(x_i,x_0)\to 0(i\to\infty)$，从而 B 是列紧的.

证法 2 必要性：只要证明条件(ii)成立，用反证法. 设存在 $\varepsilon_0>0$，对一切自然数 m，存在 $x_m\in A$ 使

$$\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n^{(m)}|^p\geqslant\varepsilon_0 \tag{1}$$

因为 A 列紧，必可从 $\{x_m\}$ 中取出一收敛子序列，不妨设 $x_m\xrightarrow[m\to\infty]{}x\in l^p$，记 $x=(\xi_n)$，则存在 N，当 $m>N$ 时有

$$\left\{\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n|^p\right\}^{1/p}<\frac{1}{2}\varepsilon_0^{1/p}$$

以及

$$\left\{\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n^{(m)}-\xi_n|^p\right\}^{1/p}<\frac{1}{2}\varepsilon_0^{1/p}.$$

故当 $m>N$ 时有

$$\left\{\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n^{(m)}|^p\right\}^{1/p}<\varepsilon_0^{1/p}.$$

这与(1)式矛盾，因此条件(ii)成立.

充分性：任取 A 中一无穷点列$(\xi_n^{(k)})$，直接证明存在收敛子序列. 首先据条件(i)得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n^{(k)}|^p<K \qquad (\forall k\ 成立) \tag{2}$$

据条件(ii)知，$\forall\varepsilon>0$，存在 N，当 $m>N$ 时对一切 k 成立

$$\sum_{n=m}^{\infty}|\xi_n^{(k)}|^p<\varepsilon \tag{3}$$

由(2)知对每一个 n，$\xi_n^{(k)}$ 关于 k 是一个有界数列，故可按对角线手续取出一子序列 $\{n_k\}$，使

$$\xi_n^{(n_k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}\xi_n \qquad (\forall n).$$

令 $x=(\xi_n)$，$x_{n_k}=(\xi_n^{(n_k)})$，我们证明 $x\in l^p$，且 $x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{l^p}x$. 事实上，由(2)对一切 N 成立 $\sum\limits_{n=1}^{N}|\xi_n^{(n_k)}|^p\leqslant K$，令 $k\to\infty$，使得 $\sum\limits_{n=1}^{N}|\xi_n|^p\leqslant K$，故 $x\in l^p$. 又因为

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n^{(n_k)}-\xi_n|^p&=\sum_{n=1}^{N}|\xi_n^{(n_k)}-\xi_n|^p+\sum_{n=N+1}^{\infty}|\xi_n^{(n_k)}-\xi_n|^p\\&\leqslant\sum_{n=1}^{N}|\xi_n^{(n_k)}-\xi_n|^p+2^p\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}|\xi_n^{(n_k)}|^p+\sum_{n=N+1}^{\infty}|\xi_n|^p\right),\end{aligned}$$

立即可得 $x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{l^p}x$.

21. 证明 s 空间中的子集 A 列紧的充要条件是对每个 n $(n=1,2,3,\cdots)$，存在 $C_n>0$，使得对一切 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in A$，有

$$|\xi_n|\leqslant C_n \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

证 必要性：

证法 1 用反证法，设 A 列紧，但存在 n_0，使对一切自然数 k 有 $x_k=(\xi_n^{(k)})\in A$，使

$$|\xi_{n_0}^{(n_k)}|\geqslant k.$$

因为 A 列紧，不妨设 $x_k\xrightarrow{s}x$，据文献[2]P20 例 11 知

$$x_k\xrightarrow{s}x\Leftrightarrow \xi_n^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}\xi_n \qquad (\forall n),$$

收敛数列必有界，所以存在 $K>0$，使 $|\xi_{n_0}^{(k)}|<K$ $(\forall k)$，矛盾. 故对一切 $x\in A$，有

$$|\xi_n|\leqslant C_n \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

证法 2 定义映射 $\varphi_n: s\to\mathbf{R}^1$ 如下，$x=(\xi_n)\in S$，令 $\varphi_n(x)=\xi_n$，显然 φ_n 是连续的，故 $\varphi_n(A)$列紧，$\varphi_n(A)$必为 $\mathbf{R}^1$ 中有界集，即对每个 n，存在 $C_n>0$，使

$$|\xi_n|\leqslant C_n \qquad (\text{对一切}(\xi_n)\in A\text{ 成立}).$$

充分性：

证法 1 设条件成立，任取 $\{x_k\}\subset A$，其中 $x_k=(\xi_n^{(k)})$，因为 $|\xi_n^{(k)}|\leqslant C_n(\forall k)$，则按对角线手续，取出子序列 $\{n_k\}$，使

$$\lim_{k\to\infty}\xi_n^{(n_k)}=\xi_n \qquad (\forall n),$$

故 A 列紧.

证法 2 因为 s 完备，故只需证明 A 存在列紧 ε-网(对一切 $\varepsilon>0$). 任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $m>N$ 时，有

$$\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

令

$$B=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N,0,\cdots)\mid(\xi_n)\in A\},$$

显然，B 是 A 的 ε-网，又因为 B 中之点只有前面 N 个坐标不为零，且

$$|\xi_n|\leqslant C_n \qquad (n=1,2,\cdots,N),$$

则容易证明 B 是列紧集.

22. 证明列紧集的闭包必是自列紧集.

证 设 A 列紧，任取 $\{x_n\}\subset\bar{A}$，对每个 n，由于 $x_n\in\bar{A}$，必存在 $y_n\in A$，使 $\rho(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$. 因为 A 列紧，对于 $\{y_n\}\subset A$，可取出子序列 $y_{n_k}\to y\in A$，易证

$x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} y$，故 $\bar{A}$ 自列紧.

23. 在数轴上添加无穷远点 $-\infty$，$+\infty$，得到的集记为 R'，试在 R' 中适当地定义距离，使 R' 与区间 $[0,1]$ 同胚（$[0,1]$ 的距离与 $\mathbf{R}^1$ 同）.

解 $[0,1]$ 中，$\rho(x,y)=|x-y|$，在 R' 中我们令

$$\rho_1(x,y)=\frac{1}{\pi}|\arctan x-\arctan y|,$$

规定 $\arctan(\pm\infty)=\pm\frac{\pi}{2}$，易知 ρ_1 是一个距离，作 $[0,1]\to R'$ 的映射 $g(x)$ 如下

$$g(x)=\begin{cases}\tan\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right), & \text{当 } x\in(0,1)\text{ 时},\\ -\infty, & x=0\text{ 时},\\ +\infty, & x=1\text{ 时},\end{cases}$$

则显然有

$$\rho_1(g(x),g(y))=\rho(x,y),$$

故 g 是 $[0,1]\to R'$ 上的等距映射，从而 $[0,1]$ 与 R' 同胚.

24. 在数轴上添加一个无穷远点 ∞，得到的集记为 R''，试在 R'' 中适当定义距离，使 R'' 平面与 $\mathbf{R}^2$ 上的单位圆周同胚（单位圆周的距离与 $\mathbf{R}^2$ 同）.

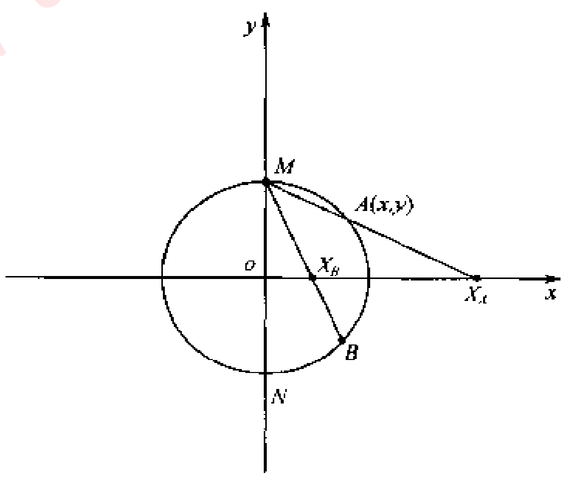
解 如图所示，作映射 T

$$C_1(\text{单位圆周})\to R'',\ M\leftrightarrow\infty,\ N\leftrightarrow 0$$

$$A(x,y)\leftrightarrow X_A=\frac{x}{1-y}\qquad(y\neq 1\text{ 时}),$$

即

$$T(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-y} & (y\neq 1\text{ 时}),\\ \infty & (y=1\text{ 时}),\end{cases}$$



且

$$T^{-1}: y = \frac{X^2 - 1}{1 + X^2},$$

$$x = \begin{cases} \sqrt{1 - y^2} & (X \geqslant 0), \\ -\sqrt{1 - y^2} & (X < 0). \end{cases}$$

我们用 $\rho(A,B)$ 表示 C_1 中的距离，并且令

$$\rho_1(X_A, X_B) = \rho(T^{-1}X_A, T^{-1}X_B) = \rho(A,B),$$

其中 $X_A, X_B \in R^n$，易知 T 是 $C_1 \to R^n$ 上的等距映射，故 C_1 与 R^n 同胚.

25. 设 $f(t) \in C[0,1]$，求出方程

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^t x(s) \mathrm{d}s \qquad (t \in [0,1])$$

的连续解.

解法 1 据文献[2]P45 例 3 知方程对一切 λ 存在惟一解 $x(t) \in C[0,1]$，改写原方程为

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 K(t,s) x(s) \mathrm{d}s = (Kx)(t),$$

其中

$$K(t,s) = \begin{cases} 0, & t < s, \\ 1, & t \geqslant s. \end{cases}$$

由逐次逼近法，取 $x_0(t) \equiv 0$，得

$$x_1 = Kx_0,\ x_2 = K^2 x_0, \cdots, x_n = K^n x_0,$$

则

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t), \qquad C[0,1] \text{ 中收敛},$$

即为原方程之解. 容易看出

$$x_1(t) = f(t), x_2(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 K(t,s) f(s) \mathrm{d}s, \cdots,$$

$$x_{n+1}(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k \int_0^1 K_k(t,s) f(s) \mathrm{d}s,$$

其中

$$K_1(t,s) = K(t,s),$$

$$K_n(t,s) = \int_0^1 K(t,u) K_{n-1}(u,s) \mathrm{d}u \qquad (n \geqslant 2),$$

从而

$$K_n(t,s) = \begin{cases} 0, & t < s, \\ \dfrac{1}{(n-1)!}(t-s)^{n-1}, & t \geqslant s, \end{cases}$$

$$x_{n+1}(t) = f(t) + \lambda\int_0^t\left[1 + \lambda(t-s) + \frac{\lambda^2(t-s)^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^{n-1}(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\right]f(s)\mathrm{d}s,$$

故

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}(t) = f(t) + \lambda\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda(t-s)}f(s)\mathrm{d}s.$$

解法 2 令

$$y(t) = \int_0^t x(s)\mathrm{d}s,$$

则 $y'(t)=x(t)$,如果 $x(t)$满足原方程,则 $y(t)$必满足方程

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) + \lambda y(t) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

易知方程(1)的解为

$$\bar{y}(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{\lambda(t-s)}f(s)\mathrm{d}s \tag{2}$$

再令

$$\bar{x}(t) = f(t) + \lambda\bar{y}(t) = f(t) + \lambda\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda(t-s)}f(s)\mathrm{d}s \tag{3}$$

下面证明 $\bar{x}(t)$为原方程之解.事实上,因为 $\bar{y}(t)$满足(1),则

$$\bar{y}'(t) = f(t) + \lambda\bar{y}(t) = \bar{x}(t),$$

所以

$$\bar{y}(t) = \int_0^t \bar{x}(s)\mathrm{d}s.$$

由(3)知

$$\bar{x}(t) = f(t) + \lambda\int_0^t \bar{x}(s)\mathrm{d}s,$$

故

$$\bar{x}(t) = f(t) + \lambda\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda(t-s)}f(s)\mathrm{d}s$$

为原方程的连续解.

26. 设 T 为完备距离空间 X 到 X 的映射,如果

$$\alpha_0 = \inf_n \sup_{x\neq y}\frac{\rho(T^n x, T^n y)}{\rho(x,y)} < 1,$$

则 T 存在惟一的不动点.

证 令

$$\alpha_n = \sup_{x\neq y}\frac{\rho(T^n x, T^n y)}{\rho(x,y)},$$

则

$$\alpha_0 = \inf_n \alpha_n < 1,$$

故存在 n_0 使 $0 \leqslant \alpha_{n_0} < 1$，令 $\theta = \alpha_{n_0}$，我们就有

$$\rho(T^{n_0}x, T^{n_0}y) \leqslant \theta\rho(x,y) \qquad (\forall\, x, y \in X),$$

据文献[2]定理 3.2(P44)，T 必存在惟一不动点.

27. 设 X 是距离空间，证明不等式

$$|\rho(x,z) - \rho(z,y)| \leqslant \rho(x,y),$$

其中 $x, y, z \in X$.

28. 设 F_1, F_2 是距离空间 X 中的集合，其中一个是紧集，另一个是闭集，试证明：若 $\rho(F_1, F_2) = 0$，则存在 $x_0 \in F_1 \cap F_2$.

证　因为 $\rho(F_1, F_2) = \inf\limits_{x \in F_1, y \in F_2} \rho(x,y) = 0$，则存在 $x_n \in F_1, y_n \in F_2$，使

$$\rho(x_n, y_n) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

设 F_1 为紧集，F_2 为闭集，由于 $\{x_n\} \subset F_1$，则存在子序列 $x_{n_k} \to x_0 \in F_1\ (k \to \infty)$，但

$$\rho(y_{n_k}, x_0) \leqslant \rho(y_{n_k}, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0),$$

故 $y_{n_k} \to x_0 \in F_2$，即 $x_0 \in F_1 \cap F_2$.

29. 如果在文献[2]定理 3.1 中 $\theta = 1$，不等式(3)为严格不等式，举例说明定理的结论可以不真.

解　令 $X = [0, +\infty)$，$Tx = x + \dfrac{1}{1+x}$　$(x \in [0, +\infty))$，我们容易证明对一切 $x, y \in [0, +\infty)$，$x \neq y$ 时，有

$$|Tx - Ty| < |x - y|,$$

但 T 在 $[0, +\infty)$ 中没有不动点.

30. 在线性拓扑空间 E 中，问下列叙述是否成立：

(i) 设 $A \subset E$ 为闭集，则 $x + A$，αA 也是闭集；

(ii) E 的子空间的闭包也是子空间.

31. 设 A 是线性拓扑空间 E 中的凸集，$\mathring{A} \neq \varnothing$，则对于任何 $x \in \mathring{A}$，$y \in A$ 以及 $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$，$\alpha x + (1-\alpha)y \in \mathring{A}$.

证　因为 $x \in \mathring{A}$，则存在 x 的一个邻域 $U_x = U_0 + x$，使 $U_x \subset A$. 不妨设 U_0 是 0 点的均衡环境，于是 $\alpha U_x = \alpha U_0 + \alpha x$ 是 αx 的一个邻域. 显然

$$\alpha U_x + (1-\alpha)y \subset A,$$

因为 $\alpha U_x + (1-\alpha)y$ 是 $\alpha x + (1-\alpha)y$ 的一个邻域，故

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in \mathring{A}.$$

32. 设 X 为全有界距离空间，证明对任意的 $\varepsilon > 0$ 以及任一无穷子集 $M \subset X$

中,存在一个无穷子集 M_0,使得 M_0 的直径$<\varepsilon$.

33. 设 $f(x)$,$f_n(x)$在紧空间 E 上连续,$f_n(x)$处处收敛于 $f(x)$,$f_n(x)\geqslant f_{n+1}(x)$(对每个 $x\in E$,$n=1,2,\cdots$),证明 $f_n(x)$一致收敛于 $f(x)$.

提示 任给 $\varepsilon>0$,考察集合

$$G_n=\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\},$$

证明 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n$,并利用紧空间特征.

34. 设 F 为距离空间(X,ρ)中的紧集,T 为 F 到 F 中的映射,满足条件:对一切 $x,y\in F$,$x\neq y$

$$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y),$$

则 T 在 F 中存在惟一不动点.

提示 令 $\varphi(x)=\rho(Tx,x)$,证明 φ 是定义在 F 上的连续函数,利用紧集上连续函数的性质求出不动点.

第七章　赋范线性空间及线性算子

一、基本概念和主要定理

范数和赋范线性空间　设 X 是实(或复)线性空间,$P(x)$是 $X\to\mathbf{R}$ 的函数,如果

(i) $P(x)\geqslant 0$,且 $P(x)=0$ 的充要条件是 $x=0$;

(ii) $P(\alpha x)=|\alpha|P(x)$(其中 α 属于数域 K);

(iii) $P(x+y)\leqslant P(x)+P(y)$

则称 $P(x)$为 x 的范数,常记 $P(x)=\|x\|$,并称$(X,\|\cdot\|)$为赋范线性空间.对赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$,我们令 $\rho(x,y)=\|x-y\|$,则(X,ρ)便成为一个距离空间,如果按 $\rho(x,y)=\|x-y\|$是完备的,则称$(X,\|\cdot\|)$为巴拿赫(Banach)空间.

直接和　设 X 为赋范线性空间,X_1,X_2 为 X 的子空间,如果对任一 $x\in X$,有惟一表示式

$$x=x_1+x_2.$$

其中 $x_1\in X_1,x_2\in X_2$,则记 $X=X_1\dot{+}X_2$,称 X 为子空间 X_1 和 X_2 的**直接和**.

积空间　设 X_1,X_2 为赋范线性空间,令

$$X_1\times X_2=\{(x,y)\mid x\in X_1,y\in X_2\},$$

$$\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|,$$

则称 $X_1\times X_2$ 为 X_1 和 X_2 的积空间.易知如果 X_1,X_2 完备,则 $X_1\times X_2$ 也是巴拿赫空间,且 $X_1\times X_2$ 与 $X_1\dot{+}X_2$ 代数同构.

商空间　设 F 为赋范线性空间的一个闭子空间,令 $X/F=\{\dot{x}\mid\dot{x}$ 代表一个等价类,$x_1,x_2\in\dot{x}\Leftrightarrow x_1-x_2\in F\}$,我们称 X/F 为商空间.如果规定 X/F 中元素的范数为

$$\|\dot{x}\|=\inf_{x\in\dot{x}}\|x\|,$$

则当 X 完备时,X/F 也完备.

哈梅尔(Hamel)基和肖德尔(Schauder)基　设 X 为线性空间,$B\subset X$,如果 X 中任一元素 x 均可惟一地表成 B 中有限个元素的线性组合,则称子集 B 为 X 的哈梅尔基;设赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$中存在一可列集$\{e_n\}$,使得对任一 $x\in X$,有 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ (级数在$(X,\|\cdot\|)$中收敛),且表示惟一,则称$\{e_n\}$为$(X,\|\cdot\|)$的

肖德尔基.

有界线性算子 设 X 和 Y 是赋范线性空间,映射 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$ 是线性映射,如果存在常数 $M>0$,使对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$,有

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|,$$

则称映射 T 为有界线性算子.线性算子 T 的有界性等价于连续性,也等价于 T 在原点连续.如果 $Y=\mathbf{R}$ 或者 $Y=\mathbf{C}$,$f\in\mathscr{B}(X,Y)$,则称 f 为有界线性泛函.$X\to Y$ 有界线性算子全体记作 $\mathscr{B}(X,Y)$,当 $Y=X$ 时,简记为 $\mathscr{B}(X)$.如果规定 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$的范数为

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|,$$

则当 Y 完备时,$\mathscr{B}(X,Y)$也是一个巴拿赫空间.

逆算子 设线性算子 T 是$(X,\|\cdot\|)$到其值域 $R(T)$上的一对一映射,则称 T 是 X 到 $R(T)$上的可逆算子.如果线性算子 S 满足 $ST=I_X$(I_X 为 X 中的恒同算子),则称 S 为 T 的左逆;如果线性算子 S'满足 $TS'=I_Y$(I_Y 为 Y 中恒同算子),则称 S'为 T 的右逆;如果线性算子 T 的左逆和右逆同时存在,则 T 必是 $X\to Y$ 上的可逆算子,且 $T^{-1}=S=S'$.

$T\in\mathscr{B}(X)$,T^{-1}是 $R(T)\to X$ 的有界线性算子的充要条件是存在常数 $\alpha>0$,使对一切 $x\in X$,有

$$\|Tx\|\geqslant\alpha\|x\|.$$

设 $T\in\mathscr{B}(X)$,$\|T\|<1$,则$(I-T)^{-1}\in\mathscr{B}(X)$,且

$$(I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}T^n,$$

上式右边级数在 $\mathscr{B}(X)$中收敛.

闭线性算子 设 X,Y 是赋范线性空间,$T:\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$ 是线性算子,若对任何 $x_n\in\mathscr{D}(T)$,当 $x_n\to x$,$Tx_n\to y$ 时,有 $x\in\mathscr{D}(T)$以及 $y=Tx$,则称 T 为闭线性算子,简称闭算子.T 是闭算子的充要条件是 T 的图像 $G(T)=\{(x,Tx):x\in\mathscr{D}(T)\}$为 $X\times Y$ 中的闭子空间.

容易证明:(i) 如果 T 是闭算子,T^{-1}存在,则 T^{-1}也是闭算子;(ii) 设 X 完备,T 是闭算子,若 T^{-1}存在连续,则 T 的值域 $R(T)$是闭的.

全连续线性算子 设 X,Y 是赋范线性空间,$T:X\to Y$ 是线性算子,若 T 将 X 中的任一有界集映为 Y 中的列紧集,则称 T 为全连续线性算子,简称为全连续算子.

设 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$,若 T 值域为有穷维空间,则称 T 为有穷秩算子,易知有穷秩算子必为全连续算子.

全连续算子 T 有下列简单性质:

(i) 若 x_n 弱收敛于 x_0,则 Tx_n 强收敛于 Tx_0;

(ii) T 的值域 $R(T)$ 必可分；

(iii) 若 T 全连续，则 T^* 也全连续；

(iv) 设 Y 完备，$\{T_n\}$ 为 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中的全连续算子序列，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，若 T_n 一致收敛于 T（即 $\|T_n-T\|\to0$），则 T 也是全连续算子．反之，若 Y 是具有可数基（肖德尔基）的巴拿赫空间，则对任一全连续算子 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$，存在有穷秩算子 T_n 一致收敛于 T.

共轭空间和共轭算子　设 X 为赋范线性空间，X 上的全部有界线性泛函组成的集合记作 X^*，称 X^* 为 X 的共轭空间，共轭空间 X^* 一定是巴拿赫空间；X 的二次共轭空间 $X^{**}=(X^*)^*$.

设 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$，定义 $T^*\in\mathscr{B}(Y^*,X^*)$ 如下

$$T^*f(x)=f(Tx)\qquad(\forall f\in Y^*,x\in X),$$

称 T^* 为 T 的共轭算子，可以证明 $\|T^*\|=\|T\|$.

自然嵌入映射和自反空间　规定映射 $J:X\to X^{**}$ 如下：$x\in X$，令 $F_x\in X^{**}$，$F_x(f)=f(x)\ (\forall f\in X^*)$，并记

$$Jx=F_x,$$

则称 J 为 $X\to X^{**}$ 的自然嵌入映射；若 $JX=X^{**}$，则称 X 为自反巴拿赫空间.

一致凸巴拿赫空间　设 X 为巴拿赫空间，若对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $\|x-y\|\geqslant\varepsilon\ (\|x\|=\|y\|=1)$，就有 $\|x+y\|\leqslant2-\delta$，则称 X 为一致凸巴拿赫空间．可以证明希尔伯特(Hilbert)空间是一致凸的，一致凸的巴拿赫空间必是自反巴拿赫空间.

巴拿赫空间中的强收敛和弱收敛　设 $\{x_n\}\subset X$，$x\in X$，若 $\|x_n-x\|\to0$ $(n\to\infty)$，则称 $\{x_n\}$ 强收敛于 x，简记为 $x_n\xrightarrow{S}x$；如果对任一 $f\in X^*$，$f(x_n)\to f(x)\ (n\to\infty)$，则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x，简记为 $x_n\xrightarrow{w}x$；设 $\{f_n\}\subset X^*$，$f\in X^*$，如果对任一 $x\in X$，$f_n(x)\to f(x)\ (n\to\infty)$，则称 $\{f_n\}$ * 弱收敛于 f，简记为 $f_n\xrightarrow{w^*}f$.

巴拿赫空间 X 中点列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x，必可推出 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x，反之不一定成立．X^* 中点列 $\{f_n\}$ 强收敛于 f（即 $\|f_n-f\|\to0$），必可推出 $\{f_n\}$ * 弱收敛于 f，反之也不一定成立.

定理 1（贝尔(Baire)纲定理）　设 (X,ρ) 是完备距离空间，$X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，则必存在 k_0，使 E_{k_0} 在 X 的某个闭球中稠密，即 X 为第二纲集.

里斯引理　设 $X_0\subset(X,\|\cdot\|)$ 是真闭子空间，则对任给的 $0<\varepsilon<1$，存在 $x_0\in X$，$\|x_0\|=1$，使

$$\rho(x_0,X_0)\geqslant1-\varepsilon.$$

定理 2　X 为有穷维赋范线性空间的充要条件是 X 的任一有界子集 A 是列

紧集.

定理 3（哈恩(Hahn)-巴拿赫定理） 设 G 为赋范线性空间 X 中的子空间，f 是定义在 G 上的有界线性泛函，则存在 $F\in X^*$，使 $\|F\|=\|f\|_G$，$x\in G$ 时，$f(x)=F(x)$.

定理 4（巴拿赫逆算子定理） 设 X,Y 均为巴拿赫空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，若 T 是 $X\to Y$ 上的一对一映射，则 $T^{-1}\in\mathscr{B}(Y,X)$.

定理 5（开映射定理） 设 X,Y 均是巴拿赫空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，若 $TX=Y$，则 T 是开映射(即将 X 中开集映成 Y 中的开集).

定理 6（闭图像定理） 设 X,Y 均是巴拿赫空间，$T:X\to Y$ 是闭线性算子，则 T 有界.

定理 7（共鸣定理） 设 X 为巴拿赫空间，Y 为赋范线性空间，$\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}\subset\mathscr{B}(X,Y)$，若对任一 $x\in X$
$$\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\|T_\alpha x\|<+\infty,$$
则必有
$$\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\|T_\alpha\|<+\infty.$$

设 X 为线性空间，$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 是定义在 X 上的两个范数，若存在正数 K_1,K_2，使不等式
$$K_1\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant K_2\|x\|_1$$
对一切 $x\in X$ 成立，则称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价. 利用巴拿赫逆算子定理可以证明：

如果线性空间 X 上的两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 均使 X 成为巴拿赫空间，且不等式
$$\|x\|_2\leqslant K\|x\|_1$$
对一切 $x\in X$ 成立，其中 K 为常数，则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价.

有界线性算子的谱和正则集 设 X 为复巴拿赫空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，则称
$$\rho(T)=\{\lambda\in C:(\lambda I-T)^{-1}\in\mathscr{B}(X)\}$$
为算子 T 的正则集；称正则集 $\rho(T)$ 的补集
$$\sigma(T)=\mathbf{C}\setminus\rho(T)$$
为算子 T 的谱集；$\lambda\in\rho(T)$ 时，$R(\lambda;T)=(\lambda I-T)^{-1}$ 称作 T 的预解式. $\sigma(T)$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的有界闭集，$R(\lambda;T)$ 是开集 $\rho(T)$ 上的解析函数.

称
$$\sigma_p(T)=\{\lambda\in\sigma(T):(\lambda I-T)x=0\text{ 有非零解}\}$$
为算子 T 的点谱，$\lambda\in\sigma_p(T)$ 为 T 的特征值；

$\sigma_c(T)=\{\lambda\in\sigma(T):(\lambda I-T)x=0$ 只有零解，$(\lambda I-T)$ 的值域在 X 中稠密$\}$

为算子 T 的连续谱；

$\sigma_r(T)=\{\lambda\in\sigma(T):(\lambda I-T)x=0$ 只有零解,$(\lambda I-T)$的值域在 X 中不稠密$\}$为算子 T 的剩余谱.易知

$$\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T).$$

全连续算子 T 的里斯-肖德尔理论 设 $T\in\mathscr{B}(X)$是全连续算子,则

(i) X 为无穷维时,$0\in\sigma(T)$,$\sigma(T)$或者是有限集,或者是仅以 0 为聚点的可列集;

(ii) $\lambda\neq0$ 时,或者 $\lambda\in\rho(T)$,或者 $\lambda\in\sigma_p(T)$,且 $\lambda\in\sigma_p(T)$ $(\lambda\neq0)$时,λ 所对应的特征向量空间是有穷维的;

(iii) $\sigma(T)=\sigma(T^*)$,且 $\lambda\neq0$,$\lambda\in\sigma_p(T)\Leftrightarrow\lambda\in\sigma_p(T^*)$;

(iv) 设 $\lambda\neq\mu$,$\lambda\in\sigma_p(T)$,$\mu\in\sigma_p(T^*)$,L_λ,L_μ^* 分别为 T 和 T^* 相应 λ,μ 的特征向量空间,则 $L_\lambda\perp L_\mu^*$;

(v) $\lambda\in\sigma_p(T)$,$\lambda\neq0$ 时,有

$$\dim L_\lambda=\dim L_\lambda^*,$$

这里 $\dim L_\lambda$ 表示特征向量空间 L_λ 的维数.

二、习题、练习题与解法

1. 设 $V[a,b]$表在$[a,b]$上囿变、右连续函数的全体,其线性运算与 $C[a,b]$中的相同,在 $V[a,b]$中定义范数

$$\|x\|=|x(a)|+\bigvee_a^b(x),$$

则 $V[a,b]$是一个巴拿赫空间.

证 $V[a,b]$为线性空间显然,今证 $\|\cdot\|$ 满足范数公理. $\|x\|\geqslant0$ 及 $\|ax\|=|a|\cdot\|x\|$ 显然成立,$\|x\|=0$ 等价于 $x(a)=0$,且 $\bigvee\limits_a^b(x)=0$,也等价于对任一分划 $\Delta:a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b$,成立

$$\begin{cases}x(a)=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{k}|x(t_i)-x(t_{i-1})|=0,\end{cases}$$

也等价于

$$x(t)\equiv0,$$

$$\|x+y\|\leqslant|x(a)|+|y(a)|+\bigvee_a^b(x)+\bigvee_a^b(y)=\|x\|+\|y\|.$$

最后证明 $V[a,b]$的完备性

$$\rho(x,y)=|x(a)-y(a)|+\bigvee_a^b(x-y),$$

设$\{x_n(t)\}$是 $V[a,b]$中任一基本列,则任给 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n,m>N$ 时,有

$$\rho(x_m,x_n)=|x_m(a)-x_n(a)|+\bigvee_a^b(x_m-x_n)<\varepsilon.$$

容易证明 $x_n(t)$必一致收敛.记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)$,只要证明 $x(t)\in V[a,b]$,且$\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty)$.

(i) $x(t)$的右连续性:设 $\Delta t>0$,因为

$$|x(t)-x(t+\Delta t)|\leqslant|x(t)-x_n(t)|+|x_n(t)-x_n(t+\Delta t)|+|x_n(t+\Delta t)-x(t+\Delta t)|,$$

因而利用 $x_n(t)$一致收敛于 $x(t)$以及 $x_n(t)$的右连续性,立即得 $x(t)$的右连续性.

(ii) $\bigvee\limits_a^b(x)<+\infty$以及$\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty)$:因为 $x_n(t)$是 $V[a,b]$中基本列,所以对任给的 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n,m\geqslant N$ 时,有

$$|x_m(a)-x_n(a)|+\sum_{i=1}^k|x_m(t_i)-x_n(t_i)-x_m(t_{i-1})+x_n(t_{i-1})|\leqslant\|x_n-x_m\|<\varepsilon,$$

对一切分划 Δ 成立.上式中固定 $n\geqslant N$,令 $m\to\infty$,得

$$|x(a)-x_n(a)|+\sum_{i=1}^k|x(t_i)-x_n(t_i)-x(t_{i-1})+x_n(t_{i-1})|\leqslant\varepsilon,$$

故当 $n\geqslant N$ 时有$\|x-x_n\|\leqslant\varepsilon$,这就证明了 $x(t)\in V[a,b]$以及 $\rho(x_n,x)\to 0$ $(n\to\infty)$.

2. 设 M_0 是$[a,b]$上有界函数的全体,线性运算的定义与 $C[a,b]$中的相同,在 M_0 中定义范数

$$\|x\|=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|,$$

求证 M_0 是巴拿赫空间.

证 $\|\cdot\|$满足范数公理显然,我们仅证明完备性.设$\{x_n(t)\}$是 M_0 中任一基本列,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $m,n>N$ 时,有

$$\sup_{t\in[a,b]}|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon,$$

故 $x_n(t)$在$[a,b]$上一致收敛于某一函数 $x(t)$.又因为

$$|x(t)|\leqslant|x(t)-x_n(t)|+|x_n(t)|,$$

所以 $x(t)\in M_0$,最后据 M_0 中收敛与一致收敛等价可得

$$\|x_n-x\|\to 0\qquad(n\to\infty),$$

故 M_0 是巴拿赫空间.

3. 设 $H^p(0<p\leqslant 1)$表示$[a,b]$上满足赫尔得条件

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant M|t_1-t_2|^p$$

的函数全体,线性运算的定义与 $C[a,b]$中的相同,在 H^p 中定义范数

$$\| x \| = |x(a)| + \sup_{a\leqslant t_1<t_2\leqslant b} \frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^p},$$

求证 H^p 为巴拿赫空间.

证 我们仅证明 H^p 的完备性,设$\{x_n(t)\}$为 H^p 中任一基本列,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n,m>N$ 时,有

$$|x_n(a)-x_m(a)| + \sup_{a\leqslant t_1<t_2\leqslant b} \frac{|x_n(t_1)-x_m(t_1)-x_n(t_2)+x_m(t_2)|}{|t_1-t_2|^p} < \varepsilon,$$

由此可得 $x_n(t)$在$[a,b]$上处处收敛.记极限函数为 $x(t)$,下面证明 $x(t)\in H^p$,且 $\| x_n - x \| \to 0\ (n\to\infty)$.任取 $a\leqslant t_1<t_2\leqslant b$,当 $n,m>N$ 时,有

$$\begin{aligned} & |x_n(a)-x_m(a)| + \frac{|x_n(t_1)-x_m(t_1)-x_n(t_2)+x_m(t_2)|}{|t_1-t_2|^p} \\ & \leqslant \| x_n - x_m \| < \varepsilon. \end{aligned}$$

在上式中固定的 $n>N$,令 $m\to\infty$,得

$$|x_n(a)-x(a)| + \frac{|x_n(t_1)-x(t_1)-x_n(t_2)+x(t_2)|}{|t_1-t_2|^p} \leqslant \varepsilon,$$

从而

$$\frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^p} \leqslant \varepsilon + \| x_n \| \qquad (n>N),$$

则 $x(t)\in H^p$,且当 $n>N$ 时,有

$$\| x_n - x \| \leqslant \varepsilon,$$

故 $x_n\to x$,H^p 为巴拿赫空间.

4. 证明 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$是可分的巴拿赫空间,本题证明见第六章习题 9.

5. 设 m 为一切有界数列组成的集,线性运算与 l^p 中的相同,在 m 中令

$$\| x \| = \sup_{n\geqslant 1} |\xi_n|,$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in m$,则 m 为不可分的巴拿赫空间.

证 m 为赋范线性空间显然,今证完备性.设$\{x_n\}$为 m 中任一基本列,其中 $x_n=\{\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_i^{(n)},\cdots\}$,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n,m>N$ 时,有

$$\| x_n - x_m \| = \sup_{i\geqslant 1} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \varepsilon.$$

故对每个 i,$\{\xi_i^{(n)}\}$是一个收敛数列,记 $\xi_i = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)}$.因为对每个 i,当 $n,m>N$ 时,有

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \varepsilon,$$

固定 $n>N$ 时,令 $m\to\infty$,则得

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i| \leqslant \varepsilon \qquad (i=1,2,3,\cdots,n>N),$$

所以 $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，且 $x=(\xi_i)\in m$.

下面证明 m 是不可分的. 记
$$K = \{(\xi_i) \mid \xi_i = 0 \text{ 或 } 1\},$$
易知 K 不可列，其势为 $\aleph$，且 $x, y\in K$，$x\neq y$ 时，$\|x-y\| = 1$. 若 m 可分，则存在可列子集 $\{y_k\}$ 在 m 中稠密，我们以 K 中之点为中心，$\frac{1}{3}$ 为半径作开球，这种开球所成的类的势为 $\aleph$.

由于 $\overline{\{y_k\}} = m$，则每个球中都含有 $\{y_k\}$ 中之点，从而至少有一个 y_i 同属于两个不同的开球，例如同属于 $S\left(x,\frac{1}{3}\right)$，$S\left(y,\frac{1}{3}\right)$，其中 $x, y\in K$，$x\neq y$，则
$$1 = \rho(x,y) \leqslant \rho(x,y_i) + \rho(y_i,y) \leqslant \frac{2}{3},$$
矛盾，故 m 为不可分的巴拿赫空间.

6. 设 C 为一切收敛数列组成的集，线性运算与 l^p 中的相同，在 C 中令
$$\|x\| = \sup_{n\geqslant 1} |\xi_n|,$$
其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in C$，则 C 为可分的巴拿赫空间.

证 完备性：设 $\{x_n\}$ 为 C 中任一基本列，其中 $x_n = \{\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_i^{(n)},\cdots\}$，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n, m>N$ 时，有
$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \varepsilon \qquad (i = 1,2,3,\cdots), \tag{$*$}$$
故 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}$ 存在，记 $\xi_i = \lim\limits_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}$ $(i=1,2,3,\cdots)$，因为
$$|\xi_{i+p} - \xi_i| = |\xi_{i+p} - \xi_{i+p}^{(n)}| + |\xi_{i+p}^{(n)} - \xi_i^{(n)}| + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|,$$
由此立即可知 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i$ 存在，故 $x=(\xi_i)\in C$. 又若在 $(*)$ 中固定 $n>N$，令 $m\to\infty$，则得
$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i| \leqslant \varepsilon \qquad (i = 1,2,3,\cdots, n > N),$$
所以 $\|x_n - x\| \to 0$ $(n\to\infty)$，空间 C 的完备性得证.

可分性：记 $E_0 = \{(r_1,r_2,\cdots,r_n,r,r,\cdots) \mid n$ 为任一自然数，r_i, r 均为有理数$\}$，则 $E_0\subset C$，且可列. 下面证明 E_0 在 E 中稠. 任取 $x=(\xi_n)\in C$，则
$$\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi,$$
故存在 N 及有理数 r，使 $n>N$ 时，有
$$|\xi_n - r| < \varepsilon.$$
对于 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N$，必存在有理数 $r_1,r_2,\cdots,r_N$，使
$$|\xi_i - r_i| < \varepsilon \qquad (i = 1,2,\cdots,N).$$
令 $y=(r_1,r_2,\cdots,r_N,r,r,\cdots)$，则 $y\in E_0$，且
$$\rho(x,y) < \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的,故 E_0 在 C 中稠密,所以 C 是可分的巴拿赫空间.

7. 设 C_0 为一切收敛于零的数列组成的集,线性运算与 l^p 中的相同,在 C_0 中令

$$\| x \| = \sup_{n\geq 1} |\xi_n|,$$

其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\} \in C_0$,则 C_0 为可分的巴拿赫空间.

提示 方法同本章第 6 题,对于可分性,只需取

$$E_0 = \{(r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, 0, \cdots):$$
$$n \text{ 为任一自然数}, r_i \text{ 为有理数 } (i = 1, 2, \cdots, n)\},$$

然后证明 E_0 在 C_0 中稠密.

8. 设无穷阵(α_{ij}) $(i, j = 1, 2, 3, \cdots)$满足

$$\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}| < +\infty,$$

则 $y = Tx : \eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_j$,其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$, $y = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots\}$,是由 m 到 m 中的有界线性算子,且

$$\| T \| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|.$$

证 T 是线性算子显然.因为

$$\| y \| = \sup_i |\eta_i| = \sup_i \left| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_j \right| \leqslant \left(\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}| \right) \cdot \| x \|,$$

所以

$$\| T \| \leqslant \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|. \tag{1}$$

另一方面,令

$$x_i = \{\mathrm{sgn}\alpha_{i1}, \mathrm{sgn}\alpha_{i2}, \cdots, \mathrm{sgn}\alpha_{in}, \cdots\},$$

则 $x_i \in m$, $\| x_i \| \leqslant 1$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$,而

$$Tx_i = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{1j}\mathrm{sgn}\alpha_{ij}, \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{2j}\mathrm{sgn}\alpha_{ij}, \cdots \right\},$$

$$\| T \| \geqslant \| Tx_i \| \geqslant \left| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\mathrm{sgn}\alpha_{ij} \right| = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}| \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots),$$

故

$$\| T \| \geqslant \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|. \tag{2}$$

由(1),(2)立即得

$$\| T \| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|.$$

9. 设 $K(t,s)$是 $a\leqslant t\leqslant b, a\leqslant s\leqslant b$ 上的可测函数,且 $\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}t$ 对$[a,b]$上几乎所有的 s 存在,且作为 s 的函数是本性有界的,令

$$y = Tx: y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,$$

则 T 是$L[a,b]$到其自身的有界线性算子,且

$$\| T \| = \underset{a\leqslant s\leqslant b}{\text{vrai sup}}\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}t.$$

证　不妨设 $K(t,s)$为实函数,令

$$\alpha = \underset{a\leqslant s\leqslant b}{\text{vrai sup}}\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}t,$$

T 显然是$L[a,b]\to L[a,b]$中的有界线性算子,且$\| T \|\leqslant\alpha$.

为了证明$\| T \|\geqslant\alpha$,我们考察共轭算子 T^*

$$(T^* x)(s) = \int_a^b K(t,s)x(t)\mathrm{d}t \qquad (x(t)\in L^\infty[a,b]).$$

T^*是 $L^\infty[a,b]\to L^\infty[a,b]$中的有界线性算子,且$\| T \| = \| T^* \|$,故只要证明$\| T^* \|\geqslant\alpha$.任取 $\varepsilon>0$,令

$$E = \left\{s\in[a,b]:\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}t > \alpha-\varepsilon\right\},$$

则 $mE>0$.因为$\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}t$ 关于s 本性有界,所有

$$\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|\mathrm{d}t\mathrm{d}s < +\infty,$$

根据积分的性质,必存在连续函数 $K_n(t,s)$,使

$$\int_a^b\int_a^b |K_n(t,s) - K(t,s)|\mathrm{d}t\mathrm{d}s \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

从而可得

$$\int_a^b |K_n(t,s) - K(t,s)|\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{\text{mes}} 0,$$

由里斯定理,存在子序列 n_k,使上式对 $n=n_k$ 几乎处处收敛于 0.为简单起见,不妨设$\int_a^b |K_n(t,s)-K(t,s)|\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.e}}0$,再据叶果洛夫定理,存在闭集$F\subset E$,使$mF>0$,以及

$$\int_a^b |K_n(t,s) - K(t,s)|\mathrm{d}t \xrightarrow[\text{在}F\text{上}]{\text{一致}} 0. \tag{1}$$

因为 $mF>0$,则必存在 $s_0\in F$,使对 s_0 的一切邻域 $U(s_0)$有

$$m(U(s_0)\cap F) > 0,$$

又因为 $s_0\in F\subset E$,故

$$\int_a^b |K(t,s_0)|\,dt > \alpha - \varepsilon, \tag{2}$$

由(1)可知存在邻域 $U(s_0)$ 及自然数 N,使对一切 $s\in U(s_0)\cap F$ 成立

$$\begin{aligned}\int_a^b |K(t,s)-K(t,s_0)|\,dt &\leqslant \int_a^b |K(t,s)-K_N(t,s)|\,dt \\ &\quad + \int_a^b |K_N(t,s)-K_N(t,s_0)|\,dt \\ &\quad + \int_a^b |K_N(t,s_0)-K(t,s_0)|\,dt < \varepsilon.\end{aligned} \tag{3}$$

现取 $\varphi(t)=\operatorname{sgn}K(t,s_0)\in L^\infty[a,b]$, $\|\varphi\|_\infty=1$, $\varphi(t)$ 显然可测,则由(3)得

$$\left|\int_a^b K(t,s)\varphi(t)\,dt - \int_a^b K(t,s_0)\varphi(t)\,dt\right| < \varepsilon \qquad (\forall s\in U(s_0)\cap F),$$

从而当 $s\in U(s_0)\cap F$ 时,有

$$\left|\int_a^b K(t,s_0)\varphi(t)\,dt\right| - \left|\int_a^b K(t,s)\varphi(t)\,dt\right| < \varepsilon,$$

则 $s\in U(s_0)\cap F$ 时,成立

$$\left|\int_a^b K(t,s)\varphi(t)\,dt\right| \geqslant \int_a^b |K(t,s_0)|\,dt - \varepsilon > \alpha - 2\varepsilon,$$

故

$$\|T^*\| \geqslant \operatorname*{vari\,sup}_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b K(t,s)\varphi(t)\,dt\right| \geqslant \alpha - 2\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的,所以 $\|T^*\|=\|T\|\geqslant\alpha$,从而 $\|T\|=\alpha$.

10. 设 $\sup\limits_{n\geqslant 1}|\alpha_n|<+\infty$,在 l 中定义线性算子

$$y = Tx: \eta_n = \alpha_n\xi_n \qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$, $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$,则 T 是有界线性算子,且

$$\|T\| = \sup_{n\geqslant 1}|\alpha_n|.$$

证　因为 $\|Tx\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n\xi_n| \leqslant \sup\limits_{n\geqslant 1}|\alpha_n|\cdot\|x\|$,所以

$$\|T\| \leqslant \sup_{n\geqslant 1}|\alpha_n|.$$

另一方面,取 $e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n\text{位}},0,\cdots)\in l$, $\|e_n\|=1$,则

$$\|T\| \geqslant \|Te_n\| = |\alpha_n| \qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

所以

$$\|T\| \geqslant \sup_{n\geqslant 1}|\alpha_n|,$$

故

$$\|T\| = \sup_{n\geqslant 1}|\alpha_n|.$$

11. 证明上题中的 T 存在有界逆算子的充要条件是

$$\inf_{n\geqslant 1}|\alpha_n|>0.$$

证　充分性：令 $Sy=\left(\dfrac{1}{\alpha_n}\eta_n\right)$，其中 $y=(\eta_n)$，则易知 $ST=TS=I$，所以 $T^{-1}=S$，据第 10 题，$\|T^{-1}\|=\dfrac{1}{\inf\limits_{n\geqslant 1}|\alpha_n|}$，故 T^{-1} 有界.

必要性：若 T^{-1} 存在有界，则存在 $\alpha>0$，使

$$\|Tx\|\geqslant\alpha\|x\|\qquad(\forall x),$$

由此易证对一切 n 有

$$|\alpha_n|\geqslant\alpha,$$

故 $\inf\limits_{n\geqslant 1}|\alpha_n|>0$.

12. 设 E 为巴拿赫空间，T 为从 E 到 E 中的有界线性算子，设 $\lambda,\mu\in\rho(T)$，则 $R_\lambda-R_\mu=(\mu-\lambda)R_\lambda R_\mu$（第一预解算子方程）.

证

$$\begin{aligned}R_\lambda-R_\mu&=(\lambda-T)^{-1}-(\mu-T)^{-1}\\&=(\lambda-T)^{-1}\cdot[(\mu-T)-(\lambda-T)](\mu-T)^{-1},\end{aligned}$$

所以

$$R_\lambda-R_\mu=(\mu-\lambda)\cdot R_\lambda R_\mu.$$

或者由

$$(R_\lambda-R_\mu)(\mu-T)(\lambda-T)=(\mu-T)-(\lambda-T)=\mu-\lambda,$$

得到

$$R_\lambda-R_\mu=(\mu-\lambda)R_\lambda R_\mu.$$

13. 设 E 为巴拿赫空间，T_1、T_2 均为 E 到 E 中的有界线性算子，且可换，设 $\lambda\in\rho(T_1)\cap\rho(T_2)$，则

$$R_\lambda(T_1)-R_\lambda(T_2)=(T_1-T_2)R_\lambda(T_1)R_\lambda(T_2)$$

（第二预解算子方程），其中 $R_\lambda(T_j)$ $(j=1,2)$ 是 T_j 的预解式.

证

$$R_\lambda(T_1)-R_\lambda(T_2)=(\lambda-T_1)^{-1}[(\lambda-T_2)-(\lambda-T_1)](\lambda-T_2)^{-1},$$

由条件 $T_1T_2=T_2T_1$ 可得

$$T_2R_\lambda(T_1)=R_\lambda(T_1)T_2.$$

又 $T_1R_\lambda(T_1)=R_\lambda(T_1)T_1$ 显然成立，故

$$R_\lambda(T_1)-R_\lambda(T_2)=(T_1-T_2)R_\lambda(T_1)R_\lambda(T_2).$$

或者由

$$[R_\lambda(T_1)-R_\lambda(T_2)](\lambda-T_2)(\lambda-T_1)$$

$$= (\lambda - T_2) - (\lambda - T_1) = T_1 - T_2,$$

立即可得

$$R_\lambda(T_1) - R_\lambda(T_2) = (T_1 - T_2)R_\lambda(T_1)R_\lambda(T_2).$$

14. 承本章第 12 题，证明 $\frac{d^n}{d\lambda^n}R_\lambda = (-1)^n n!\ R_\lambda^{n+1}$.

证　已知 $\frac{d}{d\lambda}R_\lambda = -R_\lambda^2$，用归纳法，设对 $n-1$ 成立，即

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}R_\lambda = (-1)^{n-1}(n-1)!R_\lambda^n,$$

则

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{d\lambda^n}R_\lambda &= (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{d}{d\lambda}R_\lambda^n \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!nR_\lambda^{n-1}(-R_\lambda^2) \\ &= (-1)^n n!R_\lambda^{n+1}.\end{aligned}$$

15. 设 E 是巴拿赫空间，T_λ 是定义在复平面的某一非空集 G 上而在 $\mathscr{B}(E)$ 中取值的抽象函数，适合 $T_\lambda - T_\mu = (\mu-\lambda)T_\lambda T_\mu$，又设对 G 中的某个 λ，T_λ^{-1} 存在有界，则 T_μ^{-1} 对一切 $\mu\in G$ 都存在且有界，而且存在 E 中的有界线性算子 T，使 T_μ 是 T 的预解式，$\rho(T)\supset G$.

证　设 $\mu\in G$，则

$$T_\lambda = T_\mu + (\mu-\lambda)T_\lambda T_\mu,$$

两边左乘 T_λ^{-1} 便得

$$[T_\lambda^{-1} + (\mu-\lambda)I]T_\mu = I.$$

同理由 $T_\mu - T_\lambda = (\lambda-\mu)T_\mu T_\lambda$ 可得

$$T_\lambda = T_\mu + (\mu-\lambda)T_\mu T_\lambda,$$

两边右乘 T_λ^{-1}，则得

$$T_\mu[T_\lambda^{-1} + (\mu-\lambda)I] = I,$$

所以

$$T_\mu^{-1} = T_\lambda^{-1} + (\mu-\lambda)I,$$

T_μ^{-1} 存在有界. 又若令 $T = \lambda I - T_\lambda^{-1}\in\mathscr{B}(E)$，则

$$R_\mu(T) = (\mu I - T)^{-1} = [(\mu-\lambda)I + T_\lambda^{-1}] = T_\mu,$$

故 $\rho(T)\supset G$.

16. 设 F 是复平面上一有界无穷闭集，$\{\alpha_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 为 F 的一个稠密子集，在 l 中定义算子 T 如下

$$Tx = y: x = \{\xi_n\},\qquad y = \{\alpha_n\xi_n\},$$

则每个 α_n 是 T 的特征值，$\sigma(T)=F$，$F-\{\alpha_n\}$中的每个点属于 T 的连续谱.

证 (i) $\lambda=\alpha_n$ 时，取

$$x_n = \{\underbrace{0,\cdots,0,\xi_n}_{n\text{位}},0,\cdots\} \in l,$$

则

$$(\alpha_n I - T)x_n = 0,$$

故每个 α_n 是 T 的特征值.

(ii) $\lambda \overline{\in} F$ 时，$\inf\limits_{n\geqslant 1}|\lambda-\alpha_n|=\alpha>0$，记 $T_\lambda=\lambda I-T$，$y=T_\lambda x$：$\eta_n=(\lambda-\alpha_n)\xi_n$，则 T_λ^{-1} 存在有界，且显然有 T_λ 的值域$R(T_\lambda)=l$，所以 $\lambda\in\rho(T)$. 又因为 $\sigma(T)$为闭集，所以 $\sigma(T)=\overline{\{\alpha_n\}}=F$.

(iii) $\lambda\in F-\{\alpha_n\}$时，由$(\lambda-T)x=0$，显然可得 $x=0$，故$(\lambda-T)^{-1}$存在，但由于$\inf\limits_{n\geqslant 1}|\lambda-\alpha_n|=0$，据 11 题得 T_λ^{-1} 无界. 下面证明$\overline{R(T_\lambda)}=l$. 令

$$E = \{(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m,0,\cdots)\mid m \text{ 为任一自然数}\},$$

显然 E 是l 的一个稠密子集，但 $y\in E$，必存在 $x\in l$，使$(\lambda I-T)x=y$，故$\overline{R(T_\lambda)}=l$. 从而 $\lambda\in F-\{\alpha_n\}$时，有 $\lambda\in\sigma_c(T)$ (T 的连续谱).

17. 在 l 中定义如下的算子

$$y = Tx; x = \{\xi_n\}, y = \{\eta_n\},$$

$$\eta_1 = 0,\quad \eta_k = -\xi_{k-1}\qquad (k\geqslant 2),$$

证明 T 没有特征值，$\rho(T)$由一切满足$|a|>1$ 的点组成，且

$$\|R_\lambda\| = (|\lambda|-1)^{-1}.$$

证 (i) 因为

$$(\lambda - T)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda\xi_1 = 0,\\ \lambda\xi_k+\xi_{k-1}=0\quad(k=2,3,\cdots),\end{cases}$$

$\lambda\neq 0$ 时，必有 $0=\xi_1=\xi_2=\xi_3=\cdots$，$\lambda=0$ 时，显然有 $x=0$. 故 λ 为任何数，均有 $x=0$，即 T 没有特征值.

(ii) $|\lambda|>1$ 时，因为 $\|T\|=1$，则据文献[2]P96 定理 2.10 有 $\lambda\in\rho(T)$，且 $\|R_\lambda\|\leqslant(|\lambda|-1)^{-1}$.

(iii) $|\lambda|<1$ 时

$$\begin{aligned}\|(\lambda-T)x\| &= |\lambda|\cdot|\xi_1|+|\lambda\xi_2+\xi_1|+|\lambda\xi_3+\xi_2|+\cdots\\ &\geqslant|\xi_1|-|\lambda|\cdot|\xi_1|+|\xi_2|-|\lambda|\cdot|\xi_2|+|\xi_3|-|\lambda|\cdot|\xi_3|+\cdots\\ &=(1-|\lambda|)\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|.\end{aligned}$$

因为 $1-|\lambda|>0$，故$(\lambda-T)^{-1}$存在有界，但易知$|\lambda|<1$ 时，$R(T_\lambda)\neq l$，所以

$\lambda\in\sigma_r(T)$(剩余谱),从而

$$\sigma(T)=\{\lambda\mid|\lambda|\leqslant 1\},\quad \rho(T)=\{\lambda\mid|\lambda|>1\}.$$

(iv) 最后证明 $\|R_\lambda\|=\dfrac{1}{|\lambda|-1}$,因为

$$R_\lambda x=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-(n+1)}T^n x.$$

现取 $x=(1,0,0,\cdots)$, $\|x\|=1$,则

$$\|R_\lambda x\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda|^n}=\frac{1}{|\lambda|-1},$$

于是 $\|R_\lambda\|\geqslant\dfrac{1}{|\lambda|-1}$,从而 $\|R_\lambda\|=\dfrac{1}{|\lambda|-1}$.

18. 设有无穷阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots\end{bmatrix},$$

由 A 定义了 l^p 上的有界线性算子 $T:y=Tx$,其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$, $y=\{\xi_2,\xi_3,\cdots\}$.证明 $\rho(T)$由满足 $|\lambda|>1$ 的一切点 λ 组成,T 的特征值由满足 $|\lambda|<1$的一切点组成,对于 $|\lambda|=1$,$\lambda I-T$ 是一一对应的.

证 (i) $\|T\|=1$ 显然,所以 $|\lambda|>1$ 时,$\lambda\in\rho(T)$.

(ii) $|\lambda|<1$ 时

$$(\lambda I-T)x=0\Leftrightarrow\{\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_{n+1},\cdots\}$$
$$=\lambda\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\},$$

它有非零解

$$x=\xi_1\{1,\lambda,\lambda^2,\cdots\}\in l^p\qquad(\xi_1\neq 0),$$

故 $|\lambda|<1$ 时,$\lambda\in\sigma_p(T)$(特征值).从而

$$\sigma(T)=\{\lambda\mid|\lambda|\leqslant 1\},\qquad \rho(T)=\{\lambda\mid|\lambda|>1\}.$$

(iii) $|\lambda|=1$ 时,由$(\lambda I-T)x=0$ 可知 x 必具有形式

$$\xi_1\{1,\lambda,\lambda^2,\cdots\},$$

故当且仅当 $\xi_1=0$ 时有 $x\in l^p$,所以在 l^p 中$(\lambda I-T)x=0$ 只有零解,即 $|\lambda|=1$ 时,$(\lambda I-T)$是一一对应的.

19. 设 T 是定义在巴拿赫空间上的有界线性算子,$\alpha\in\rho(T)$,$A=R_\alpha$,设 μ,λ 满足$\mu(\alpha-\lambda)=1$,则 $\mu\in\sigma(A)$的充要条件是 $\lambda\in\sigma(T)$.又设 $\mu\in\rho(T)$,且 $\mu(\alpha-\beta)=1$,则

$$(\mu I-A)^{-1}=\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu^2}R_\beta.$$

证 设 $\lambda\in\rho(T)$,$\mu(\alpha-\lambda)=1$,则$(\alpha I-T)(\lambda I-T)^{-1}\in\mathscr{B}(E)$,而

$$(\alpha I - T)(\lambda I - T)^{-1} = A^{-1}\left[(\alpha I - T) - \frac{I}{\mu}\right]^{-1}$$
$$= \left\{\left[(\alpha I - T) - \frac{I}{\mu}\right]\cdot A\right\}^{-1}$$
$$= \left(\frac{\mu I - A}{\mu}\right)^{-1} = \mu(\mu I - A)^{-1}, \qquad (*)$$

所以 $\mu \in \rho(A)$.

反之,若 $\mu \in \rho(A)$,由 $\mu(\alpha - \lambda) = 1, \mu \neq 0$,则

$$(\mu I - A)^{-1} A = [A^{-1}(\mu I - A)]^{-1} = (\mu A^{-1} - I)^{-1}$$
$$= [\mu(\lambda I - T)]^{-1} = \frac{1}{\mu}(\lambda I - T)^{-1},$$

故 $\lambda \in \rho(T)$,所以

$$\mu \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(T).$$

现设 $\mu \in \rho(A), \mu(\alpha - \beta) = 1$,则 $\beta \in \rho(T)$,由$(*)$立即可得

$$(\beta I - T)^{-1} = \mu A(\mu I - A)^{-1}$$
$$= \mu[-(\mu I - A) + \mu I](\mu I - A)^{-1}$$
$$= \mu^2(\mu I - A)^{-1} - \mu I,$$

所以

$$(\mu I - A)^{-1} = \frac{I}{\mu} + \frac{R_\beta}{\mu^2}.$$

20. 设无穷阵(α_{kj})适合条件

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{kj}|^q\right)^{\frac{p}{q}} < +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

作算子 T 如下

$$y = Tx : \eta_k = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{kj}\xi_j \qquad (k = 1,2,3,\cdots),$$

其中 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$, $y = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots\}$,证明 T 是 l^p 到 l^p 的有界线性算子.

证 设 $x = \{\xi_j\} \in l^p$,则由赫尔德不等式可得

$$\|Tx\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{kj}\xi_j\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{kj}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{kj}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\|x\|,$$

所以 $Tx \in l^p$,且 T 有界.

21. 设 T 是由赋范线性空间 E 到赋范线性空间 E_1 的线性算子，$N=\{x: Tx=0\}$，称为 T 的零空间. 证明当 T 有界时，N 是 E 的闭子空间. 反之，若 N 是 E 的闭子空间，问 T 是否有界，如果不成立，试举出例子.

证 N 为 E 的线性子空间显然，现设 $x\in\overline{N}$，则存在 $x_n\in N$，使 $x_n\to x$，因为 T 连续，则

$$Tx=\lim_{n\to\infty}Tx_n=0,$$

所以 $x\in N$，N 为闭子空间.

反之不一定成立，例如取 $E=C^1[a,b]$，$E_1=C[a,b]$，T 由下式定义

$$Tx(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t),$$

T 无界，易知

$$N=\{x(t): Tx=0\}=\{x(t): x(t)=c,\ c\in\mathbf{R}^1\}$$

是 $C^1[a,b]$ 中的闭集.

但是，我们可以证明若 T 是闭线性算子，则必有 N 为闭子空间.

22. 设 E 为巴拿赫空间，$\{T_n\}\subset\mathscr{B}(E)$ $(n=1,2,\cdots)$ 依算子范数收敛于 $T\in\mathscr{B}(E)$，λ_0 是 T 的正则值，则当 n 充分大时，λ_0 也是 T_n 的正则值，且

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_0 I-T_n)^{-1}=(\lambda_0 I-T)^{-1}.$$

证 由于

$$(\lambda_0 I-T_n)=[I-(T_n-T)(\lambda_0 I-T)^{-1}](\lambda_0 I-T),$$

$T_n\to T(n\to\infty)$，则对 $0<\varepsilon<1$，存在 N，当 $n>N$ 时，有

$$\|(T_n-T)(\lambda_0 I-T)^{-1}\|\leqslant\varepsilon<1.$$

故当 $n>N$ 时

$$(\lambda_0 I-T_n)^{-1}=(\lambda_0 I-T)^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}[(T_n-T)(\lambda_0 I-T)^{-1}]^m,$$

$(\lambda_0 I-T_n)^{-1}\in\mathscr{B}(E)$，即 $n>N$ 时，$\lambda_0\in\rho(T_n)$，且有

$$\begin{aligned}&\|(\lambda_0 I-T_n)^{-1}-(\lambda_0 I-T)^{-1}\|\\ \leqslant&\sum_{m=1}^{\infty}\|T_n-T\|^m\cdot\|(\lambda_0 I-T)^{-1}\|^m\\ =&\frac{\|T_n-T\|\cdot\|(\lambda_0 I-T)^{-1}\|}{1-\|T_n-T\|\cdot\|(\lambda_0 I-T)^{-1}\|},\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_0 I-T_n)^{-1}=(\lambda_0 I-T)^{-1}.$$

23. 设 E 为巴拿赫空间，$T\in\mathscr{B}(E)$，设 μ_0 是 T^n 的特征值，则 μ_0 的 n 次方根中至少有一个是 T 的特征值.

证 设 $\lambda^n-\mu_0=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$，其中 $\lambda_i^n=\mu_0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则

$$T^n-\mu_0 I=(T-\lambda_1)(T-\lambda_2)\cdots(T-\lambda_n).$$

因为 μ_0 是 T^n 的特征值，所以存在 $x\in E,x\neq 0$，使

$$(T^n-\mu_0 I)x=0,$$

即

$$(T-\lambda_1)(T-\lambda_2)\cdots(T-\lambda_n)x=0,$$

故至少有一个 $\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$是 T 的特征值.

24. 设 f 是定义在 $C[a,b]$上的线性泛函，而且对 $C[a,b]$中一切满足 $x(t)\geqslant 0$的函数有 $f(x)\geqslant 0$，证明 f 连续，于是进一步证明存在$[a,b]$上的单调上升函数 $v(t)$，使

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t).$$

证 令 $x_0(t)=1$，则对一切 $x(t)\in C[a,b]$，当 $\|x\|\leqslant 1$ 时，有 $x_0(t)\pm x(t)\geqslant 0$，所以

$$f(x_0\pm x)\geqslant 0,$$

则

$$|f(x)|\leqslant f(x_0)\qquad(\text{当 } \|x\|\leqslant 1 \text{ 时}),$$

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|\leqslant f(x_0).$$

故 f 为$C[a,b]$上的有界线性泛函，且 $\|f\|=f(x_0)$，从而

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t)\qquad(\forall x(t)\in C[a,b]),$$

其中 $v(t)$为右连续的囿变函数. 下面我们证明 $v(t)$为单调上升函数.

证法 1 任取 $a<t_1<t_2<b$，并设 t_1,t_2 为 $v(t)$的连续点，作 $C[a,b]$中的函数 $x(t)$如下

$$x(t)=\begin{cases}1, & t\in[t_1,t_2],\\ 0, & t\in\left[a,t_1-\frac{1}{n}\right]\cup\left[t_2+\frac{1}{n},b\right],\\ \text{线性函数}, & t\in\left[t_1-\frac{1}{n},t_1\right]\cup\left[t_2,t_2+\frac{1}{n}\right],\end{cases}$$

$x(t)\geqslant 0$，故

$$0\leqslant f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t)=\int_{t_1-\frac{1}{n}}^{t_2+\frac{1}{n}}x(t)\mathrm{d}v(t)$$

$$=x(t)v(t)\Big|_{t_1-\frac{1}{n}}^{t_2+\frac{1}{n}}-\int_{t_1-\frac{1}{n}}^{t_2+\frac{1}{n}}v(t)\mathrm{d}x(t)$$

$$= -n\int_{t_1-\frac{1}{n}}^{t_1} v(t)\mathrm{d}t + n\int_{t_2}^{t_2+\frac{1}{n}} v(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}}\left[\int_a^{t_2+\frac{1}{n}} v(t)\mathrm{d}t - \int_a^{t_2} v(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$- \frac{1}{\left(-\frac{1}{n}\right)}\left[\int_a^{t_1-\frac{1}{n}} v(t)\mathrm{d}t - \int_a^{t_1} v(t)\mathrm{d}t\right],$$

上式中令 $n\to\infty$,便得

$$v(t_2) \geqslant v(t_1).$$

再利用 $v(t)$的右连续性知对一切 $a<t_1<t_2<b$ 有

$$v(t_2) \geqslant v(t_1).$$

类似地可证明

$$v(a) \leqslant v(t) \leqslant v(b) \qquad (a < t < b).$$

故 $v(t)$是$[a,b]$上的单调上升函数.

证法 2 利用 LS 积分性质,任取 $a<t_1<t_2\leqslant b$,令

$$x(t) = \chi_{(t_1,t_2]}(t) \text{——}(t_1,t_2] \text{ 上的特征函数},$$

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a,t_1] \cup \left[t_2+\frac{1}{n},b\right], \\ 1, & t \in \left[t_1+\frac{1}{n},t_2\right], \\ \text{线性函数}, & \text{其他}, \end{cases}$$

则 $x_n(t)\in C[a,b]$, $0\leqslant x_n(t)\leqslant 1$,且 $x_n(t)\to x(t)$,据勒贝格控制收敛定理可得

$$(LS)\int_a^b \chi_{[t_1,t_2]}\mathrm{d}v(t) \geqslant 0,$$

即

$$v(t_2) \geqslant v(t_1).$$

同理可证

$$v(t) \geqslant v(a) \qquad (\forall t > a),$$

故 $v(t)$是$[a,b]$上的单调上升函数.

25. 证明无穷维赋范线性空间的共轭空间是无穷维的.

证 设 E 为无穷维,而 E^* 为有穷维赋范线性空间,容易证明$(E^*)^*$ 与 $\mathbf{R}^n$ 拓扑同构,此处 n 为E^*的维数,故 E^{**} 也是 n 维的.设 J 为E 到E^{**}中的自然嵌入映射,则 $JE\subset E^{**}$,JE 是无穷维的.矛盾,故 E^* 为无穷维.

26. 证明巴拿赫空间 E 为自反的充要条件是E^*为自反的.

证　设 E 自反,任取 $\varphi\in E^{***}$,定义 $f\in E^*$ 如下

$$f(x)=\varphi(Jx)\qquad(\forall x\in E).$$

因为任一 $x^{**}\in E^{**}$,有 $x\in E$,使 $x^{**}=Jx$,则由 $\varphi(x^{**})=\varphi(Jx)=f(x)=x^{**}(f)$ 得 $\varphi=J_1f$,其中 J_1 为 $E^*\to E^{***}$ 的自然嵌入映射,故 E^* 自反.

现设 E^* 自反,但 $E\subsetneqq E^{**}$,我们记

$$\hat{E}=\{F_x\in E^{**}\mid x\in E,F_x=Jx\}=\{\hat{x}:x\in E\},$$

因为 E 完备,则 $\hat{E}$ 是 E^{**} 的真闭子空间,由哈恩-巴拿赫定理,必存在 $\varphi\in E^{***}$,使

$$\varphi\neq0,\qquad\varphi(\hat{x})=0\qquad(\forall\hat{x}\in\hat{E}).$$

因为 $E^*=E^{***}$,则 $\varphi=J_1f$,其中 $f\in E^*$,$\|\varphi\|=\|f\|$.由于

$$\varphi(\hat{x})=J_1f(\hat{x})=\hat{x}(f)=f(x),$$

故

$$f(x)=0\qquad(\forall x\in E),\ f=0,$$

矛盾,从而 E 必自反.

27. 试证泛函 $f(v)=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}v(t)$ 是定义在 $V_0[0,1]$ 上的有界线性泛函,其中 $v\in V_0[0,1]$,这里 $V_0[0,1]=\{g(x):g(0)=0$,在$(0,1)$上右连续,且囿变$\}$.

28. 证明任何有限维线性空间都是自反的.

证　设 E^n 为 n 维赋范线性空间,$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是它的一组基底,据文献[2]定理 3.1 推论 2 我们可作出 $(E^n)^*$ 中的元组 $\{e_1',e_2',\cdots,e_n'\}$ 如下

$$e_i'(e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0,&i\neq j,\\1,&i=j,\end{cases}$$

任取 $x\in E^n$,$x=\sum\limits_{j=1}^n\xi_je_j$,则

$$e_i'(x)=\xi_i.$$

容易证明 $\{e_1',e_2',\cdots,e_n'\}$ 是 $(E^n)^*$ 的一组基底,故 $(E^n)^*$ 是 n 维的,于是 $(E^n)^{**}$ 也是 n 维的.$J(E^n)\subset(E^n)^{**}$,$J(E^n)$ 是 n 维的,故 $J(E^n)=(E^n)^{**}$,即 E^n 自反.

29. 设 E 为复的赋范线性空间,$f\in E^*$,已知 f 可表为

$$f(x)=\varphi(x)-\mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x),$$

其中 φ 为 E 上的实齐性实线性泛函,证明 $\|\varphi\|=\|f\|$.

证　不妨设 $f\neq0$,$f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|f(x)|$,因为 φ 为实泛函

$$|f(x)|=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f(x)=f(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)=\varphi(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x),$$

故

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(e^{-i\theta}x)|$$
$$= \sup_{\|y\|=1} |\varphi(y)| = \|\varphi\|.$$

30. 设 $v(t)\in V[a,b]$,已知由

$$f(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t)$$

定义了 $C[a,b]$上的一个有界线性泛函 f.举例说明,存在这样的 $v(t)$使 $\|f\| < \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)$.

解 由 $f(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t)$ 立即可知 $\|f\| \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)$,我们令 $M = \sup_{a\leqslant x\leqslant b}|v(x)|$,任取一点 $c\in(a,b)$以及 $\varepsilon>0$,作函数

$$v_1(t) = \begin{cases} v(t), & t\neq c, \\ 3M+\varepsilon, & t = c, \end{cases}$$

则

$$f(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}v_1(t) \qquad (\forall x(t)\in C[a,b]).$$

但显然有 $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v_1)\geqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v)+2\varepsilon$,故 $\|f\| < \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(v_1)$.

31. 求出 l, C, C_0 上有界线性泛函的一般形式.

解 (1) 求 l^*:任取 $x=\{\xi_k\}\in l$,显然有

$$x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k \qquad (\text{在 } l \text{ 中收敛}),$$

其中 $e_k = \{\overbrace{0,0,\cdots,0,1}^{k\text{位}},0,\cdots\}$.任取 $f\in l^*$,令

$$C_k = f(e_k), \qquad a = \{C_k\},$$

则

$$|C_k| \leqslant \|f\|,$$

故 $a=\{C_k\}\in l^\infty$,且 $\|a\|_\infty \leqslant \|f\|$.利用 f 的连续性,可得

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k C_k,$$

则

$$|f(x)| \leqslant \|a\|_\infty \cdot \|x\| \qquad (\forall x\in l),$$
$$\|f\| \leqslant \|a\|_\infty,$$

故

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k C_k, \quad \text{且} \quad \|f\| = \|a\|_\infty.$$

反之,任取 $a=\{C_k\}\in l^\infty$,令 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}C_k\xi_k$,则显然有 $f\in l^*$,故 $l^*=l^\infty$.

(2) 求 C^*:$e_k\in C$,再令 $e=(1,1,1,\cdots)\in C$,任取 $x=\{\xi_k\}\in C$,设 $\alpha=\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k$,则可以证明

$$x=\alpha e+\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k-\alpha)e_k \qquad (\text{在 } C \text{ 中收敛}).$$

任取 $f\in C^*$,令 $f(e_k)=C_k \quad (k=1,2,3,\cdots)$, $f(e)=C'$,则

$$f(x)=\alpha C'+\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k-\alpha)C_k. \tag{1}$$

取 $x_N=\{\xi_i^{(N)}\}$,其中

$$\xi_i^{(N)}=\begin{cases}\operatorname{sgn}C_i & (i\leqslant N),\\ 0 & (i>N),\end{cases}$$

则

$$f(x_N)=\sum_{k=1}^{N}|C_k|.$$

可不妨设存在 $C_k\neq 0$,则

$$\sum_{k=1}^{N}|C_k|=|f(x_N)|\leqslant\|f\| \quad (\text{对充分大的自然数 } N \text{ 成立}),$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|<+\infty. \tag{2}$$

令 $C_0=C'-\sum\limits_{k=1}^{\infty}C_k$,则(1)式可改写成

$$f(x)=\alpha C_0+\sum_{k=1}^{\infty}\xi_kC_k. \tag{3}$$

反之,任取数列 $C_0,C_1,C_2,\cdots$,满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|C_k|<+\infty$,令

$$f(x)=\alpha C_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\xi_k,$$

其中 $\alpha=\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k$,易证 $f\in C^*$,且

$$\|f\|\leqslant|C_0|+\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|. \tag{4}$$

另一方面,取 $x_N=\{\xi_i^{(N)}\}$,其中

$$\xi_i^{(N)}=\begin{cases}\operatorname{sgn}C_i & (i\leqslant N),\\ \operatorname{sgn}C_0 & (i>N),\end{cases}$$

不妨设存在 $C_k \neq 0$,则

$$\| x_N \| = 1, \qquad \lim_{i \to \infty} \xi_i^{(N)} = \operatorname{sgn} C_0,$$

从而

$$f(x_N) = |C_0| + \sum_{k=1}^{N} |C_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} C_k \operatorname{sgn} C_0,$$

$$|C_0| + \sum_{k=1}^{N} |C_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} C_k \operatorname{sgn} C_0 \leqslant \| f \|,$$

令 $N \to \infty$,便得

$$|C_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \leqslant \| f \|. \tag{5}$$

由(4),(5)知

$$\| f \| = |C_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|,$$

故

$$f \leftrightarrow \{C_0, C_1, C_2, \cdots\} = \{C_0, f(e_1), f(e_2), \cdots\},$$

$$C_0 = f(e) - \sum_{k=1}^{\infty} C_k.$$

反之,任取 $b \in l$,$b \leftrightarrow f \in C^*$,其中

$$f(x) = b_1 \lim_{k \to \infty} \xi_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+1} \xi_k.$$

(3) 求 C_0^*:任取 $f \in C_0^*$,令 $C_k = f(e_k)$,因为 $x = \{\xi_k\} \in C_0$ 时,有 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$,所以 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \xi_k$.下面证明 $\{C_k\} \in l$,事实上,对一切自然数 N,取 $x_N = \{\xi_i^{(N)}\}$,其中

$$\xi_i^{(N)} = \begin{cases} \operatorname{sgn} C_i & (i \leqslant N), \\ 0 & (i > N), \end{cases}$$

不妨设 $\| x_N \| = 1$,$x_N \in C_0$ 显然,则

$$f(x_N) = \sum_{i=1}^{N} |C_i|,$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \leqslant \| f \|.$$

另一方面,任取 $\{C_k\} \in l$,我们令

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k C_k \qquad (\forall x = \{\xi_k\} \in C_0),$$

易知 $f\in C_0^*$,且 $\|f\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|$,从而 $C_0^*=l$,且 $\|f\|=\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|$.

32. 求出 $L[a,b]$上有界线性泛函的一般形式.

解 不妨设$[a,b]=[0,1]$,任取 $f\in L^*[0,1]$,设 $p>1$,因为 $x(t)\in L^p[0,1]$时,有

$$\int_0^1|x(t)|\mathrm{d}t\leqslant\left\{\int_0^1|x(t)|^p\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{p}},$$

故 f 可作为$L^p[0,1]$上的有界线性泛函,据文献[2]P108 定理 3.3,存在 $y_p(t)\in L^q[0,1]\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$,使得

$$f(x)=\int_0^1 x(t)y_p(t)\mathrm{d}t\qquad(\forall\, x(t)\in L^p[0,1])\tag{$*$}$$

当$1<p_1<p_2$时,$L^{p_2}[0,1]\subset L^{p_1}[0,1]$,$\forall\, x(t)\in L^{p_2}[0,1]$,有

$$f(x)=\int_0^1 x(t)y_{p_1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 x(t)y_{p_2}(t)\mathrm{d}t.$$

于是据泛函数所对应函数的惟一性,得

$$y_{p_1}(t)=y_{p_2}(t),$$

故 $y_p(t)$与 p 无关,记为 $y(t)$.易知

$$\left\{\int_0^1|y(t)|^q\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|\qquad(\forall\, q>1),$$

令 $q\to\infty$,得

$$\lim_{q\to\infty}\left\{\int_0^1|y(t)|^q\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|,$$

故 $y(t)\in L^\infty[0,1]$,且

$$\|y\|_\infty\leqslant\|f\|.$$

现设 $x(t)\in L[0,1]$,据文献[1]第五章引理 2.1,必存在有界可测函数列 $x_n(t)$,使

$$\int_0^1|x_n(t)-x(t)|\mathrm{d}t\to 0\qquad(n\to\infty).$$

由($*$)知

$$f(x_n)=\int_0^1 x_n(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

因为$|x_n(t)|\leqslant|x(t)|$,利用勒贝格控制收敛定理及 f 的连续性

$$f(x)=\int_0^1 x(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

另一方面,任取 $y(t)\in L^\infty[0,1]$.令

$$f(x) = \int_0^1 x(t)y(t)\mathrm{d}t \qquad (x(t) \in L[0,1]),$$

则 f 是 $L[0,1]$ 上的有界泛函,且

$$\|f\| \leqslant \|y\|_\infty,$$

故

$$\|f\| = \|y\|_\infty, \qquad L^*[0,1] = L^\infty[0,1].$$

33. 证明 $(l^p)^* = l^q (1 < p < +\infty, q = p(p-1)^{-1})$.

本题可参阅刘斯铁尔尼克(Люстерник)著的"泛函分析概要"P188~P189 或者复旦大学编"实变与泛函"下册 P137~P138.

34. 巴拿赫空间 E 称为具有可列基 $\{x_n\}(n=1,2,\cdots)$,如果每个 $x \in E$ 可惟一地表成 $x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n$. 证明

(i) $\{x_n\}$ 中的任意有限个都是线性无关的;

(ii) 令 $f_n(x) = C_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$, 这里 $x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n$, 则 f_n 是 E 上的有界线性泛函数;

(iii) 令 W 为使 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n$ 在 E 中收敛的序列 $\{C_n\}$ 的全体,在 W 中定义范数

$$\|w\| = \sup_m \left\| \sum_{n=1}^{m} C_n x_n \right\| \qquad (w \in W),$$

则 W 为巴拿赫空间;

(iv) 证明 E 是可分的.

证 (i)显然成立,我们先证明(iii),首先 W 显然是赋范线性空间,只要证明 W 的完备性. 任取 $w_k = \{C_n^{(k)}\}$ 为 W 中基本列,则 $\forall \varepsilon > 0$,存在 N,当 $k > N$ 时,对一切自然数 p 有

$$\|w_{k+p} - w_k\| = \sup_m \left\| \sum_{n=1}^{m} (C_n^{(k+p)} - C_n^{(k)}) x_n \right\| < \varepsilon \qquad (*)$$

从而知

$$C_n^{(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} C_n \qquad (\forall n).$$

令 $w = \{C_n\}$,下面证明 $w \in W$,且 $w_k \xrightarrow[k\to\infty]{} w$. 由 $(*)$ 对任一自然数 m,当 $k > N$ 时,有

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} (C_n^{(k+p)} - C_n^{(k)}) x_n \right\| < \varepsilon \qquad (\forall p),$$

令 $p \to \infty$,得

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} (C_n^{(k)} - C_n) x_n \right\| \leqslant \varepsilon \qquad (k > N),$$

从而对任意的自然数 n_1, n_2，成立

$$\left\| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} (C_n^{(k)} - C_n) x_n \right\| \leqslant 2\varepsilon \qquad (k > N),$$

故

$$\left\| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} C_n x_n \right\| \leqslant 2\varepsilon + \left\| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} C_n^{(k)} x_n \right\| \qquad (k > N).$$

固定 $k > N$，由于 $w_k \in W$，则存在 N_1，当 $n_1, n_2 > N_1$ 时，有

$$\left\| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} C_n^{(k)} x_n \right\| < \varepsilon,$$

所以 $n_1, n_2 > N_1$ 时，有

$$\left\| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} C_n x_n \right\| < 3\varepsilon,$$

故 $w = \{C_n\} \in W$，且 $w_k \to w (k \to \infty)$，W 完备得证.

(ii) 作 $W \to E$ 上的映射 T 如下

$$w = (C_n) \in W, \qquad Tw = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n,$$

因为对任意的自然数 m 有

$$\| w \| \geqslant \left\| \sum_{n=1}^{m} C_n x_n \right\|,$$

所以

$$\| w \| \geqslant \lim_{m \to \infty} \left\| \sum_{n=1}^{m} C_n x_n \right\| = \| Tw \|,$$

故 $\| T \| \leqslant 1$，又因 T 一对一，据逆算子定理 $T^{-1} \in \mathscr{B}(E, W)$. 现设

$$x^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(k)} x_n, \qquad x^{(k)} \to 0 \quad (k \to \infty),$$

则

$$w^{(k)} = T^{-1} x^{(k)} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

从而容易证明对 $\forall\, n$，有

$$C_n^{(k)} \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

即

$$f_n(x^{(k)}) \to 0 \qquad (k \to \infty)\ (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

故 f_n 是 E 上的有界线性泛函.

(iv) 因为集合 $\left\{ \sum_{n=1}^{m} r_n x_n \,\middle|\, m \text{ 为任一自然数}, r_n (n = 1, 2, \cdots, m) \text{ 均为有理数} \right\}$

是 E 中的可数稠子集，故 E 可分.

35. 设 $x_n=\{\xi_k^{(n)}\}\in l^p(n=1,2,3,\cdots)$，则 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $\{\xi_k\}\in l^p$ 的充要条件是 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|x_n\|<+\infty$，且对每个 k，$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k$.

证 必要性：设 $x_n\xrightarrow{w}x$，则据共鸣定理易知

$$\sup_n\|x_n\|<+\infty,$$

我们只要证明对每个 k，$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k$，取

$$f\leftrightarrow\{\overbrace{0,0,\cdots,0,1}^{k\text{位}},0,\cdots\}\in l^q=(l^p)^*,$$

则

$$f(x_n)=\xi_k^{(n)},\qquad f(x)=\xi_k.$$

因为 $x_n\xrightarrow{w}x$，所以

$$\xi_k^{(n)}\to\xi_k\qquad(n\to\infty).$$

充分性：设 $p>1$，$x,x_n\in l^p=(l^q)^*$，取 $e_n\in l^q$，对任一自然数 m，显然有 $y=\sum\limits_{k=1}^m\eta_ke_k\in l^q$，因为 $\xi_k^{(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\xi_k$，故 $x_n(y)\xrightarrow[n\to\infty]{}x(y)$，由于 $\left\{\sum\limits_{k=1}^m\eta_ke_k\right\}$ 全体在 l^q 中稠密，利用条件 $\{\|x_n\|\}$ 一致有界立即得 $x_n\xrightarrow[l^p]{w}x\ (p>1)$.

当 $p=1$ 时，结论不一定成立. 例如，取 $e_n\in l$，其中 $e_n=\{\xi_k^{(n)}\}=\{\overbrace{0,\cdots,0,1}^{n\text{位}},0,\cdots\}$，显然满足条件 $\|e_n\|=1$，对每个 k，$\xi_k^{(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. 但对于 $f\leftrightarrow\{a_i\}\in l^\infty$，其中 a_i 不收敛于零$(i\to\infty)$，则 $f(e_n)=a_n$ 不收敛于零$(n\to\infty)$，所以 $\{e_n\}$ 在 l^1 中不弱收敛于零.

36. 证明 l 中点列的弱收敛与强收敛等价.

证 设 $x_n\xrightarrow{w}x$，不妨设 $x=0$，则对一切 $y=\{a_i\}\in l^\infty$，有

$$\sum_{i=1}^\infty a_i\xi_i^{(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

此处 $x_n=\{\xi_i^{(n)}\}$. 我们证明 $x_n\xrightarrow{\text{强}}0$，即

$$\sum_{i=1}^\infty|\xi_i^{(n)}|\to0\qquad(n\to\infty).$$

设不然，存在 $\varepsilon_0>0$ 及 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，使

$$\sum_{i=1}^\infty|\xi_i^{(n_k)}|\geqslant\varepsilon_0\qquad(k=1,2,3,\cdots),$$

不妨设上面的不等式对一切 n 都成立. 因为 $x_n\in l$，故对每个 n 都有

$$\sum_{i=k}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

又因为 $x_n \xrightarrow{w} 0$，故对每一个 i，有

$$\lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = 0,$$

则若取定 i_1，必存在 n_1，使

$$\sum_{i=1}^{i_1} |\xi_i^{(n_1)}| < \frac{\varepsilon_0}{5},$$

因为 $\{\xi_i^{(n_1)}\} \in l$，必存在 $i_2 > i_1$，使

$$\sum_{i=i_2+1}^{\infty} |\xi_i^{(n_1)}| < \frac{\varepsilon_0}{5},$$

故

$$\sum_{i=i_1+1}^{i_2} |\xi_i^{(n_1)}| > \frac{3\varepsilon_0}{5}.$$

对于 i_2，又存在 $n_2 > n_1$，使

$$\sum_{i=1}^{i_2} |\xi_i^{(n_2)}| < \frac{\varepsilon_0}{5},$$

重复上述步骤，得 $i_3 > i_2$，使

$$\sum_{i=i_2+1}^{i_3} |\xi_i^{(n_2)}| > \frac{3\varepsilon_0}{5}.$$

一般地可得 $i_k > i_{k-1}$ 及 $n_k > n_{k-1}$ $(k=2,3,\cdots)$，使

$$\sum_{i=1}^{i_k} |\xi_i^{(n_k)}| < \frac{\varepsilon_0}{5},$$

$$\sum_{i=i_{k+1}+1}^{\infty} |\xi_i^{(n_k)}| < \frac{\varepsilon_0}{5},$$

$$\sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}} |\xi_i^{(n_k)}| > \frac{3\varepsilon_0}{5}.$$

我们令

$$a_i = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant i \leqslant i_1, \\ \operatorname{sgn}\xi_i^{(n_k)}, & i_k < i \leqslant i_{k+1} \quad (k = 1,2,3,\cdots), \end{cases}$$

则 $\{a_i\} \in l^{\infty}$，而

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i^{(n_k)} = \sum_{i=1}^{i_k} a_i \xi_i^{(n_k)} + \sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}} a_i \xi_i^{(n_k)} + \sum_{i=i_{k+1}+1}^{\infty} a_i \xi_i^{(n_k)}$$

$$\geqslant -\sum_{i=1}^{i_k}|\xi_i^{(n_k)}| + \sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}}|\xi_i^{(n_k)}| - \sum_{i=i_{k+1}+1}^{\infty}|\xi_i^{(n_k)}| > \frac{\varepsilon_0}{5}$$

对任何自然数 k 成立,这与 $x_{n_k}\xrightarrow{w}0$ 矛盾,故一定有 $x_n\xrightarrow{强}0$.

37. 巴拿赫空间 E 称为序列弱完备的,是指若对每个 $f\in E^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在,则存在 $x\in E$ 使 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x. 证明:

(i) 自反空间都是序列弱完备的;

(ii) $L[a,b]$, l 是序列弱完备的;

(iii) $C[a,b]$ 不是序列弱完备的.

证 (i) 设 $E=E^{**}$,并设对一切 $f\in E^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在,记 $x_n^{**}=Jx_n$ (J 为 $E\to E^{**}$ 的自然嵌入映射),则 $x_n^{**}(f)=f(x_n)$ 对一切 $f\in E^*$ 收敛,由共鸣定理知存在 $x^{**}\in E^{**}$,使

$$\lim_{n\to\infty}x_n^{**}(f)=x^{**}(f)\qquad(\forall f\in E^*).$$

令 $x^{**}=Jx$,就得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)\qquad(\forall f\in E^*),$$

故 $x_n\xrightarrow{w}x$, E 序列弱完备.

(ii) 对于 $L[a,b]$,据吉田耕作(Kôsku Yosida)著"泛函分析"(第 5 版)p121 定理 4:"设 $\{x_n\}\subset L[a,b]$,则 $x_n\xrightarrow{w}x\in L[a,b]$ 的充要条件是:(a) $\sup\limits_n\|x\|<+\infty$, (b) 对任一可测集 $B\subset[a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_B x_n(t)\mathrm{d}m$ 存在有限".

现设对一切 $f\in L^*[0,1]=L^\infty[0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在有限,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)f(t)\mathrm{d}m$ 存在有限,取

$$f(t)=\chi_B(t)\in L^\infty[0,1],$$

则可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_B x_n(t)\mathrm{d}m\ 存在有限.$$

又据共鸣定理,$\{\|x_n\|\}$ 有界,再利用上面的定理,则存在 $x(t)\in L[a,b]$,使 $x_n\xrightarrow{w}x$,故 $L[a,b]$ 序列弱完备.

对于 l,利用 $l=L(\mathbf{N},\mathscr{B},m)$,其中 $\mathbf{N}$ 为自然数集,$\mathscr{B}$ 为 $\mathbf{N}$ 的一切子集组成的集类,$B\in\mathscr{B}$ 时,$mB=B$ 中含有自然数的个数,故 l 也是序列弱完备的(据吉田耕作著"泛函分析"第 5 版 P121 定理 4). 也可以直接证明. 设 $x_n=\{\xi_i^{(n)}\}\in l$,对任一 $f\in l^\infty$, $\{f(x_n)\}$ 收敛,则由共鸣定理知 $\{\|x_n\|\}$ 有界,且对每个 i, $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}=\xi_i$,以

及对每个 $f\in l^\infty$，$\{f(x_n)\}$ 收敛. 记 $x=\{\xi_i\}$，易证 $x\in l$，故不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}=0$ $(\forall i)$. 则 $f\leftrightarrow\{a_i\}\in l^\infty$，$\left\{f(x_n)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i\cdot\xi_i^{(n)}\right\}$ 为柯西(Cauchy)点列. 我们来证明 $\{x_n\}$ 为 l 中基本列. 设不然，则存在 $\varepsilon_0>0$ 以及子序列 $\{n_k\}$，$\{p_{n_k}\}$ (n_k，p_{n_k} 均为自然数)，使

$$\|x_{n_k+p_{n_k}}-x_{n_k}\|=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n_k+p_{n_k})}-\xi_i^{(n_k)}|\geqslant\varepsilon_0\quad(k=1,2,3,\cdots),$$

不妨设

$$\|x_{n+p_n}-x_n\|=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n+p_n)}-\xi_i^{(n)}|\geqslant\varepsilon_0\qquad(n=1,2,3,\cdots),$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}=0$ $(\forall i)$，取定 i_1，必存在 n_1，使

$$\sum_{i=1}^{i_1}|\xi_i^{(n_1+p_{n_1})}-\xi_i^{(n_1)}|<\frac{\varepsilon_0}{5},$$

因为 $\{\xi_i^{(n_1+p_{n_1})}-\xi_i^{(n_1)}\}\in l$，必存在 $i_2>i_1$，使

$$\sum_{i=i_2+1}^{\infty}|\xi_i^{(n_1+p_{n_1})}-\xi_i^{(n_1)}|<\frac{\varepsilon_0}{5},$$

故

$$\sum_{i=i_1+1}^{i_2}|\xi_i^{(n_1+p_{n_1})}-\xi_i^{(n_1)}|>\frac{3\varepsilon_0}{5},$$

类似于本章第 36 题，一般地可得 $i_k>i_{k-1}$，$n_k>n_{k-1}$ $(k=2,3,4,\cdots)$，使

$$\sum_{i=1}^{i_k}|\xi_i^{(n_k+p_{n_k})}-\xi_i^{(n_k)}|<\frac{\varepsilon_0}{5},$$

$$\sum_{i=i_{k+1}+1}^{\infty}|\xi_i^{(n_k+p_{n_k})}-\xi_i^{(n_k)}|<\frac{\varepsilon_0}{5},$$

$$\sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}}|\xi_i^{(n_k+p_{n_k})}-\xi_i^{(n_k)}|>\frac{3\varepsilon_0}{5}.$$

令

$$a_i=\begin{cases}0, & 1\leqslant i\leqslant i_1,\\ \operatorname{sgn}[\xi_i^{(n_k+p_{n_k})}-\xi_i^{(n_k)}], & i_k<i\leqslant i_{k+1},\end{cases}\qquad(k=1,2,3,\cdots)$$

则 $f=\{a_i\}\in l^\infty$，但

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i[\xi_i^{(n_k+p_{n_k})}-\xi_i^{(n_k)}]>\frac{\varepsilon_0}{5}\qquad(k=1,2,3,\cdots),$$

这与 $f(x_n)$ 是基本列矛盾，故 x_n 在 l 中弱收敛于 0，即 $x_n\xrightarrow{w}0$.

(iii) 对于 $C[a,b]$，不妨设$[a,b]=[0,1]$,取

$$x(t)=\begin{cases}1, & t=1\text{ 时},\\ 0, & t\neq 1\text{ 时},\end{cases}$$

则

$$x_n(t)=t^n\in C[0,1],\ x_n(t)\xrightarrow{\text{处处}}x(t).$$

$f\in C^*[0,1]$时,存在 $g(t)\in V[0,1]$,使

$$f(x_n)=\int_0^1 x_n(t)\mathrm{d}g(t).$$

据勒贝格控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\mathrm{d}g(t)=\int_0^1 x(t)\mathrm{d}g(t),$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在有限(对一切 $f\in C^*[0,1]$), 据文献[2] P136 例 5, 若 $x_n(t)\xrightarrow{w}\bar{x}(t)\in C[0,1]$,必有 $\bar{x}(t)=x(t)$,但 $x(t)\overline{\in} C[0,1]$,故$\{x_n\}$不可能弱收敛于 $C[0,1]$中某一元素,因此 $C[0,1]$不是序列弱完备的.

38. 赋范线性空间 E 称为一致凸的,是指对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,只要 $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$($\|x\|=\|y\|=1$),就有 $\|x+y\|\leqslant 2-\delta$. 证明

(i) $C[a,b]$不是一致凸的;

(ii) $L[a,b]$,l 都不是一致凸的;

(iii) 在一致凸空间中,若$\{x_n\}$弱收敛于 x,且 $\|x_n\|\to\|x\|$,则$\{x_n\}$强收敛于 x.

证 (i) 在 $C[a,b]$中,取 $x(t)=1$, $y(t)=\dfrac{t-a}{b-a}$,则

$$\|x\|=\|y\|=\frac{\|x+y\|}{2}=\|x-y\|=1.$$

设 $0<\varepsilon<1$,则 $\|x-y\|>\varepsilon$,但$\dfrac{\|x+y\|}{2}>1-\delta$ ($\forall\,\delta>0$),故 $C[a,b]$不是一致凸的.

(ii) 在 $L[a,b]$中,取 $x(t)=\dfrac{1}{b-a}$, $y(t)=\dfrac{2(t-a)}{(b-a)^2}$,则

$$\|x\|=\|y\|=\frac{\|x+y\|}{2}=1,$$

$$\|x-y\|=\frac{1}{2}.$$

设 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$,则

$$\|x-y\|>\varepsilon,$$

但

$$\frac{\|x+y\|}{2}>1-\delta \quad (\forall \delta>0),$$

故 $L[a,b]$不是一致凸的.

在 l 中,取 $x=e_1, y=e_2, 0<\varepsilon<2$,则

$$\|x\|=\|y\|=1,\ \|x-y\|=2>\varepsilon,$$

而

$$\frac{\|x+y\|}{2}=1>1-\delta \quad (\forall \delta>0),$$

故 l 也不是一致凸的.

(iii) **证法 1** 设 E 为一致凸空间,$x_n, x\in E$,$x_n \xrightarrow{w} x$,且 $\|x_n\|\to\|x\|$,我们要证明 $x_n \xrightarrow{强} x$.设不然,则存在 $\varepsilon_0>0$ 及$\{n_k\}$,使

$$\|x_{n_k}-x\|\geqslant\varepsilon_0.$$

不妨设 $x\neq 0$ 及 $\|x_{n_k}\|=\|x\|=1$,据一致凸性,存在 $\delta=\delta(\varepsilon_0)>0$,使

$$\frac{\|x_{n_k}+x\|}{2}\leqslant 1-\delta.$$

又据哈恩-巴拿赫定理,存在 $f\in E^*$,使

$$\|f\|=1,\ f(x)=\|x\|,\ \left|f\left(\frac{x_{n_k}+x}{2}\right)\right|\leqslant 1-\delta,$$

但

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{x_{n_k}+x}{2}\right)=f(x)=\|x\|=1,$$

矛盾,故 $x_n \xrightarrow{强} x$.

证法 2 不妨设 $\|x\|=\|x_n\|=1\ (n=1,2,\cdots)$,首先容易证明,若 $2-\|x+x_n\|\to 0\ (n\to\infty)$,则 $\|x_n-x\|\to 0\ (n\to\infty)$,现在 $x_n+x \xrightarrow{w} 2x$,则

$$2=2\|x\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|x_n+x\|\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\|x_n+x\|$$
$$\leqslant\|x\|+\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=2,$$

即 $\|x_n+x\|\to 2\ (n\to\infty)$,故 $x_n \xrightarrow{强} x$.

39. 设$\{x_n\}$是巴拿赫空间 E 中的一个点列,如果对于每个 $f\in E^*$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|<+\infty,$$

则必存在正数 μ,使对一切 $f\in E^*$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|\leqslant\mu\|f\|.$$

证法 1 令 $I=\{\alpha \mid \alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)$，$m$ 为任一自然数，$\varepsilon_i=\pm 1, i=1,2,\cdots,m\}$，$f\in E^*$，令

$$g_\alpha(f)=f\left(\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right),$$

因为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|<+\infty$，所以 $g_\alpha\in E^{**}$，且

$$\sup_{\alpha\in I}|g_\alpha(f)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|<+\infty \qquad (\forall f\in E^*),$$

则据共鸣定理，必存在正数 μ，使

$$\sup_\alpha\|g_\alpha\|\leqslant\mu.$$

不妨设 f 为实泛函，取 $\varepsilon_i=\operatorname{sgn}f(x_i)(f(x_i)\neq 0)$，并规定，$f(x_i)=0$ 时，$\varepsilon_i=1$，则对任一自然数 m

$$g_\alpha(f)=\sum_{i=1}^{m}|f(x_i)|\leqslant\mu\|f\|,$$

故

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|\leqslant\mu\|f\|.$$

若 f 为复泛函，则

$$f(x)=\varphi(x)-\mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x),$$

其中 φ 为实泛函，且 $\|\varphi\|=\|f\|$，从而可证

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|\leqslant\mu\|f\|.$$

证法 2 作算子序列 $T_n\in\mathscr{B}(E^*,l)$ 如下

$$T_n f=\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),0,\cdots\} \qquad (f\in E^*),$$

$$\sup_{n\geqslant 1}\|T_n f\|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|<+\infty,$$

则存在 $\mu>0$，使

$$\sup_n\|T_n\|\leqslant\mu,$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|f(x_n)|=\lim_{N\to\infty}\|T_N f\|\leqslant\mu\|f\| \qquad (\forall f\in E^*).$$

40. $\{x_n\}$ 同题 39，则对每个 $f\in E^*$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|$ 收敛的充要条件是存在正数 μ，使对一切自然数 m，以及任意的 $\varepsilon_n=\pm 1$，有

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n x_n\right\|\leqslant\mu.$$

证 必要性:同上题,令 $g_a(f) = f\left(\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right)$ ($\varepsilon_i = \pm 1$),则 $g_a \in E^{**}$,且

$$\| g_a \| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i x_i \right\|.$$

另一方面,据哈恩-巴拿赫延拓定理,存在 $f \in E^*$,使

$$f\left(\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right) = \left\| \sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i \right\|, \qquad \| f \| = 1,$$

所以

$$\| g_a \| = \left\| \sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i \right\|.$$

由 39 题知对任意的自然数 m 及 $\varepsilon_n = \pm 1$,有

$$\left\| \sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n x_n \right\| \leqslant \mu.$$

充分性:设对任一自然数 m 及 $\varepsilon_n = \pm 1$ ($n = 1, 2, \cdots, m$)有

$$\left\| \sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n x_n \right\| \leqslant \mu,$$

$f \in E^*$,我们取 $\varepsilon_n = \operatorname{sgn} f(x_n)$,并规定 $f(x_n) = 0$ 时,$\varepsilon_n = 1$,这里也设 f 是实泛函,则

$$\sum_{i=1}^{m} | f(x_i) | = f\left(\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right) \leqslant \mu \| f \| \qquad (\forall\, m),$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty} | f(x_n) | < +\infty.$$

41. 求证上题中的条件等价于下列条件:存在 $\mu > 0$,使对任意的一串自然数 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$(这里 k 也是任意的),有

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| \leqslant \mu.$$

证 设条件 $\left\| \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| \leqslant \mu$ 成立(对一切 k 以及一切 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$),则

$$\left\| \sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n x_n \right\| \leqslant \| \Sigma' x_n \| + \| \Sigma'' x_n \| \leqslant 2\mu,$$

这里 Σ',Σ''分别表示对 $\varepsilon_n > 0$,$\varepsilon_n < 0$ 求和.

反之,设条件 $\left\| \sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n x_n \right\| \leqslant \mu$ 成立(m 为任一自然数,$\varepsilon_n = \pm 1$),则

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \sum_{n=1}^{n_k} (\varepsilon_n^{(1)} - \varepsilon_n^{(2)}) x_n \right\| \leqslant \mu,$$

其中 $\varepsilon_n^{(1)}\equiv 1$，$\varepsilon_n^{(2)}=1\ (n\neq n_i)$，$\varepsilon_n^{(2)}=-1\ (n=n_i)$.

42. 设 $\{f_n\}$ 是巴拿赫空间 E 的共轭空间 E^* 中的点列，则 $\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(x)|$ 对每个 $x\in E$ 收敛的充要条件是对每个 $F\in E^{**}$，$\sum_{i=1}^{\infty}|F(f_i)|$ 收敛.

证 设对每个 $F\in E^{**}$，$\sum_{i=1}^{\infty}|F(f_i)|<+\infty$. 因为

$$E\subset E^{**},\qquad x\leftrightarrow x^{**}=Jx\in E^{**},$$

则对 $\forall\, x\in E$，成立

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(x)|=\sum_{i=1}^{\infty}|x^{**}(f_i)|<+\infty.$$

反之，设对每个 $x\in E$，$\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(x)|<+\infty$，令

$$\varphi_\alpha(x)=\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i f_i(x),$$

其中 m 为任一自然数，$\varepsilon_i=\pm 1\ (i=1,2,\cdots,m)$，则 $\varphi_\alpha\in E^*$，且

$$\sup_\alpha|\varphi_\alpha(x)|<+\infty\qquad(\forall\, x\in E),$$

由共鸣定理得

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n f_n\right\|=\|\varphi_\alpha\|\leqslant\mu.$$

现任取 $F\in E^{**}$，不妨设 F 为实泛函，令 $\varepsilon_n=\operatorname{sgn}F(f_n)\,(F(f_n)\neq 0)\,(n=1,2,\cdots,m)$，并规定 $F(f_n)=0$ 时，$\varepsilon_n=1$，则

$$\sum_{n=1}^{m}|F(f_n)|=\left|\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n F(f_n)\right|=\left|F\left(\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n f_n\right)\right|$$
$$\leqslant\|F\|\mu,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}|F(f_n)|<+\infty.$$

43. 在 $L^p[0,1]\,(1<p<+\infty)$ 中作一个弱收敛，但不强收敛的点列.

解 不妨设 $[a,b]=[0,\pi]$，在 $L^p[0,\pi]$ 中令

$$f_n(x)=(\operatorname{sgn}\sin nx)|\sin nx|^{\frac{2}{p}},$$

则

$$\|f\|=\left\{\int_0^\pi\sin^2 nx\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{p}},$$

且容易证明对一切 $t\in[0,\pi]$ 有

$$\int_0^t f_n(x)\mathrm{d}x \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

利用文献[2]p137 例 6 立即知 $f_n \xrightarrow{w} 0$，但 $f_n \overset{s}{\not\to} 0$.

44. 设 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数，如果对于任一 $g(t)\in L^q[a,b]$ $(1\leqslant q\leqslant +\infty)$，有 $f(t)g(t)\in L[a,b]$，则 $f(t)\in L^p[a,b]$ (当 $1<q<+\infty$ 时，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$；当 $q=1$ 时，$p=+\infty$；当 $q=+\infty$ 时，$p=1$).

证 设 $1<q<+\infty$，令

$$f_n(t)=\begin{cases} f(t), & |f(t)|\leqslant n \text{ 时},\\ 0, & |f(t)|>n \text{ 时},\end{cases}$$

则

$$f_n(t)\in L^p[a,b] \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

作 $L^q[a,b]$ 上的线性泛函如下

$$F_n(g)=\int_a^b g(t)f_n(t)\mathrm{d}t \qquad (\forall g\in L^q[a,b]),$$

易知 $F_n\in(L^p[a,b])^*$，且 $\|F_n\|=\|f_n\|_p$. 因为 $f(t)\in L[a,b]$，故 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 又因为

$$|f_n(t)g(t)|\leqslant|f(t)g(t)|\in L[a,b],$$

由勒贝格控制收敛定理立即知，对每个 $g\in L^q[a,b]$，有

$$\lim_{n\to\infty}|F_n(g)|=\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right|<+\infty,$$

故据共鸣定理可得

$$\|f_n\|_p\leqslant M \qquad (M>0 \text{ 为常数}),$$

再由法图定理可得

$$\left\{\int_a^b |f(t)|^p\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant M,$$

即

$$f(t)\in L^p[a,b].$$

当 $q=1$ 时，$p=+\infty$，则由 $\|F_n\|=\|f_n\|_\infty\leqslant M$，立即可得 $\|f\|_\infty\leqslant M$，故亦有 $f(t)\in L^p[a,b]$.

当 $q=+\infty$ 时，只需取 $g(t)=1\in L^\infty[a,b]$，就有 $f(t)\in L[a,b]$.

45. 设 $\{\eta_n\}$ 为一数列，若对一切 $x=\{\xi_n\}\in l^q(1\leqslant q\leqslant\infty)$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n\xi_n$ 收敛，则 $\{\eta_n\}\in l^p$(这里的 p 与上题同).

证 当 $q=+\infty$ 时,显然有 $\{\eta_n\}\in l$.

当 $1\leqslant q<+\infty$ 时,令

$$F_n \leftrightarrow \{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,0,\cdots\} \in l^p,$$

$$F_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\eta_k,$$

由条件知对一切 $x=\{\xi_k\}\in l^q$,有

$$\lim_{n\to\infty}|F_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k\right|<+\infty,$$

故当 $q>1$ 时,有

$$\|F_n\|=\left\{\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant M \qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

当 $q=1$ 时,有

$$\|F_n\|=\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|\eta_k|\leqslant M \qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

从而 $\{\eta_n\}\in l^p$.

46. 设数列 $\{\alpha_n\}\to 0\ (n\to\infty)$,在 l 中定义算子 $T:y=Tx$,其中 $x=\{\xi_n\}$,$y=\{\alpha_n\xi_n\}$,证明 T 是全连续算子.

证 令 $T_nx=\{\alpha_1\xi_1,\alpha_2\xi_2,\cdots,\alpha_n\xi_n,0,\cdots\}$,则 T_n 是 l 中的有穷秩算子,任给 $\varepsilon>0$,$\exists N$,当 $n>N$ 时,有 $|\alpha_n|<\varepsilon$,则 $n>N$ 时,有

$$\|(T_n-T)x\|<\varepsilon\|x\|,$$

故 $\|T_n-T\|\to 0\ (n\to\infty)$,$T$ 为全连续算子.

47. 设 M 为赋范线性空间 E 的闭子空间,设 x_0 是 M 中某个弱收敛点列的极限,则 $x_0\in M$.

证 设 $x_0\overline{\in}M$,则 $d=\rho(x_0,M)>0$,由哈恩-巴拿赫定理,必存在 $f\in E^*$,使

$$f(x_0)=d,\ f(x)=0 \quad (\forall x\in M),$$

但由条件存在 $x_n\in M$,$x_n\xrightarrow{w}x_0$,则

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)=0,$$

矛盾,故 $x_0\in M$.

48. 设 E、E_1 均为赋范线性空间,S、$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$,且 S、T 全连续,证明 $\alpha S+\beta T$ 也是全连续的,这里 α,β 是数.

本题直接据全连续算子定义即可得.

49. 用 $\mathscr{L}^2(-\infty,+\infty)$ 表示定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可测函数,且满足

$$\|x\|^2=\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\mathrm{d}t<\infty \tag{1}$$

的实值函数全体,证明 $\mathscr{L}^2(-\infty,+\infty)$ 中的零元为满足 $\overline{\lim\limits_{T\to+\infty}}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\mathrm{d}t=0$

的元素.

50. 用 $C_0(-\infty,+\infty)$ 表示定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上且在某个有限区间之外为零的连续函数全体,这里的有限区间将随着函数的不同而不同.问 $C_0(-\infty,+\infty)$ 按范数

$$\|x\| = \sup_{t\in(-\infty,+\infty)} |x(t)|$$

导出的距离是否完备?若不完备,试求出它的完备化空间.

解 我们记

$$\widetilde{C}_0 = \{x(t)\in C(-\infty,+\infty): \lim_{t\to\infty} x(t) = 0\},$$

$x(t)\in\widetilde{C}_0$ 时,规定范数

$$\|x\| = \sup_{t\in(-\infty,+\infty)} |x(t)|,$$

可以证明 $\widetilde{C}_0$ 是一个完备的赋范线性空间.任取 $x(t)\in\widetilde{C}_0, x(t)\overline{\in} C_0(-\infty,+\infty)$,若令连续函数 $x_n(t)$ 如下

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t), & t\in[-n,n], \\ 0, & t\in\left(-\infty,-n-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[n+\dfrac{1}{2},+\infty\right), \\ \text{线性}, & t\in\left[-n-\dfrac{1}{2},-n\right]\cup\left[n,n+\dfrac{1}{2}\right], \end{cases}$$

则 $x_n(t)\in C_0(-\infty,+\infty)$,且 $\{x_n(t)\}$ 是 $C_0(-\infty,+\infty)$ 中的基本列,显然 $\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty)$,但 $x(t)\overline{\in} C_0(-\infty,+\infty)$,故 $C_0(-\infty,+\infty)$ 不完备,$\widetilde{C}_0$ 是 $C_0(-\infty,+\infty)$ 的完备化空间.

51. 设 E 为巴拿赫空间,$A\subset E$ 为闭子集,$B\subset E$ 为紧子集,证明 $A+B=\{x+y: x\in A, y\in B\}$ 是闭的.

证 设 $x_n+y_n\in A+B, x_n+y_n\to z\ (n\to\infty)$,其中 $x_n\in A, y_n\in B$,因为 B 是紧集,我们不妨设 $y_n\to y_0\in B$,则

$$x_n = (x_n+y_n)-y_n \to z-y_0 \qquad (n\to\infty).$$

令

$$x_0 = z-y_0,$$

因为 A 闭,$x_n\in A$,则 $x_0\in A$,于是

$$z = x_0+y_0\in A+B,$$

这就证明了 $A+B$ 的闭性.

52. 证明空间 S(见文献[2]P.18 例 10)不可赋范,即在 S 上不可能定义一个范数,使得由这个范数导出的拓扑与 S 的原拓扑等价.

证 设存在 S 上的一个范数 $\|\cdot\|$,使 S 由 $\|\cdot\|$ 导出的拓扑与原拓扑等价,则对 $(S,\|\cdot\|)$ 中的开球 $O=\{x\in S: \|x\|<1\}$ 必存在邻域 $U_\delta\subset(S,\rho)$,其中

$$U_\delta=\{x(t)\in S:\rho(x,0)=\int_E\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}\mathrm{d}t<\delta\},$$

使得

$$U_\delta\subset O.$$

不妨设 $0<\delta<1$ 以及 $m([0,\delta]\cap E)>0$，我们令

$$x(t)\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{t}, & t\in[0,\delta]\cap E,\\ 0, & t\in E-[0,\delta],\end{cases}$$

因为

$$\rho(x,0)\leqslant\int_0^\delta\frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}}\mathrm{d}t=\int_0^\delta\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$=\ln(1+\delta)<\delta,$$

则 $x(t)\in U_\delta$，又因为对任意的 $\lambda>1$

$$\rho(\lambda x(t),0)\leqslant\int_0^\delta\frac{\frac{\lambda}{t}}{1+\frac{\lambda}{t}}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\delta\frac{\lambda}{t+\lambda}\mathrm{d}t$$

$$=\lambda\ln\left(1+\frac{\delta}{\lambda}\right)$$

$$<\delta,$$

故对一切 $\lambda>1$，$\lambda x(t)\in U_\delta\subset O$，这是不可能的，从而 S 不可赋范.

53. 设 X 为赋范线性空间，$X\neq\{0\}$，证明 X 完备的充分必要条件是单位球面 $S_1=\{x\in X:\|x\|=1\}$ 完备.

54. 设 E 是巴拿赫空间，E_1,E_2 是 E 的闭子空间，且 $E=E_1\dot{+}E_2$（$E_1\dot{+}E_2$ 表示直接和，定义见文献[2]P58），证明存在 $M>0$，使得对一切 $x\in E$，有

$$\|x_1\|\leqslant M\|x\|,\qquad\|x_2\|\leqslant M\|x\|,$$

其中 $x_i\in E_i(i=1,2)$ 满足 $x=x_1+x_2$.

证法 1 在 $E=E_1+E_2$ 中定义新范数

$$|||x|||=\|x_1\|+\|x_2\|\qquad(x=x_1+x_2\in E),$$

容易证明 $(E,|||\cdot|||)$ 完备，且

$$\|x\|=\|x_1+x_2\|\leqslant|||x|||,$$

则据巴拿赫逆算子定理的推论，存在 $K>0$，使对一切 $x\in E$，有

$$K|||x|||\leqslant\|x\|,$$

于是

$$\|x_i\| \leqslant \frac{1}{K}\|x\| \qquad (i=1,2).$$

证法 2 定义映射 $T_i: E=E_1 \dot{+} E_2 \to E_i$ 上 $(i=1,2)$如下

$$T_i(x_1+x_2)=x_i \qquad (i=1,2),$$

则可以证明 T_i 是 E 到 E_i 的闭线性算子.由闭图像定理,T_i 有界$(i=1,2)$.令 $M=\max(\|T_1\|,\|T_2\|)$,则

$$\|x_i\| \leqslant M\|x\| \qquad (i=1,2).$$

55. 设 E 为巴拿赫空间,F 是 E 的闭子空间,则自然同态映射 $E\to E/F$ 将 E 的开单位球映为 E/F 的开单位球.

证 记 $E\to E/F$ 的自然同态映射为 T,E 的开单位球为 S,$S=\{x\in E:\|x\|<1\}$,则 $x_0\in S$ 时

$$\|\tilde{x}_0\| = \|Tx_0\| = \inf_{x\in \tilde{x}_0}\|x\| \leqslant \|x_0\| < 1,$$

故 T 将 E 的开单位球映为 E/F 的开单位球.

56. 设 E 为赋范线性空间,F 为 E 的闭子空间,则 E 完备的充分必要条件是 F 与 E/F 完备.

证 必要性:设 E 完备,F 完备显然,我们证明 E/F 也完备.任取 E/F 中的基本列$\{\tilde{x}_n\}$,则存在子序列$\{\tilde{x}_{n_k}\}$,使

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\tilde{x}_{n_{k+1}}-\tilde{x}_{n_k}\| < \infty.$$

取定 $x_1\in\tilde{x}_{n_1}$,必存在 $x_2\in\tilde{x}_{n_2}$,使

$$\|x_2-x_1\| \leqslant \|\tilde{x}_{n_2}-\tilde{x}_{n_1}\|+\frac{1}{2},$$

又因为对取定的 x_2,当 x_3 取遍 $\tilde{x}_{n_3}$ 时,x_3-x_2 必取遍 $\tilde{x}_{n_3}-\tilde{x}_{n_2}$,故存在 $x_3\in\tilde{x}_{n_3}$,使

$$\|x_3-x_2\| \leqslant \|\tilde{x}_{n_3}-\tilde{x}_{n_2}\|+\frac{1}{2^2},$$

如此继续下去,可得序列$\{x_k\}\subset E$,满足

$$\|x_{k+1}-x_k\| \leqslant \|\tilde{x}_{n_{k+1}}-\tilde{x}_{n_k}\|+\frac{1}{2^k}, \qquad k=1,2,3,\cdots,$$

故$\{x_k\}$是 E 中基本列.E 完备,则 $x_n\to x\in E$,令 $\tilde{x}$ 为 x 所确定的类,则

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}_n-\tilde{x}\| &\leqslant \|\tilde{x}_n-\tilde{x}_{n_k}\|+\|\tilde{x}_{n_k}-\tilde{x}\| \\ &\leqslant \|\tilde{x}_n-\tilde{x}_{n_k}\|+\|x_k-x\|,\end{aligned}$$

故 $\tilde{x}_n\to\tilde{x}\in E/F$,$E/F$ 完备.

充分性:设 $F, E/F$ 均完备,则对任一 $x \in E$, $x+F$ 也是完备的.现任取 E 中基本列 $\{x_n\}$,易知 $\{\tilde{x}_n\}$ 是 E/F 中的基本列,由于 E/F 完备,必存在 $\tilde{x} \in E/F$,使 $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ $(n \to \infty)$.因为

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\| = \inf_{\substack{x_0 \in \tilde{x}_n \\ y \in \tilde{x}}} \|x_n - y\| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

则对每一个自然数 k,存在 $x_{n_k} \in \tilde{x}_{n_k}$, $y_k \in \tilde{x}$,使

$$\|x_{n_k} - y_k\| < \frac{1}{k},$$

于是

$$\|y_{k+p} - y_k\| \leqslant \|y_{k+p} - x_{n_{k+p}}\| + \|x_{n_{k+p}} - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - y_k\|,$$

故 $\{y_k\}$ 是 $x+F$ 中的基本列,$x+F$ 完备,必存在 $y \in x+F$,使 $y_k \to y$ $(k \to \infty)$.又

$$\|x_{n_k} - y\| \leqslant \|x_{n_k} - y_k\| + \|y_k - y\|,$$

故 $x_{n_k} \to y \in E$.但 $\{x_n\}$ 为 E 中基本列,故必有 $x_n \to y$ $(n \to \infty)$,E 完备性得证.

57. 设 E 为复巴拿赫空间,$T_1, T_2 \in \mathscr{B}(E)$,如果 T_1, T_2 可换,则

$$r(T_1 + T_2) \leqslant r(T_1) + r(T_2),$$

其中 $r(T)$ 为 T 的谱半径.

证 因为 $r(T_i) = \lim\limits_{n \to \infty} \|T_i^n\|^{\frac{1}{n}}$ $(i=1,2)$,则对任给的 $\varepsilon > 0$, $\dfrac{\|T_i^n\|}{(r(T_i)+\varepsilon)^n}$ 是有界数列 $(i=1,2)$,故存在常数 $M_\varepsilon > 0$,使得对一切自然数 n,有

$$\|T_i^n\| \leqslant M_\varepsilon (r(T_i) + \varepsilon)^n \qquad (i = 1,2),$$

$$\begin{aligned}\|(T_1 + T_2)^n\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_1^k T_2^{n-k}\right\| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|T_1^k\| \cdot \|T_2^{n-k}\| \\ &\leqslant M_\varepsilon^2 [r(T_1) + r(T_2) + 2\varepsilon]^n,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \to \infty} \|(T_1 + T_2)^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r(T_1) + r(T_2) + 2\varepsilon.$$

又因为 $\varepsilon > 0$ 是任取的,故

$$r(T_1 + T_2) \leqslant r(T_1) + r(T_2).$$

58. 试证由 l^2 到 l^1 的有界线性算子是全连续算子.

证 因为 l^2 可分,自共轭,据文献[2]定理 4.9,$S = \{x \in l^2 : \|x\| \leqslant 1\}$ 必 * 弱列紧,即存在 $\{x_n\} \subset S$,使

$$x_n \xrightarrow{w^*} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{w} x.$$

T 是有界线性算子,则

$$Tx_n \xrightarrow{w} Tx.$$

由于 l^1 中弱收敛等价于强收敛,故 $Tx_n \xrightarrow{S} Tx$,从而 T 必是全连续线性算子.

59. 设 E,E_1 均为赋范线性空间且 E_1 完备,$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$,若 T^* 是全连续的,则 T 也是全连续的.

证 因为 $T^{**}\in\mathscr{B}(E^{**},E_1^{**})$是全连续算子,而 $x\in E$ 时,有

$$Tx = T^{**}x,$$

故 T 也是全连续算子.

60. 乘法算子 $Tx(t)=a(t)x(t)$在空间 $C[a,b]$上能是全连续算子吗? 这里 $a(t)$是给定的于$[a,b]$上连续的函数.

解 因为 $a(t)\in C[a,b]$,我们令

$$m = \min_{t\in[a,b]} a(t), \qquad M = \max_{t\in[a,b]} a(t),$$

则 $a(t)$的值域为区间$[m,M]$,容易证明 $\sigma(T)=[m,M]$,故 T 不可能是全连续算子.

61. 乘法算子 $Tx(t)=a(t)x(t)$在空间 $L^2[a,b]$上能是全连续算子吗? 这里 $a(t)$是给定的$[a,b]$上的有界可测函数.

解 不妨设 $a(t)$不对等于零,若 T 为全连续算子,则必存在 $\lambda_0\neq 0$,使得集合 $E(t\in[a,b]:a(t)=\lambda_0)$的测度大于零,因为否则对一切 $\lambda\neq 0$,$mE(t\in[a,b]:a(t)=\lambda)=0$,就可推出 λ 不是 T 的特征值,从而必属于正则集,故 $\sigma(T)=\{0\}$,$T=0$,矛盾. 当 $mE(t\in[a,b]:a(t)=\lambda_0)>0$ 时,λ_0 必是 T 的特征值,且 T 对应于λ_0 的特征向量空间是无穷维的,这与 T 为全连续矛盾,故 T 不是全连续算子.

62. 试证按公式 $Jx=x$ 作用的嵌入算子$J:C^1[0,1]\to C[0,1]$是全连续算子,这里 $C^1[0,1]$中的范数规定为

$$\|x\| = \max_{t\in[0,1]}|x'(t)| + \max_{t\in[0,1]}|x(t)|.$$

证 设 A 为$C^1[0,1]$中任一有界集,则存在常数 $K>0$,使得 $x\in A$ 时,有

$$\max_{t\in[0,1]}|x(t)| \leqslant K, \qquad \max_{t\in[0,1]}|x'(t)| \leqslant K,$$

则 A 是$C[0,1]$中有界集,且等度连续,故 JA 是$C[0,1]$中的列紧集,于是 J 是全连续算子.

63. 设 T 为赋范线性空间E 中的有界线性算子,试证明

$$\|T\| = \sup_{\|x\|<1}\|Tx\|.$$

64. 设 E,E_1 为巴拿赫空间,$A:D(T)\subset E\to E_1$ 是闭线性算子,若在 $\mathscr{D}(A)$中定义新范数

$$\|x\|_G = \|x\| + \|Ax\|, \qquad x\in\mathscr{D}(A),$$

则$(\mathscr{D}(A),\|\cdot\|_G)$是一个巴拿赫空间.

65. 设 E 为无穷维赋范线性空间,f 是 E 上的不连续线性泛函,$B=\{x\in E:|f(x)|\leqslant 1\}$,证明 B 无内点.

66. 在数列空间 C 中,令

$$\|x\| = \sup\{|x_{n+1}-x_n|:n=1,2,\cdots\},$$

其中 $x=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots\}\in C$,并规定 $x_0=0$,证明 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 为C 上的不连续线性泛函.

67. 设 X 为巴拿赫空间,$L\subset X$ 是闭子空间,$x_0\in X$,$\rho(x_0,L)=d>0$,证明 $L_0=\{\alpha x_0+y:y\in L,\alpha\in$数域 $K\}$是 X 的闭子空间.

提示 设 $z_n=\alpha_n x_0+y_n\in L_0$,$z_n\to z_0(n\to\infty)$,因为 $x_0\overline{\in}L$,应用哈恩-巴拿赫定理推论,证明$\{\alpha_n\}$收敛,从而$\{y_n\}$也收敛.

68. 设 X 为赋范线性空间,$f,g\in X^*$,则 $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(g)$的充要条件是存在 $\lambda\neq 0$,使得 $f=\lambda g$,这里 $\mathrm{Ker}(f)$表示 f 的零空间.

提示 只须证明必要性,并且可不妨设 $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(g)\neq X$,取 $x_0\in X-\mathrm{Ker}(f)$,令 $\lambda_0=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$,证明 $f(x)=\lambda_0 g(x)$.

注 我们还可以证明,若对某个常数 $C\neq 0$,超平面$f(x)=C$ 与超平面$g(x)=C$ 一致,则必有 $f(x)\equiv g(x)$.

69. 设 X 为赋范线性空间,S 为 X 的极大真闭子空间,证明存在 X 上的线性泛函 f(不一定有界),使得 $\mathrm{Ker}(f)=S$.

提示 任取 $x_0\in X-S$,证明 X 等于由 $S\cup\{x_0\}$张成的闭子空间,则对任一$x\in X$,存在 $s\in S$ 以及 $\lambda_x\in$数域 K,使得 $x=s+\lambda_x x_0$,定义

$$f(x)=\lambda_x \qquad (x\in X).$$

70. 设 X 为巴拿赫空间,$B=\{x_k\}\subset X$,若由 B 张成的子空间在 X 中稠密,则

(1) $d(f_1,f_2)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{|f_1(x_k)-f_2(x_k)|}{2^k(\|x_k\|+1)}$ 是 X^* 上的一个距离;

(2) 由 X^*的 * 弱收敛可推出按距离 d 收敛;

(3) 令 $S=\{f\in X^*:\|f\|\leqslant 1\}$,则 S 是距离空间(X^*,d)中的紧集.

提示 (3) 利用结论(2)只需证明对每一个序列$\{f_n\}\subset S$,存在子序列 $f_{n_k}\xrightarrow{w^*}f\in S$.

71. 设 E,E_1 均为赋范线性空间,$E\neq\{0\}$,则 $\mathscr{B}(E,E_1)$完备的充分必要条件是 E_1 完备.

提示 必要性:设$\{y_n\}$是 E_1 中的任一基本点列,取 $x_0\in E$,$\|x_0\|=1$,$f\in E^*$,使 $f(x_0)=\|x_0\|$,定义算子序列 $T_n\in\mathscr{B}(E,E_1)$如下

$$T_n x = f(x) y_n \qquad (x \in E),$$

证明$\{T_n\}$是$\mathscr{B}(E,E_1)$中的基本列.

72. 设$C_0=\{\{x_n\}:\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\}$,规定$\|x\|=\sup\limits_n|x_n|$,映射$T:C_0\to C_0$

$$Tx = \left\{\frac{x_n}{n}\right\},$$

则$\|T\|=1,R(T)\neq C_0,\bar{R}(T)=C_0$,并求出$T^*$.

答 $T^*:l\to l$

$$T^*(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots) = \left(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\cdots,\frac{x_n}{n},\cdots\right).$$

73. 设E,E_1均是赋范线性空间,$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$,证明T^*是一对一的充分必要条件是$\overline{R(T)}=E_1$.

74. 设E,E_1均是巴拿赫空间,$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$,T^{-1}存在有界,证明T^*是一对一的充分必要条件是$R(T)=E_1$.

75. 设$T:C\to C$,$x=\{x_n\}\in C$时,$Tx=\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$,试求出$T^*$的零空间.

答 T^*的零空间为$e_1=(1,0,0,\cdots)$张成的一维子空间.

76. 设E为自反巴拿赫空间,则对任一$f\in E^*$,泛函数$|f(x)|$在E的单位球面上可取到最大值.

77. 设X为巴拿赫空间,集合$E\subset X^*$,E张成的子空间在X^*中稠密,又设$\{x_n\}\subset X$,$\sup\limits_n\|x_n\|<\infty$,且对一切$f\in E$,有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$,证明$x_n$弱收敛于$x$.

78. 设X为巴拿赫空间,$A_n,T\in\mathscr{B}(X)$,T为紧算子,且A_n强收敛于零,证明A_nT一致收敛于零.

79. 设φ是有限测度空间(X,μ)上的a.e有限可测函数,$\mathscr{D}=\{f\in L^2(X;\mu):\varphi\cdot f\in L^2(X;\mu)\}$,则$T:\mathscr{D}\to L^2(X;\mu)$,$Tf=\varphi\cdot f$ $(f\in\mathscr{D})$是稠定闭线性算子.

80. 设$g(t)\in C[0,1]$,在$C[0,1]$上定义$f(x)=\int_0^1 x(t)\cdot g(t)\mathrm{d}t$ $(x(t)\in C[0,1])$,证明$f\in C^*[0,1]$且

$$\|f\| = \int_0^1|g(t)|\mathrm{d}t.$$

81. 设E是赋范线性空间,$\{x_n\}\subset E$,K为数域,$\{a_n\}\subset K$,则存在$f\in E^*$使得成立

(i) $f(x_i)=a_i \qquad (i=1,2,3,\cdots)$;

(ii) $\|f\|\leqslant M$

其充分必要条件是对K中任意的$t_1,t_2,\cdots,t_n$成立

$$\left|\sum_{i=1}^{n} t_i a_i\right| \leqslant M \left\|\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right\|,$$

这里 n 为任一自然数.

提示 令

$$B = \left\{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i : t_i \in K,\ i = 1,2,\cdots,n;\ n \text{ 为任一自然数}\right\},$$

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} t_i a_i \qquad (x \in B),$$

应用哈恩-巴拿赫延拓定理立即得本题充分性.

82. 设 E 为巴拿赫空间,E_1,E_2 为 E 的闭子空间,$E = E_1 \dot{+} E_2$,如果 $x \in E$ 时,$x = x_1 + x_2$,其中 $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$,我们令 $Px = x_1$.

(i) 试证明 P 是 $E \to E_1$ 上的有界线性算子,且满足 $P^2 = P$;

(ii) 求算子 P 的点谱,连续谱和剩余谱;

(iii) 证明 $\lambda \neq 0,1$ 时,$R(\lambda;P) = \dfrac{1}{\lambda}I - \dfrac{1}{\lambda(\lambda-1)}P$.

83. 设 X 是巴拿赫空间,G 是 X 的闭子空间,T 是由 G 到有界数列空间 m 的有界线性算子,则 T 一定可以延拓为 X 到 m 的有界线性算子 $\tilde{T}$,且满足 $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

提示 设 $Tx = (\xi_i)$, $x \in G$,作 G 上的有界线性泛函 $f_i(x) = \xi_i$ $(i = 1, 2,\cdots)$,应用哈恩-巴拿赫定理立即可得.

84. 设 X 是巴拿赫空间,$T \in \mathscr{B}(X)$,$R(T) = l^1$,则 X 有子空间 M,使它满足下面的性质:

(i) 有 M 到 l^1 上的双向连续的线性算子;

(ii) 有 X 到 M 的有界投影算子 $P(P^2 = P)$.

85. 设 X 为巴拿赫空间,$p(x)$是定义在 X 上的泛函,满足条件:

(i) $p(x) \geqslant 0$; $\alpha > 0$ 时,$p(\alpha x) = \alpha p(x)$;

(ii) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$;

(iii) 若 $x \in X, x_n \in X, x_n \to x$,则 $\varliminf\limits_{n\to\infty} p(x_n) \geqslant p(x)$.

证明必存在 $M > 0$,使得对一切 $x \in X$ 成立

$$p(x) \leqslant M \cdot \|x\|.$$

提示 令 $M_k = \{x \in X : p(x) \leqslant k\}$,证明 M_k 是闭集,并应用贝尔纲定理.

86. 设 f 是赋范线性空间 E 上的线性泛函,则 f 连续的充分必要条件是 $\mathrm{Ker}(f)$为 E 的闭子空间.

提示 充分性,不妨设 $f \neq 0$,任给 $\varepsilon > 0$,取 $x_0 \in E$,使 $f(x_0) = \varepsilon$,考察集合

$$\mathrm{Ker}(f) + x_0 = \{x_0 + x : x \in \mathrm{Ker}(f)\},$$

利用 $0\in \mathrm{Ker}(f)+x_0$，证明 $f(x)$ 在 0 点连续.

87. 试求下列作用于(实) l^1 的算子 T 的共轭算子：

(i) $T(x_1,x_2,\cdots)=(\underbrace{0,0,\cdots,x_1}_{n},0,\cdots)$；

(ii) $T(x_1,x_2,\cdots)=(\alpha_n x_n,\alpha_{n+1}x_{n+1},\cdots)$，$|\alpha_n|\leqslant 1$，$n=1,2,\cdots$.

答 (i) $T^*:l^\infty\to l^\infty$

$$T^*(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)=(\overbrace{0,\cdots,0,y_n}^{n},0,\cdots).$$

(ii) $T^*:l^\infty\to l^\infty$

$$T^*(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)=(\underbrace{0,\cdots,0,\alpha_n y_1}_{n},\alpha_{n+1}y_2,\cdots).$$

88. 设 E 为巴拿赫空间，G,H 为 E 的闭子空间，$G\cap H=\{0\}$，则 $G+G=\{x+y:x\in G,y\in H\}$ 是闭子空间的充分必要条件是存在 $\alpha>0$，使得对一切 $x\in G,y\in H$，有

$$\|x\|\leqslant\alpha\|x+y\|.$$

提示 必要性：作映射 $T:G+H\to G$ 如下

$$T(x+y)=x,$$

应用闭图像定理.

89. 设 $E,E_\alpha(\alpha\in\mathscr{A})$ 是一族巴拿赫空间，记 $Y=\{(y_\alpha):y_\alpha\in E_\alpha,\sup\limits_\alpha\|y_\alpha\|<\infty\}$，在 Y 中规定线性运算同 $\mathbf{R}^n$，范数 $\|(y_\alpha)\|=\sup\limits_\alpha\|y_\alpha\|$，试证明

(i) Y 是一个巴拿赫空间；

(ii) 设 $T_\alpha\in\mathscr{B}(E,E_\alpha)(\alpha\in\mathscr{A})$，若对一切 $x\in E$，$\sup\limits_\alpha\|T_\alpha x\|<\infty$，令 $Tx=(T_\alpha x)$，则 T 是 $E\to Y$ 中的有界线性算子.

提示 (ii) 作算子 $\widetilde{T}_\alpha\in\mathscr{B}(E,Y)$，$\alpha\in\mathscr{A}$

$$\widetilde{T}_\alpha x=(y_\beta),$$

这里 $\beta\in\mathscr{A}$，当 $\beta=\alpha$ 时，$y_\beta=T_\alpha x$，当 $\beta\neq\alpha$ 时，$y_\beta=0$，应用共鸣定理.

本题也可以先证明 T 是闭线性算子，再应用闭图像定理来证明.

90. 设 $X=\{(\xi_n):\xi_n$ 均为实数，且只有有限个 $\xi_n\neq0\}$，$x\in X$，$\|x\|=\sup\limits_n|\xi_n|$，令 $T:X\to X$，$y=Tx=\left(\dfrac{\xi_n}{n}\right)$，证明 T 是 $X\to X$ 的一对一线性算子，但 T^{-1} 无界.

91. 设 X 为多项式全体，$x(t)\in X$，$x(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\cdots+\alpha_n t^n$ 时，规定 $\|x\|=\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n}|\alpha_j|$，证明 X 不是完备的赋范线性空间.

92. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间，T 是 $X\to Y$ 的一对一有界线性算子，证明 $T^{-1}:R(T)\to X$ 是有界的充分必要条件是 $R(T)$ 为 Y 中的闭集.

93. 设 E 是赋范线性空间(不一定完备),$f_n\in E^*$,$\|f_n\|\leqslant M$ $(n=1,2,3,\cdots)$,则 $A=\{x\in E:\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$存在$\}$是 E 的闭子空间.

94. 设 X 为巴拿赫空间,$T\in\mathscr{B}(X)$,若 $R(T)$为闭子空间,证明对一切 $y\in R(T)$,存在一个 x,使 $y=Tx$ 以及 $\|x\|\leqslant M\|y\|$,其中 M 是与$y\in R(T)$无关的常数.

提示 视 T 为$X\to R(T)$上的有界线性算子,应用开映射定理.也可以利用商空间和巴拿赫逆算子定理来证明.

95. 设 $T_0:C_0\to l^2$,$x=\{\xi_k\}\in C_0$,$Tx=\left\{\dfrac{\xi_k}{k}\right\}$,定义 T 为 T_0 从 $C_0\to E_1=R(T_0)$上的算子,证明存在紧算子序列 $T_n\in\mathscr{B}(C_0,E_1)$,使得 T_n 一致收敛于 T,但 T 非紧.

96. 设 E 为巴拿赫空间,具有有界逼近性质,即存在有穷秩算子序列$\{S_n\}\subset\mathscr{B}(E)$,使 S_n 强收敛于 I,试证明

(i) 对任一紧算子 $T\in\mathscr{B}(E)$,必存在有穷秩算子序列$\{T_n\}\subset\mathscr{B}(E)$,使得 T_n 一致收敛于 T;

(ii) 如果 E 具有可数基,则对任一紧算子 $T\in\mathscr{B}(E)$,必存在有穷秩算子序列$\{T_n\}$,使得 T_n 一致收敛于 T.

提示 (ii) 在 E 中引进新范数

$$|||x|||=\sup_m\left\|\sum_{i=1}^m\xi_ie_i\right\|,$$

其中$\{e_i\}$为 E 的可数基,$x\in E$,$x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_ie_i$.证明 $E_1=(E,|||\cdot|||)$是巴拿赫空间,利用巴拿赫逆算子定理证明 $T_nx=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_ie_i$ 是一个有界线性算子.

97. 设 X 为可分的巴拿赫空间,则 X 的共轭空间 X^* 为 $*$ 弱可分的.

提示 应用本章第 70 题可证明 X^* 中任一有界集的 $*$ 弱拓扑等价于(X^*,d),由 $X^*=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}S_n$,其中 $S_n=\{f\in X^*:\|f\|\leqslant n\}$,立即可得 X^* 是 $*$ 弱可分的.

98. 设 A 是巴拿赫空间X 中的一个线性算子,$\rho(A)\supset(0,+\infty)$,若存在常数 $M>0$,使对一切自然数 n 以及$\lambda>0$有

$$\|\lambda^nR(\lambda;A)^n\|\leqslant M,$$

则存在 X 上的一个范数$|||\cdot|||$,使得对一切 $x\in X$,有

$$\|x\|\leqslant|||x|||\leqslant M\|x\|,$$

以及

$$|||\lambda R(\lambda;A)x|||\leqslant|||x|||\qquad(\lambda>0).$$

提示 先令

$$\| x \|_{\mu} = \sup_{n \geq 0} \| \mu^n R(\mu; A)^n x \| \qquad (\mu > 0),$$

证明 $\| x \|_{\mu}$ 关于 $\mu > 0$ 单调上升有界,然后再令

$$||| x ||| = \lim_{\mu \to +\infty} \| x \|_{\mu}.$$

99. 试从题 27 作出结论:$C[0,1]$不是自反空间.

证 由 27 题知 $f(v) = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}v(t)$ 所定义的泛函 $f \in C^{**}[0,1]$,若 $C[0,1]$ 自反,则存在 $x(t) \in C[0,1]$,使

$$f(v) = \int_0^1 x(t) \mathrm{d}v(t) = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}v(t)$$

对一切 $v(t) \in V_0[0,1]$成立,从而可得

$$x(t) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 0, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

这与 $x(t) \in C[0,1]$矛盾,故 $C[0,1]$不是自反空间.

100. 如果 E 是无穷维赋范线性空间,则在 E 上存在不连续的线性泛函.

解 设 $B \subset E$ 是 E 的哈梅尔基,因为 E 是无穷维的,故 B 是无穷集,任取 $\{x_n\} \subset B$,定义 E 上的线性泛函如下

$$f(x_n) = n \| x_n \|, \qquad n = 1,2,3,\cdots,$$
$$f(x) = 0, \qquad x \in B - \{x_n\}.$$

任取 $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \quad (y_i \in B, i = 1,2,\cdots,n)$,令

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i).$$

易知 f 是 E 上的不连续线性泛函.

101. 设 E_0 是赋范线性空间,不完备,E 是 E_0 的完备化空间,则 $E_0^* = E^*$.

证 任取 $f \in E_0^*$,定义 $\tilde{f} \in E^*$ 如下:$x \in E_0$ 时,$\tilde{f}(x) = f(x)$,$x \in E - E_0$ 时,$\tilde{f}(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$,其中 $x_n \in E_0$,$x_n \to x \ (n \to \infty)$. 显然 $\tilde{f}$ 是由 f 惟一确定的,且 $\| \tilde{f} \| = \| f \|$,我们令

$$Tf = \tilde{f} \qquad (f \in E_0^*),$$

则 T 是 E_0^* 到 E^* 中的等距同构映射. 另一方面,对任一 $\varphi \in E^*$,令 $f = \varphi|_{E_0}$,则 $f \in E_0^*$,显然 $Tf = \varphi$,故 T 是 E_0^* 到 E^* 上的等距同构映射,即

$$E_0^* = E^*.$$

102. 试证明 $C[0,1]$中的算子序列 $A_n x(t)=x(t^{1+\frac{1}{n}})$强收敛于恒同算子,但不是依算子范数收敛.

证 任取 $x(t)\in C[0,1]$,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得 $t_1,t_2\in[0,1]$, $|t_1-t_2|<\delta$ 时,有

$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon.$$

取 $0<\delta_0<\frac{\delta}{2}$,则 $t\in[0,\delta_0]$时

$$|t^{1+\frac{1}{n}}-t|<2t<\delta \qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

从而当 $t\in[0,\delta_0]$时,对所有自然数 n,有

$$|A_n x(t)-x(t)|=|x(t^{1+\frac{1}{n}})-x(t)|<\varepsilon.$$

当 $t\geqslant\delta_0$ 时,存在 N,使得 $n>N$ 时,有

$$|t^{1+\frac{1}{n}}-t|<\delta,$$

于是 $n>N$ 时,对一切 $t\in[0,1]$,有

$$|x(t^{1+\frac{1}{n}})-x(t)|<\varepsilon,$$

故 A_n 强收敛于恒同算子 I.

下面我们证明 $\|A_n-I\|$ 不收敛于零. 取定 $t_0\in(0,1)$,对每个 n,我们作 $C[0,1]$中函数 $x_n(t)$如下

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,t_0^{1+\frac{1}{n}}],\\ 1, & t\in[t_0,1],\\ \text{线性}, & t\in[t_0^{1+\frac{1}{n}},t_0],\end{cases}$$

则

$$\|x_n\|=1,$$

$$\|A_n-I\|\geqslant\|(A_n-I)x_n\|\geqslant|x_n(t_0^{1+\frac{1}{n}})-x_n(t_0)|=1,$$

故 A_n 按算子范数不收敛于 I.

103. 对于怎样的函数 $a(t)$,算子 $Tx(t)=a(t)x(t)$在 $C[a,b]$中是连续的? 如果它是连续的,试求它的范数.

解 当 $a(t)\in C[a,b]$时, $Tx(t)=a(t)x(t)$是 $C[a,b]$中的有界线性算子.虽然有 $\|T\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|a(t)|$.

104. 对于怎样的函数 $a(t)$,算子 $Tx(t)=a(t)x(t)$在 $L^2[a,b]$中连续? 如果它是连续的,试求它的范数.

解 $a(t)\in L^\infty[a,b]$时, $Tx(t)=a(t)x(t)$是 $L^2[a,b]$中的有界线性算子,

显然
$$\| T \| \leqslant \| a(t) \|_{\infty} = a.$$
因为
$$a = \operatorname*{varisup}_{a \leqslant t \leqslant b} |a(t)|,$$
任给 $\varepsilon > 0$,令
$$E = \{t \in [a,b] : |a(t)| > a - \varepsilon\},$$
则 $mE > 0$,我们取 $x(t) \in L^2[a,b]$ 如下
$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} a(t) / (mE)^{\frac{1}{2}}, & t \in E, \\ 0, & t \in [a,b] - E, \end{cases}$$
则 $\| x \| = 1$,且
$$\| T \| \geqslant \| Tx \| = \left\{ \int_E \frac{|a(t)|^2}{mE} \mathrm{d}t \right\}^{\frac{1}{2}} \geqslant a - \varepsilon.$$
因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的,故 $\| T \| \geqslant a$,从而
$$\| T \| = \operatorname*{varisup}_{a \leqslant t \leqslant b} |a(t)|.$$

第八章 希尔伯特空间及其自伴算子

一、基本概念和主要定理

内积和希尔伯特空间 设 X 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间，若映射 $(x,y):X\times Y\to\mathbf{C}$ 满足

(i) $(x,x)\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时 $(x,x)=0$；

(ii) $(x,y)=\overline{(y,x)}$；

(iii) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$；

(iv) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y),\lambda\in\mathbf{C}$

则称 (x,y) 为元素 x 和 y 的内积，X 称作复内积空间，简称为内积空间. 对内积空间 X，若规定 x 的范数为 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$，则 X 为赋范线性空间，如果 X 按范数 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ 是完备的，则称它为完备内积空间. 一个可分的无穷维完备内积空间称作希尔伯特空间，希尔伯特空间常用字母 H 来表示. 请读者注意，有些书上称完备内积空间为希尔伯特空间.

标准直交系 设 X 为内积空间，$\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset X$，如果

$$(e_\alpha,e_{\alpha'})=\begin{cases}0, & \alpha\neq\alpha',\\ 1, & \alpha=\alpha',\end{cases}$$

则称 $\{e_\alpha\}$ 为 X 中的标准直交系. 可以证明 $C_\alpha=(x,e_\alpha)$ 中至多可列个不等于零.

设 $\{e_n\}\subset X$ 为 X 的可列标准直交系，$x\in X$，称 $C_n=(x,e_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ 为 X 关于 e_n 的傅里叶系数.

完备标准直交系和完全标准直交系 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 X 中的标准直交系，若对一切 $x\in X$，巴塞伐尔(Paserval)等式

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2$$

成立，则称 $\{e_n\}$ 为完备系；若对一切 n，$(x,e_n)=0$ 就可推出 $x=0$，则称 $\{e_n\}$ 是完全系. 对于希尔伯特空间 H，$\{e_n\}$ 完备等价于 $\{e_n\}$ 完全，对一般内积空间 X，$\{e_n\}$ 完备必完全，但反过来不一定成立. H 的可分性是 H 中存在至多可列个完备标准直交系的充分必要条件.

正交性与射影定理 设 H 为希尔伯特空间，$x,y\in H$，若 $(x,y)=0$，则称 x 与 y 正交；设 $L\subset H$ 为子空间，若对任意的 $y\in L$，$(x,y)=0$，则称 x 与子空间 L 正交，记作 $x\perp L$；H 中与 L 正交的元素全体叫做 L 的直交补，记为 $L^\perp$.

定理 1（直交分解） 设 M 为希尔伯特空间 H 的闭子空间，则对任一 $x\in H$，存在惟一元素 $y\in M$ 和 $z\in M^{\perp}$，使得

$$x = y + z.$$

元素 y 称作 x 在子空间 M 上的射影，此时，我们记

$$H = M \oplus M^{\perp},$$

称 H 为子空间 M 和 $M^{\perp}$ 的直交和.

定理 2 设 $\{e_n\}$ 为希尔伯特空间 H 中的标准直交系，则下列条件等价：

(i) $\{e_n\}$ 是 H 中的完备系；

(ii) 对任一 $x\in H$，$x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$ （傅里叶展式）；

(iii) 对所有 $x,y\in H$，$(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)(e_n,y)$.

定理 3（里斯表现定理） 设 X 为完备内积空间，则对任一 $f\in X^*$，存在惟一元素 $u\in X$，使对一切 $x\in X$，有

$$f(x) = (x,u)$$

以及

$$\|f\| = \|u\|.$$

（希尔伯特）共轭算子 T^* 设 X 为完备内积空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，取定 $y\in X$，则 (Tx,y) 是 $x\in X$ 的有界线性泛函，故存在惟一元素 $u\in X$，使

$$(Tx,y) = (x,u),$$

记

$$T^*y = u$$

并称 T^* 为 T 的希尔伯特共轭算子. 显然 $T^*\in\mathscr{B}(X)$，$\|T^*\| = \|T\|$.

自伴算子、正算子和直交投影算子 设 X 为完备内积空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，若 $T=T^*$，则称 T 为自伴算子. 易知 $T=T^*$ 等价于 $(Tx,y)=(x,Ty)$ 对一切 $x,y\in X$ 成立. 对自伴算子 T，有 $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1}|(Tx,x)|$.

设 X 为复的完备内积空间，若对一切 $x\in X$，有

$$(Tx,x)\geqslant 0,$$

则称 T 为正算子，记作 $T\geqslant 0$；设 $T_1,T_2\in\mathscr{B}(X)$，自伴，若 $T_1-T_2\geqslant 0$，则称 $T_1\geqslant T_2$；设 $\{T_n\}\subset\mathscr{B}(X)$ 为自伴算子序列，若 $T_n\leqslant T_{n+1}(T_n\geqslant T_{n+1})$，$n=1,2,\cdots$，则称 $\{T_n\}$ 单调上升（单调下降）.

设 X 为完备内积空间，L 为 X 的闭子空间，根据直交分解定理，对任一 $x\in X$，存在惟一分解

$$x = x_1 + x_2,$$

其中 $x_1\in L$，$x_2\in L^{\perp}$，我们令

$$Px = x_1,$$

则 P 为定义在 X 上的有界线性算子，称 P 为 L 上的正交投影算子，简称为投影算子. 易知 P 为投影算子的充要条件是 P 自伴且 $P^2 = P$.

正常算子　酉算子和等距算子　设 $T \in \mathscr{B}(H)$，若 $T^* T = TT^*$，则称 T 为正常算子或称 T 为正规算子；若 $T^* T = TT^* = I$，则称 T 为酉算子；若对任一 $x \in H$ 有 $\|Tx\| = \|x\|$，则称 T 为等距算子. 一个酉算子必是正常算子和等距算子.

近似点谱　设 $T \in \mathscr{B}(H)$，我们称集合

$$\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbf{C}: \text{存在 } x_n \in H, \|x_n\| = 1, \text{使得 } \|(\lambda I - T)x_n\| \to 0\}$$

为 T 的近似点谱. 易知

$$\sigma_a(T) \subset \sigma(T), \qquad \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_a(T).$$

收敛性　设 $\{x_n\} \subset H$，若 $\|x_n - x\| \to 0$，则称 $\{x_n\}$ 强收敛于 x；若对任一 $y \in H$，$(x_n, y) \to (x, y)$，则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x. 在 $\mathscr{B}(H)$ 中可以定义三种收敛性：设 $\{T_n\} \subset \mathscr{B}(H)$，$T \in \mathscr{B}(H)$：

(i) 若 $\|T_n - T\| \to 0$，则称 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T，记作 $T_n \Rightarrow T$；

(ii) 若对每个 $x \in H$，$\|T_n x - Tx\| \to 0$，则称 $\{T_n\}$ 强收敛于 T，记作 $T_n \xrightarrow{s} T$；

(iii) 若对任意的 $x, y \in H$，$(T_n x, y) \to (Tx, y)$，则称 $\{T_n\}$ 弱收敛于 T，记作 $T_n \xrightarrow{w} T$.

定理 4　设 $\{T_n\}$ 为完备内积空间 X 中的单调自伴算子序列，且 $\|T_n\| \leqslant K$ 对一切 n 成立，则存在惟一的自伴算子 T，使 $\{T_n\}$ 强收敛于 T.

定理 5　设 $T \in \mathscr{B}(X)$，$T \geqslant 0$，则存在惟一的正算子 S 使 $S^2 = T$，并称 S 为 T 的正平方根，记为 $S = T^{\frac{1}{2}}$.

谱族(单位分解)和有界自伴算子的谱分解定理　设 $\{E_\lambda\}$ 是希尔伯特空间 H 上的一族投影算子，λ 为实参数，若 E_λ 满足

(i) 单调性：$\lambda < \mu$ 时，$E_\lambda \leqslant E_\mu$；

(ii) 右连续性：对任一 $x \in H$，有 $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0 + 0} E_\lambda x = E_{\lambda_0} x$；

(iii) 存在有限实数 a 和 $b(a < b)$，使得 $\lambda < a$ 时，$E_\lambda = 0$，$\lambda \geqslant b$ 时，$E_\lambda = I$

则称 $\{E_\lambda\}$ 为 $[a, b]$ 上的谱族或单位分解.

定理 6　设 $T \in \mathscr{B}(H)$，自伴，则由算子 T 可产生一个 $[m, M]$ 上的谱族 $\{E_\lambda\}$ $\left(m = \inf\limits_{\|x\| = 1}(Tx, x), M = \sup\limits_{\|x\| = 1}(Tx, x)\right)$，使

$$T=\int_{m-0}^{M}\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda,$$

积分在算子范数意义下收敛，且 E_λ 和任一与 T 可换的有界线性算子可换.

定理 7 设 $T\in\mathscr{B}(H)$ 自伴，则

(i) $\rho(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\lambda$ 是非实数$\}\cup\{\lambda\in\mathbf{R}:\lambda\overline{\in}[m,M]\}\cup\{\lambda\in[m,M]:$存在某个区间$[\alpha,\beta]$，使 $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$，且 E_λ 在$[\alpha,\beta]$上取常值$\}$；

(ii) $\lambda_0\in\sigma_p(T)$的充要条件是 $E_{\lambda_0}\neq E_{\lambda_0-0}$，且对应于 λ_0 的特征向量空间 L_{λ_0} 等于 $E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0}$的值域；

(iii) $\sigma_r(T)=\varnothing$；

(iv) $\lambda_0\in\sigma_c(T)$的充要条件是 $E_{\lambda_0}=E_{\lambda_0-0}$，且对任意满足 $\lambda_1<\lambda_0<\lambda_2$ 的实数 λ_1 和 λ_2 有 $E_{\lambda_1}\neq E_{\lambda_2}$.

定理 8 设 $T\in\mathscr{B}(H)$是全连续自伴算子，则在算子范数意义下，T 可表成下列级数

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nE_n,$$

其中 λ_n 是 T 的非零特征值，$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|\geqslant\cdots$，$E_n$ 是 T 对应于λ_n 的特征向量空间 L_n(有限维)上的投影算子.

二、习题、练习题与解法

1. 证明$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$，当 K 为实数域时；$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2)$，当 K 为复数域时.

本题直接利用$\|x\|^2=(x,x)$代入验证，故略.

2. 令 S_1 表如下的函数 $x(t)$的全体

$$x(t)\in L[0,2\pi],$$

$$x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

且

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n^2+b_n^2)<+\infty,$$

令

$$\|x\|_{S_1}=\pi^{\frac{1}{2}}\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n^2+b_n^2)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

求证 S_1 是希尔伯特空间且

$$T: x \to \bar{x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

是由 S_1 到 $L^2[0,2\pi]$中的等距算子.(此外 $S_1, L[0,2\pi], L^2[0,2\pi]$均为实空间.)

证 首先易知 T 是$S_1 \to L^2[0,2\pi]$中的线性算子,因为

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots\right\}$$

是 $L^2[0,2\pi]$中的一个完备标准直交系,则由 Parseval 等式得

$$\|\bar{x}\|_2 = \pi^{\frac{1}{2}}\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2)\right]^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{S_1},$$

故 T 是S_1 到 $L^2[0,2\pi]$中的等距算子.

另一方面,任取 $\bar{x}(t) \in L^2[0,2\pi]$,则

$$\bar{x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

右边级数在 $L^2[0,2\pi]$中收敛,令

$$a_n' = \frac{a_n}{\sqrt{n}},\ b_n' = \frac{b_n}{\sqrt{n}} \qquad (n = 1,2,3,\cdots),$$

则

$$\bar{x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}}(a_n' \cos nt + b_n' \sin nt).$$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'^2 + b_n'^2) < +\infty$, 故存在 $x(t) \in L^2[0,2\pi] \subset L[0,2\pi]$,使

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n' \cos nt + b_n' \sin nt),$$

右边级数在 $L^2[0,2\pi]$中收敛,容易证明

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n' \mathrm{cont} + b_n' \sin nt)$$

以及 $x(t) \in S_1$,据算子 T 的定义,有 $Tx = \bar{x}$,故 T 是S_1 到 $L^2[0,2\pi]$上的等距算子.因为 $L^2[0,2\pi]$是希尔伯特空间,S_1 显然可用范数 $\|\cdot\|_{S_1}$定义内积成为一个内积空间,故 S_1 是希尔伯特空间.

3. 设 M, N 为内积空间 U 中的子集,且 $M \perp N$,证明 $N \subset M^{\perp}$, $M \subset N^{\perp}$.

证 因为 $M^{\perp} = \{x: (x,y) = 0,\ \forall y \in M\}$, $N \perp M$,所以 $N \subset M^{\perp}$, $M \subset N^{\perp}$.

4. 设 M, N 是内积空间 U 中的子集,$M \subset N$,则 $N^{\perp} \subset M^{\perp}$.

证 任取 $x \in N^{\perp}$,则对一切 $y \in N$ 有$(x,y) = 0$,利用条件 $M \subset N$,必可得对一切 $y \in M$,有$(x,y) = 0$,所以 $x \in M^{\perp}$,即

$$N^{\perp} \subset M^{\perp}.$$

5. 设 U 是完备的内积空间，M 是 U 的子空间，证明 $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$，$M^{\perp} = (\overline{M})^{\perp}$.

证 因为 $M \subset \overline{M}$，由本章第 3 题 $\overline{M}^{\perp} \subset M^{\perp}$，反之容易证明若 $x \in M^{\perp}$，必有 $x \perp \overline{M}$，即 $M^{\perp} \subset \overline{M}^{\perp}$，故 $M^{\perp} = (\overline{M})^{\perp}$.

下面证明 $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$. $\overline{M} \subset (M^{\perp})^{\perp}$ 显然成立，反之，对每一个 $x \in (M^{\perp})^{\perp}$，分解 $x = y + z$，其中 $y \in \overline{M}$，$z \in \overline{M}^{\perp} = M^{\perp}$，则

$$0 = (x, z) = (z, z),$$

故

$$x = y \in \overline{M},\ (M^{\perp})^{\perp} \subset \overline{M},$$

从而 $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$.

本题中 $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$ 也可应用直交分解 $U = M^{\perp} \oplus (M^{\perp})^{\perp}$，$U = \overline{M} \oplus \overline{M}^{\perp} = M^{\perp} \oplus \overline{M}$，从而知 $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$.

6. 设 L_1, L_2 是完备内积空间 U 的子空间，$L_1 \perp L_2$，$L = L_1 \oplus L_2$，证明 L 是闭子空间的充分必要条件是 L_1, L_2 均为闭子空间. 这里 $L_1 \oplus L_2$ 表示 L_1 和 L_2 的直交和.

证 必要性：设 L 为闭子空间，$\{x_n\} \subset L_1$，$x_n \to x\ (n \to \infty)$，则 $x \in L$，且对一切 $y \in L_2$，有

$$(x, y) = \lim_{n \to \infty} (x_n, y) = 0,$$

所以 $x \in L_2^{\perp}$，因为

$$L = L_1 \oplus L_2, \qquad x \in L,\ x \in L_2^{\perp},$$

故 $x \in L_1$，L_1 为闭子空间.

同理可证 L_2 是闭子空间.

充分性：设 L_1, L_2 均为闭子空间，$\{x^{(n)}\} \subset L$，$x^{(n)} \to x\ (n \to \infty)$，$x \in U$，令

$$x^{(n)} = x_1^{(n)} + x_2^{(n)},$$

其中 $x_1^{(n)} \in L_1$，$x_2^{(n)} \in L_2$，U 完备，由直交分解定理

$$x = x_1 + x_2,$$

其中 $x_1 \in L_1$，$x_2 \in L_1^{\perp}$. 因为

$$\| x_i^{(n)} - x_i \| \leqslant \| x^{(n)} - x \| \qquad (i = 1, 2),$$

所以

$$x_1^{(n)} \to x_1 \in L_1, \qquad x_2^{(n)} \to x_2 \in L_2.$$

故 $x \in L_1 \oplus L_2$，即 L 是闭子空间.

7. 设 f 是完备内积空间 U 的子空间 G 上的有界线性泛函，则 f 在 U 上存在惟一的延拓 F，适合 $\| F \| = \| f \|_G$.

证　因为 f 为 G 上的有界线性泛函,我们可不妨设 G 为闭子空间,则 G 本身可看作一个完备内积空间. $f\in G^*$,必存在 $y\in G$,使

$$f(x)=(x,y)\qquad(\forall x\in G),$$

且 $\|f\|_G=\|y\|$,现在令

$$F(x)=(x,y)\qquad(\forall x\in U),$$

则 F 是 f 的一个延拓,且 $\|F\|=\|y\|=\|f\|_G$. 下面证明延拓的惟一性. 若另有 $\bar{F}(x)=(x\ y')(\forall x\in U)$,满足

$$\bar{F}(x)=f(x)=F(x)\qquad(\forall x\in G),$$

$$\|\bar{F}\|=\|f\|_G,\quad 即\quad \|y'\|=\|y\|.$$

则 $x\in G$ 时

$$(x,y'-y)=\bar{F}(x)-F(x)=0,\qquad y'-y\in G^{\perp}.$$

显然

$$y'=y+(y'-y),$$

$$\|y'\|^2=\|y\|^2+\|y'-y\|^2,$$

故 $\|y'-y\|=0$, $y=y'$,惟一性可证.

8. 证明希尔伯特空间(可分完备内积空间)中的标准直交系最多是可列的.

证　设 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 H 中的标准直交系,则

$$(e_\alpha,e_\beta)=\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}0, & \alpha\neq\beta,\\ 1, & \alpha=\beta,\end{cases}$$

且 $\alpha\neq\beta$, $\|e_\alpha-e_\beta\|=\sqrt{2}$. 因为 H 可分,设 $\{x_n\}$ 为 H 的可数稠子集,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}S\left(x_n,\frac{1}{2}\right)\supset H,$$

其中 $S\left(x_n,\dfrac{1}{2}\right)=\left\{x:\|x-x_n\|<\dfrac{1}{2}\right\}$,若 $\{e_\alpha\}$ 不可数,则至少有两个不同的元素 e_α,e_β 同属于某一个开球 $S\left(x_n,\dfrac{1}{2}\right)$,于是

$$\sqrt{2}=\|e_\alpha-e_\beta\|\leqslant\|e_\alpha-x_n\|+\|x_n-e_\beta\|<1,$$

矛盾,故 $\{e_\alpha\}$ 至多可数.

9. 证明希尔伯特空间的完备标准直交系必定是可列的.

证　设 $f=\{e_\alpha\}$ 是 H 的一个完备标准直交系,首先由上题知 f 至多可列,现若 f 为有限集 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,令

$$E=\left\{x=\sum_{i=1}^{n}c_ie_i,\ c_i\ 为任意实数\right\},$$

由于 f 是 H 的完备直交系,则 $E=\bar{E}=H$,这与 H 为无穷维空间矛盾,故 f 必定是可列集.

10. 举例说明内积空间中的完全标准直交系不一定是完备的.

解 在 l^2 中,记 $\mathscr{F}=\{e_2,e_3,\cdots,e_n,\cdots\}$ 其中 $e_n=\{\overbrace{0,0,\cdots,0,1}^{n\text{位}},0,\cdots\}$,令 $f_1=e_1+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}e_k$,由里斯-费希尔(Fisher)定理(文献[2]P172)知,$f_1\in l^2$,再令 U 是由 $\mathscr{F}\cup\{f_1\}$ 所张成的线性子空间,即

$$U=\left\{\alpha_1 f_1+\sum_{k=2}^{n}\alpha_k e_k:\ n\text{ 为任一自然数},\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{ 为任意实数}\right\},$$

按照 l^2 的线性运算及内积,U 为内积空间,$\mathscr{F}$ 显然是 U 中的标准直交系,且可以证明 $\mathscr{F}$ 在 U 中是完全的.事实上,如果 $x\in U$,$x\perp\mathscr{F}$,则据 U 的定义,存在 $\alpha_k(k=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$x=\alpha_1 f_1+\sum_{k=2}^{n}\alpha_k e_k.$$

取 $m>n$,得到 $0=(x,e_m)=\frac{\alpha_1}{m}$,因此

$$x=\sum_{k=2}^{n}\alpha_k e_k.$$

同样,对于 $m\leqslant n$,有 $0=(x,e_m)=\alpha_m$,故 $x=0$,即 f 在 U 中完全,但是

$$\|f_1\|^2=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}|(f_1,e_k)|^2=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

则

$$\|f_1\|^2\neq\sum_{k=2}^{\infty}|(f_1,e_k)|^2,$$

即巴塞伐尔公式不成立,故 $\mathscr{F}$ 在 U 中不是完备的.

11. 设 $\{e_k\}$,$\{e_k'\}(k=1,2,3,\cdots)$ 是希尔伯特空间 H 中的两个标准直交系,适合 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|e_k-e_k'\|^2<1$,则当 $\{e_k\}$,$\{e_k'\}$ 中之一完备时,另一个也是完备的.

证 设 $\{e_k\}$ 完备,我们证明 $\{e_k'\}$ 也完备,记 $M=\bigvee\limits_{k=1}^{\infty}\{e_k'\}$ 表示由 $\{e_k'\}(k=1,2,3,\cdots)$ 张成的闭子空间,只要证明 $x\perp M$ 时,必有 $x=0$.设不然,$x\neq0$,则

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k-e_k')|^2\\&\leqslant\|x\|^2\sum_{k=1}^{\infty}\|e_k-e_k'\|^2<\|x\|^2,\end{aligned}$$

矛盾,故 $\{e_k'\}$ 完备.

注 本题条件 $\sum_{k=1}^{\infty}\|e_k-e_k'\|^2<1$ 可改弱为 $\sum_{k=1}^{\infty}\|e_k-e_k'\|^2<+\infty$.

事实上,若 $\sum_{k=1}^{\infty}\|e_k-e_k'\|^2<+\infty$,则存在 n_0,使

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\|e_k-e_k'\|^2<1,$$

我们令

$$M=\bigvee_{k=n_0+1}^{\infty}\{e_k'\},\ N=\bigvee_{k=n_0+1}^{\infty}\{e_k\},$$

则

$$H=M\oplus M^{\perp}=N\oplus N^{\perp},$$

显然 $M^{\perp}$ 的维数 $\geqslant n_0$,因此,若能证明 $\dim M^{\perp}=n_0$,则

$$M^{\perp}=\bigvee_{k=1}^{n_0}\{e_k'\},\ H=\bigvee_{k=1}^{\infty}\{e_k'\},$$

从而 $\{e_k'\}$ 完备. 现任取 $f\neq 0, f\in M^{\perp}$,则

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|(f,e_k)|^2=\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|(f,e_k-e_k')|^2<\|f\|^2.$$

由此可知 $f\overline{\in}N$,令 $f=g_1+g_2$,其中 $g_1\in N^{\perp}, g_2\in N$,则 $g_1\neq 0$,记 $Pf=g_1$,则 P 是 $M^{\perp}\to N^{\perp}$ 的一对一线性算子,故 $M^{\perp}$ 与 $N^{\perp}$ 的一个子集同构,但 $\dim N^{\perp}=n_0$,故 $\dim M^{\perp}\leqslant n_0$,从而 $\dim M^{\perp}=n_0$, $\{e_k'\}$ 完备得证.

12. 设 U 为希尔伯特空间,求证

(i) $\min\limits_{\substack{C_k\in K\\ 1\leqslant k\leqslant n}}\|x-\sum_{k=1}^{n}c_ky_k\|^2=\dfrac{G(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)}{G(y_1,y_2,\cdots,y_n)}$

这里 $\mathbf{K}$ 为复数域, $x,y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为 U 中的元素, $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 线性无关,而

$$G(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix}(y_1,y_1) & (y_2,y_1) & \cdots & (y_n,y_1)\\ (y_1,y_2) & (y_2,y_2) & \cdots & (y_n,y_2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (y_1,y_n) & (y_2,y_n) & \cdots & (y_n,y_n)\end{vmatrix};$$

(ii) 对任意的 $m<n$

$$\frac{G(y_k,y_{k+1},\cdots,y_n)}{G(y_{k+1},\cdots,y_n)}\leqslant\frac{G(y_k,y_{k+1},\cdots,y_m)}{G(y_{k+1},\cdots,y_m)}\qquad(0\leqslant k\leqslant m-1),$$

$$\frac{G(y_m,y_{m+1},\cdots,y_n)}{G(y_{m+1},\cdots,y_n)}\leqslant G(y_m),$$

$$G(y_1,y_2,\cdots,y_n)\leqslant G(y_1,\cdots,y_m)G(y_{m+1},\cdots,y_n),$$

$$G(y_1,y_2,\cdots,y_n)\leqslant G(y_1)G(y_2)\cdots G(y_n).$$

证 (i) 令

$$M = \{ y = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k,\ c_k \in \mathbf{K},\ k = 1,2,\cdots,n \},$$

为有穷维空间,则 M 是 U 的一个闭子空间,$U = M \oplus M^{\perp}$,当 $x \in M$ 时,(i)显然成立.下面设 $x \in U - M$,首先容易证明对于 $x \in U - M$,欲使 $y \in M$ 与 x 有最短距离的充要条件是 $x - y \perp M$.现设 $x \in U - M$,由直交分解定理,$x = y + z$,其中 $y \in M$,$z = x - y \perp M$

$$\| x - y \| = \min \| x - \sum_{k=1}^{n} c_k y_k \|.$$

$y \in M$,则

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n,$$

由条件 $x - y \perp M$ 可得

$$\begin{cases} c_1(y_1,y_1) + c_2(y_2,y_1) + \cdots + c_n(y_n,y_1) = (x,y_1), \\ c_1(y_1,y_2) + c_2(y_2,y_2) + \cdots + c_n(y_n,y_2) = (x,y_2), \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ c_1(y_1,y_n) + c_2(y_2,y_n) + \cdots + c_n(y_n,y_n) = (x,y_n). \end{cases} \tag{1}$$

令 $\delta^2 = \| x - y \|^2$,则

$$\begin{aligned} \delta^2 &= (x - y, x - y) = (x,x) - (y,x) - (x,y) + (y,y) \\ &= (x,x) - (y,x), \end{aligned}$$

即

$$c_1(y_1,x) + c_2(y_2,x) + \cdots + c_n(y_n,x) = (x,x) - \delta^2 \tag{2}$$

将(1)和(2)联立,看作($n+1$)个未知数的齐次方程,有非零解 $c_1,c_2,\cdots,c_n,1$,则必有

$$\begin{vmatrix} (y_1,y_1) & (y_2,y_1) & \cdots & (y_n,y_1) - (x,y_1) \\ (y_1,y_2) & (y_2,y_2) & \cdots & (y_n,y_2) - (x,y_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (y_1,y_n) & (y_2,y_n) & \cdots & (y_n,y_n) - (x,y_n) \\ (y_1,x) & (y_2,x) & \cdots & -(x,x) \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\begin{aligned} \delta^2 G(y_1,y_2,\cdots,y_n) &= G(y_1,y_2,\cdots,y_n,x) \\ &= G(x,y_1,y_2,\cdots,y_n), \end{aligned}$$

故(i)成立.

(ii) 设 $m < n$,$\{y_{k+1},y_{k+2},\cdots,y_n\}$ 及 $\{y_{k+1},y_{k+2},\cdots,y_m\}$ 分别张成闭子空间 M_1 和 M_2,显然 $M_2 \subset M_1$,令

$$\delta_1^2 = \inf_{y \in M_1} \| y_k - y \|^2, \qquad \delta_2^2 = \inf_{y \in M_2} \| y_k - y \|^2,$$

则

$$\delta_1^2 \leqslant \delta_2^2,$$

故

$$\frac{G(y_k, y_{k+1}, \cdots, y_n)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_n)} \leqslant \frac{G(y_k, y_{k+1}, \cdots, y_m)}{G(y_{k+1}, \cdots, y_m)} \tag{3}$$

再令

$$M = \left\{ x = \sum_{k=m+1}^{n} c_k y_k,\ c_k \in \mathbf{K} \right\},$$

则显然有

$$\inf_{y \in M} \| y_m - y \|^2 \leqslant \| y_m \|^2,$$

所以

$$\frac{G(y_m, y_{m+1}, \cdots, y_n)}{G(y_{m+1}, \cdots, y_n)} \leqslant G(y_m) \tag{4}$$

由(3)、(4)可得

$$\frac{G(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{G(y_1, y_2, \cdots, y_m)} \leqslant \frac{G(y_2, y_3, \cdots, y_n)}{G(y_2, y_3, \cdots, y_m)}$$

$$\leqslant \cdots \leqslant \frac{G(y_m, y_{m+1}, \cdots, y_n)}{G(y_m)} \leqslant G(y_{m+1}, y_{m+2}, \cdots, y_n),$$

所以

$$G(y_1, y_2, \cdots, y_n) \leqslant G(y_1, y_2, \cdots, y_m) \cdot G(y_{m+1}, y_{m+2}, \cdots, y_n),$$

从而成立

$$G(y_1, y_2, \cdots, y_n) \leqslant G(y_1) G(y_2) \cdots G(y_n).$$

13. 设 U 为希尔伯特空间，$\{y_k\} \subset U$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$，其中任意有限个元是线性无关的，则将 $\{y_k\}$ 标准直交化所得的元素列可以表成

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{G_k G_{k-1}}} \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & \cdots & (y_k, y_1) \\ (y_1, y_2) & \cdots & (y_k, y_2) \\ \vdots & & \vdots \\ (y_1, y_{k-1}) & \cdots & (y_k, y_{k-1}) \\ y_1 & \cdots & y_k \end{vmatrix},$$

其中 $G_0 = 1, G_k = G(y_1, y_2, \cdots, y_k)$.

证　首先用归纳法证明 $\{e_k\}$ 为标准直交系.

$$e_1 = \frac{y_1}{\| y_1 \|},\quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{G_1 G_2}} \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_2, y_1) \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix},$$

$$e_2 \perp e_1 \Leftrightarrow e_2 \perp y_1.$$

显然有$(e_2,y_1)=0$,故 $e_2\perp e_1$.一般地,设 $e_1,e_2,\cdots,e_{k-1}$相互直交,要证明 e_k 与 $e_1,e_2,\cdots,e_{k-1}$直交等价于证明 e_k 与 $y_1,y_2,\cdots,y_{k-1}$直交,其中

$$e_k=\frac{1}{\sqrt{G_kG_{k-1}}}\begin{vmatrix}(y_1,y_1) & \cdots & (y_k,y_1)\\(y_1,y_2) & \cdots & (y_k,y_2)\\ \vdots & & \vdots\\(y_1,y_{k-1}) & \cdots & (y_k,y_{k-1})\\ y_1 & \cdots & y_k\end{vmatrix},$$

由于

$$(e_k,y_i)=\frac{1}{\sqrt{G_kG_{k-1}}}\begin{vmatrix}(y_1,y_1) & \cdots & (y_k,y_1)\\ \vdots & & \vdots\\(y_1,y_{k-1}) & \cdots & (y_k,y_{k-1})\\ (y_1,y_i) & \cdots & (y_k,y_i)\end{vmatrix}=0,$$

$(i=1,2,\cdots,k-1)$,故 e_k 与 $e_1,e_2,\cdots,e_{k-1}$直交.

下面再证明 $\|e_k\|=1(k=1,2,3,\cdots)$. 令

$$u_k=\sqrt{G_kG_{k-1}}\,e_k,$$

则

$$\|e_k\|=1\Leftrightarrow\|u_k\|=\sqrt{G_kG_{k-1}}.$$

记

$$u_k=a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ky_k,$$

$$\|u_k\|=\sqrt{u_k,a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ky_k},$$

因为 $u_k\perp y_i(i=1,2,\cdots,k-1)$,所以

$$\|u_k\|=\sqrt{a_1a_k(y_1,y_k)+\cdots+a_k^2(y_k,y_k)},$$

据 G_k 的定义,我们有

$$a_k=G_{k-1},\ G_k=a_1(y_1,y_k)+\cdots+a_k(y_k,y_k),$$

所以

$$\sqrt{G_kG_{k-1}}=\sqrt{a_1a_k(y_1,y_k)+\cdots+a_k^2(y_k,y_k)}=\|u_k\|,$$

故 $\|e_k\|=1\ (k=1,2,3,\cdots)$.

最后证明$\{e_k\}$就是由$\{y_k\}$按文献[2]P.176 定理 1.8 得到的标准直交系.为此,设$\{e_k'\}$是由$\{y_k\}$按定理 1.8 作出的标准直交系,易知 e_k' 与 $y_1,y_2,\cdots,y_{k-1}$直交,$e_1=e_1'$,记

$$e_k'=\alpha_k'y_k+\sum_{j=1}^{k-1}a_j'y_j,$$

$$e_k = \alpha_k y_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j y_j,$$

其中 α_k, α'_k 均为正数($k=2,3,4,\cdots$),则

$$e_k - \frac{\alpha_k}{\alpha'_k} e'_k = \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j y_j,$$

从而

$$\left(e_k - \frac{\alpha_k}{\alpha'_k} e'_k,\ e_k - \frac{\alpha_k}{\alpha'_k} e'_k\right) = 0,$$

即 $e_k = \dfrac{\alpha_k}{\alpha'_k} e'_k$. 由 $\| e_k \| = \| e'_k \| = 1$, $\dfrac{\alpha_k}{\alpha'_k} > 0$,故

$$e_k = e'_k \qquad (k = 1,2,3,\cdots).$$

14. 称 $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \dfrac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$ 为埃尔米特(Hermite)多项式,令

$$e_n(t) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) \qquad (n = 1,2,3,\cdots),$$

证明 $\{e_n\}$ 组成 $L^2(-\infty, +\infty)$ 中的一个完备的标准直交系.

证 首先证明 $\{e_n(t)\}$ 彼此直交.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_n(t) e_m(t) dt = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} (2^m m! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_m(t) dt,$$

用数学归纳法可证明

$$H_n(t) = n! \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{2^{n-2j}}{j!(n-2j)!} t^{n-2j} = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!} n(n-1)\cdots(n-2j+1)(2t)^{n-2j},$$

其中

$$N = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}, \\ \dfrac{n-1}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}, \end{cases}$$

所以

$$H'_n(t) = 2n \sum_{j=0}^{M} \frac{(-1)^j}{j!} (n-1)(n-2)\cdots (n-2j)(2t)^{n-1-2j} = 2n H_{n-1}(t),$$

其中

$$M=\begin{cases}\dfrac{n-2}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时},\\ \dfrac{n-1}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}.\end{cases}$$

令 $v(t)=e^{-t^2}$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e_m(t)e_n(t)\mathrm{d}t=[(2^n n!\sqrt{\pi})(2^m m!\sqrt{\pi})]^{-\frac{1}{2}}\times(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(t)v^{(n)}(t)\mathrm{d}t.$$

又因为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(t)v^{(n)}(t)\mathrm{d}t&=H_m v^{(n-1)}(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}2mH_{m-1}(t)v^{(n-1)}(t)\mathrm{d}t\\&=-2m\int_{-\infty}^{+\infty}H_{m-1}(t)v^{(n-1)}(t)\mathrm{d}t=\cdots\\&=(-1)^m2^m m!\int_{-\infty}^{+\infty}H_0(t)v^{(n-m)}(t)\mathrm{d}t\\&=(-1)^m2^m m!\int_{-\infty}^{+\infty}v^{(n-m)}(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

故当 $n=m$ 时

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e_m(t)e_n(t)\mathrm{d}t=1.$$

$n\neq m$ 时，不妨设 $m<n$，由于

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(t)v^{(n)}(t)\mathrm{d}t&=(-1)^m2^m m!\int_{-\infty}^{+\infty}v^{(n-m)}(t)\mathrm{d}t\\&=(-1)^m2^m m!\,v^{(n-m-1)}(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0,\end{aligned}$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e_n(t)e_m(t)\mathrm{d}t=0\qquad(n\neq m).$$

这就证明了 $\{e_n(t)\}$ 是 $L^2(-\infty,+\infty)$ 中的标准直交系. 我们还可以证明 $\{t^k e^{-t^2/2}\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $L^2(-\infty,+\infty)$ 的一个完全系（可参阅文献[6]P121～122），由此可知：$\{P(t)e^{-t^2/2}:P(t)$ 为任一多项式$\}$ 在 $L^2(-\infty,+\infty)$ 中稠密，故 $\{e_n(t)\}$ 是 $L^2(-\infty,+\infty)$ 的完备标准直交系.

15. 设 P 是完备内积空间 U 的闭子空间 L 上的投影算子，则 $Px=x$ 的充分必要条件是 $x\in L$；$Px=0$ 的充分必要条件是 $x\perp L$.

证 任取 $x\in U$,据直交分解定理,可惟一表成

$$x = x_1 + x_2,$$

其中 $x_1\in L$,$x_2\perp L^{\perp}$,$Px=x$,故

$$Px = x \Leftrightarrow x \in L,\ Px = 0 \Leftrightarrow x \perp L.$$

16. 设$\{e_k\}(k=1,2,3,\cdots)$是完备内积空间 U 中的标准直交系,L 是$\{e_k\}$张成的线性子空间,证明 $\bar{L}$ 上的投影算子 P 可表成

$$Px = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k \quad (x \in U).$$

证 $x\in U$,$Px\in\bar{L}$,由于 $\bar{L}$ 本身可视为完备内积空间,则据文献[2]P173 定理 1.6 立即知$\{e_k\}$是 $\bar{L}$ 中的完备标准直交系,故

$$Px = \sum_{k=1}^{\infty}(Px,e_k)e_k = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k \quad (\forall x \in U).$$

17. 设 P_1,P_2 为可换的投影算子,则 $P=P_1+P_2-P_1P_2$ 也是投影算子,且 $P\geqslant P_1$,$P\geqslant P_2$.当任一投影算子 Q 满足 $Q\geqslant P_1$,$Q\geqslant P_2$ 时,则必满足 $Q\geqslant P$.

证 $P=P^*$,$P=P^2$ 以及 $PP_2=P_2$,$PP_1=P_1$ 均可直接验证,由文献[2]定理 2.7 及定理 2.10 立即可知 P 是一投影算子,且 $P\geqslant P_1$,$P\geqslant P_2$.

由

$$Q \geqslant P_1 \Leftrightarrow QP_1 = P_1; \qquad Q \geqslant P_2 \Leftrightarrow QP_2 = P_2$$

立即得 $QP=P$,故 $Q\geqslant P$.

18. 设 T 为完备内积空间 U 中的有界线性算子,且 $\|T\|\leqslant 1$,证明

$$\{x:Tx = x\} = \{x:T^*x = x\}.$$

证 记 $M=\{x:Tx=x\}$,$N=\{x:T^*x=x\}$,任取 $x\in M$,则

$$\begin{aligned}0 &\leqslant (T^*x - x, T^*x - x) = \|T^*x\|^2 - \|x\|^2\\ &\leqslant \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0,\end{aligned}$$

故 $T^*x=x$,$M\subset N$.同理可证 $N\subset M$,因此 $M=N$.

19. 设 A 是复内积空间 U 上的有界线性算子,如果对每个 $x\in U$,$(Ax,x)=0$,则 $A=0$.对于实空间,此结果成立否? 如果 A 是自伴的,则不论 U 是实是复,只要$(Ax,x)=0(\forall x\in U)$,就有 $A=0$.

证 对于复空间,由条件$(Ax,x)=0(\forall x\in U)$,并利用等式

$$\begin{aligned}(Ax,y) = \frac{1}{4}[&(A(x+y),x+y) - (A(x-y),x-y)\\ &+ \mathrm{i}(A(x+\mathrm{i}y),x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}(A(x-\mathrm{i}y),x-\mathrm{i}y)],\end{aligned}$$

我们取 $y=Ax$,就得 $Ax=0(\forall x\in U)$,故 $A=0$.

对于实空间不一定成立,例如,在二维平面上的旋转变换 $A:(x,y)\to(x',y')$

$$\begin{cases}x' = y\\ y' = -x.\end{cases}$$

记 $u=(x,y)$, $Au=(x',y')$，则

$$(Au,u)=x'x+y'y=yx-xy=0 \qquad (\forall u\in\mathbf{R}^2),$$

但显然 $A\neq 0$.

当 A 为自伴算子时，对实空间 U，我们利用等式

$$(Ax,y)=\frac{1}{4}[(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)]$$

即得

$$(Ax,y)=0 \qquad (\forall x,y\in U),$$

故不论 U 是实的还是复的，均有 $A=0$.

20. 设 A,B 是完备内积空间 U 上的线性算子，适合

$$(Ax,y)=(x,By),$$

其中 $x,y\in U$，则 A 是有界的.

证 为了证明 A 有界，我们只要证明 A 是闭算子，设

$$x_n\to x,\ Ax_n\to z \qquad (n\to\infty),$$

则对一切 $y\in U$

$$(z,y)=\lim_{n\to\infty}(Ax_n,y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,By)$$
$$=(x,By)=(Ax,y),$$

所以 $Ax=z$，A 是闭线性算子.

21. 设 T 为定义在完备内积空间 U 上的有界线性算子，令 N 为 T 的零空间，M 为 T^* 的值域，证明 $N=M^{\perp}$.

证 $N=\{x\in U:Tx=0\}$, $M=\{T^*x:x\in U\}$，任取 $y\in N$，对每个 $z=T^*x\in M$

$$(y,z)=(y,T^*x)=(Ty,x)=0,$$

故 $N\subset M^{\perp}$. 反之，任取 $y\in M^{\perp}$，则

$$(y,T^*x)=(Ty,x)=0 \qquad (\forall x\in U),$$

故 $Ty=0$，即

$$y\in N, \qquad M^{\perp}\subset N,$$

因此 $N=M^{\perp}$.

22. 设 U 为完备内积空间，T 为 U 上的有界线性算子，若对一切 $x\in U$，$\mathrm{Re}(Tx,x)=0$，则 $T=-T^*$.

证 令 $B=T+T^*$，则 $B^*=B$，B 为自伴算子，任取 $x\in U$

$$(Bx,x)=(Tx,x)+(T^*x,x)=2\mathrm{Re}(Tx,x),$$

由题给条件得 $(Bx,x)=0 \quad (\forall x\in U)$，再据本章第 19 题知 $B=0$，故 $T=-T^*$.

23. 设 T 为 l^2 上的有界线性算子，对 $x=\{\xi_k\}$, $Tx=y=\{\eta_k\}$，其中

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}\xi_j \qquad (k = 1,2,3,\cdots).$$

再设 $T^* x = y^* = \{y_k^*\}$，而

$$y_k^* = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^* \xi_j,$$

证明 $a_{kj}^* = \overline{a}_{jk}$.

证 令 $e_n = (\overbrace{0,0,\cdots,0,1}^{n\text{位}},0,\cdots) \in l^2 (n = 1,2,3,\cdots)$，则 $a_{kj} = (Te_j, e_k)$，$a_{kj}^* = (T^* e_j, e_k) = (e_j, Te_k) = \overline{(Te_k, e_j)} = \overline{a}_{jk}$.

24. 设 $\{e_n\}$ 是完备内积空间 U 中的标准直交系，$\lambda_n \to 0 \quad (n \to \infty)$，且每个 λ_n 是实数，令

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n,$$

则 T 是全连续自伴算子.

证 令 $T_n x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, e_k) e_k$，容易证明 T_n 是定义在 U 上的有界对称算子，$\| T_n \| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k|$，而且 T_n 是有穷秩算子. 因为

$$\| (T_n - T)x \|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k, \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k \right)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^2 |(x, e_k)|^2 \leqslant \max_{n+1 \leqslant k < \infty} \lambda_k^2 \| x \|^2,$$

所以

$$\| T_n - T \| \leqslant \sqrt{\max_{n+1 \leqslant k < \infty} \lambda_k^2}.$$

由条件 $\lambda_k \to 0 \quad (k \to \infty)$，立即得

$$\| T_n - T \| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

故 T 是全连续算子. T 的对称性由下式可知

$$(Tx, y) = \lim_{n \to \infty} (T_n x, y) = \lim_{n \to \infty} (x, T_n y)$$

$$= (x, Ty), \qquad \forall x, y \in U$$

故 T 为全连续自伴算子.

25. 设 T 为 $L^2[a,b]$ 上的全连续自伴算子，而且有 $L^2[a,b]$ 中的完备标准直交系 $\{e_n\}$，使

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| Te_n \|^2 < +\infty,$$

证明：必存在 $a \leqslant t \leqslant b, a \leqslant s \leqslant b$ 上可测的平方可积函数 $K(t,s)$ 适合

$$\overline{K(s,t)} = K(t,s),$$

且对一切 $x(t)\in L^2[a,b]$

$$Tx(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s.$$

证 由于 T 是 $L^2[a,b]$ 上的全连续自伴算子,则必存在完备标准直交系 $\{\varphi_n\}$,使 $T\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$,其中 $\lambda_n(n=1,2,3,\cdots)$ 为 T 的特征值,λ_n 均为实数,则

$$e_k=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^{(k)}\varphi_n \qquad (k=1,2,3,\cdots),$$

其中 $C_n^{(k)}=(e_k,\varphi_n)\quad(k,n=1,2,3,\cdots)$,于是

$$\|Te_k\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|C_n^{(k)}|^2\cdot|\lambda_n|^2.$$

由于 $\varphi_n=\sum_{k=1}^{\infty}\overline{C}_n^{(k)}e_k$,$\{e_k\}$ 完备,则

$$\sum_{k=1}^{\infty}|C_n^{(k)}|^2=\|\varphi_n\|^2=1,$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\|Te_k\|^2&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|C_n^{(k)}|^2\cdot|\lambda_n|^2\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}|C_n^{(k)}|^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2<+\infty.\end{aligned}$$

令

$$K(t,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(t)\overline{\varphi_n(s)},$$

则

$$\int_a^b\int_a^b|K(t,s)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}s=\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2<+\infty,$$

且

$$\overline{K(s,t)}=K(t,s),$$

$$T\varphi_n(t)=\lambda_n\varphi_n(t)=\int_a^b K(t,s)\varphi_n(s)\mathrm{d}s.$$

由于 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2[a,b]$ 中的完备标准直交系,故对一切 $x(t)\in L^2[a,b]$ 有

$$Tx(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s.$$

26. 设 T 为希尔伯特空间 U 上的有界线性算子,$\{e_n\}$ 为 U 中完备的标准直交系,若对任何 m,n,有 $(Te_n,e_m)=\overline{(Te_m,e_n)}$,则 T 自伴.

证 任取 $x,y\in U$,由于 $\{e_n\}$ 是 U 中的完备标准直交系,所以

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k,\qquad y=\sum_{k=1}^{\infty}(y,e_k)e_k,$$

令 $x_n=\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$, $y_n=\sum_{k=1}^{n}(y,e_k)e_k$, 据条件

$$(Te_n,e_m)=\overline{(Te_m,e_n)}=(e_n,Te_m),$$

可得

$$(Tx_n,y_n)=(x_n,Ty_n),$$

故 $(Tx,y)=(x,Ty)\quad(\forall x,y\in U)$, T 是自伴算子.

27. 有界线性算子 T 称为正规的,是指 $T^*T=TT^*$. 证明当 T 为正规算子时, $\|T^*T\|=\|T^2\|$.

证　因为

$$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(T^*Tx,x)$$
$$=(TT^*x,x)=\|T^*x\|^2,$$

故

$$\|Tx\|=\|T^*x\|\qquad(\forall x\in U),$$

从而

$$\|T^*Tx\|=\|T^2x\|\qquad(\forall x\in U),$$

于是

$$\|T^*T\|=\|T^2\|.$$

实际上我们还可以证明 $\|T^*T\|=\|T\|^2$.

28. T 为正规算子的充分必要条件是 T 可表为 $T=T_1+\mathrm{i}T_2$,其中 T_1、T_2 为可换自伴算子.

证　充分性显然,现证必要性. 设 T 正规,我们令

$$T_1=\frac{T+T^*}{2},\qquad T_2=\frac{T-T^*}{2\mathrm{i}},$$

则易证 $T=T_1+\mathrm{i}T_2$,且 T_1,T_2 为可换的自伴算子,这种表示还是惟一的.

29. 设 T 为定义在复完备内积空间 U 上的有界线性算子,如果存在 $\alpha_0>0$,使 $(Tx,x)\geqslant\alpha_0(x,x)$,则称 T 为正定的. 证明凡正定算子必有有界逆算子 T^{-1},且 $\|T^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\alpha_0}$.

证　设 $Tx=0$,由于 $0=(Tx,x)\geqslant\alpha_0(x,x)$,则 $x=0$,故 T^{-1}存在. 又从 $\alpha_0\|x\|^2\leqslant\|Tx\|\cdot\|x\|$ 可得

$$\|Tx\|\geqslant\alpha_0\|x\|\qquad(\forall x\in U),$$

故 T^{-1}有界,且 $\|T^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\alpha_0}$.

最后证明 $T^{-1}\in\mathscr{B}(U)$,即证明 $R(T)=U$. 利用 T 正定必自伴,得 $N(T)=R(T)^{\perp}$,因此 $\overline{R(T)}=U$. 又因为 T^{-1}有界,T 为闭算子,则必有

$$R(T)=\overline{R(T)}=U,$$

故 $T^{-1}\in\mathscr{B}(U)$.

30. 设 U 为希尔伯特空间, T 是 U 上的自伴算子, 又设有 $x_0\in U$ 使 $\{x_0, Tx_0, T^2x_0, \cdots, T^nx_0, \cdots\}$ 张成的子空间在 U 中稠密. 设 $\{E_\lambda\}$ 是 T 的谱族, 令 $\sigma(\lambda)=(E_\lambda x_0, x_0)$, 证明必存在 $L^2(\sigma)$ 到 U 上的等距同构映射 A, 使得当 $f\in L^2(\sigma)$ 时

$$(A^{-1}TA)f(t)=tf(t).$$

证 因为 $\sigma(\lambda)=(E_\lambda x_0, x_0)$ 是单调上升右连续函数, 由它可定义一个全有限的 LS 测度 σ, 令 $\mathscr{P}$ 为多项式全体, 则 $\mathscr{P}\subset L^2(\sigma)$. 作 $\mathscr{P}$ 到 U 中的等距算子 A 如下

$$Ap(t)=P(T)x_0 \tag{1}$$

此处 $p(t)$ 是任一多项式, 由于

$$\begin{aligned}(Ap(t),Ap(t))&=(P(T)x_0,P(T)x_0)\\&=\int_{m-0}^{M}|p(t)|^2\mathrm{d}(E_\lambda x_0,x_0)\\&=\int_{m-0}^{M}|p(t)|^2\mathrm{d}\sigma,\end{aligned}$$

其中 m, M 为自伴算子 T 的下界和上界, 故 A 是等距算子.

由于 $\mathscr{P}$ 在 $L^2(\sigma)$ 中稠密, 故 A 可惟一地延拓成 $L^2(\sigma)$ 到 U 中的等距算子. 又因为 U 完备, 易知 $AL^2(\sigma)$ 是 U 中的闭子空间, 但 $AL^2(\sigma)$ 至少包含了

$$\{x_0, Tx_0, T^2x_0, \cdots, T^nx_0, \cdots\},$$

据题设, $AL^2(\sigma)=U$, 即 A 是 $L^2(\sigma)$ 到 U 上的保范算子. 由(1)式得

$$p(t)=A^{-1}P(T)x_0 \qquad (p(t)\in\mathscr{P}),$$

所以

$$(A^{-1}TA)p(t)=A^{-1}TP(T)x_0=tp(t) \qquad (\forall\, p(t)\in\mathscr{P}).$$

利用 $\mathscr{P}$ 在 $L^2(\sigma)$ 中稠密, $A^{-1}TA$ 为有界线性算子, 不难证明对一切 $f\in L^2(\sigma)$ 有

$$(A^{-1}TA)f(t)=tf(t) \tag{2}$$

(2)式说明了自伴算子 T 酉等价于 $L^2(\sigma)$ 中的乘法算子.

31. 设 $T=\int_{m-0}^{M}\lambda\mathrm{d}E_\lambda$, 对 $x\in U$, $\|x\|=1$, 令 $\alpha_x=(Tx,x)$, $\beta_x=\|Tx\|$, 则 $\beta_x^2\geqslant\alpha_x^2$, 且对任意的 $\varepsilon>0$, 必存在 $\lambda_0\in\sigma(T)$, 使

$$\alpha_x-\sqrt{\beta_x^2-\alpha_x^2}-\varepsilon\leqslant\lambda_0\leqslant\alpha_x+\sqrt{\beta_x^2-\alpha_x^2}+\varepsilon.$$

证 本题我们利用 LS 积分证明更强的结论

$$\alpha_x-\sqrt{\beta_x^2-\alpha_x^2}\leqslant\lambda_0\leqslant\alpha_x+\sqrt{\beta_x^2-\alpha_x^2}.$$

因为

$$\alpha_x = (Tx, x) = \int_{m-0}^{M} \lambda \mathrm{d}(E_\lambda x, x),$$

$$\beta_x^2 = \int_{m-0}^{M} \lambda^2 \mathrm{d}(E_\lambda x, x),$$

所以

$$\|(T - \alpha_x I)x\|^2 = \int_{m-0}^{M} (\lambda - \alpha_x)^2 \mathrm{d}\|E_\lambda x\|^2$$
$$= \beta_x^2 - \alpha_x^2 \geqslant 0.$$

利用 LS 积分性质

$$\int_{m-0}^{M} (\lambda - \alpha_x)^2 \mathrm{d}\|E_\lambda x\|^2 = \int_{\sigma(T)} (\lambda - \alpha_x)^2 \mathrm{d}\|E_\lambda x\|^2,$$

则

$$\beta_x^2 - \alpha_x^2 = \int_{\sigma(T)} (\lambda - \alpha_x)^2 \mathrm{d}\|E_\lambda x\|^2 \geqslant \inf_{\lambda \in \sigma(T)} (\lambda - \alpha_x)^2.$$

由于 $\sigma(T)$ 是直线上的有界闭集，故必存在 $\lambda_0 \in \sigma(T)$，使

$$\beta_x^2 - \alpha_x^2 \geqslant (\lambda_0 - \alpha_x)^2,$$

即存在 $\lambda_0 \in \sigma(T)$，使

$$\alpha_x - \sqrt{\beta_x^2 - \alpha_x^2} \leqslant \lambda_0 \leqslant \alpha_x + \sqrt{\beta_x^2 - \alpha_x^2}.$$

32. 设 T 是完备内积空间 U 上的自伴算子，$\{E_\lambda\}$ 为 T 的谱族，证明 T 的值域闭包是 $[(I - E_0) + E_{-0}](U)$.

证 令 $N(T) = \{x \in U: Tx = 0\}$，则据文献[2]P211 定理 2.16(i)的证明可知

$$N(T) = (E_0 - E_{-0})(U).$$

记 $R(T) = \{Tx: x \in U\}$，由本章第 21 题可得

$$N(T) = R(T)^{\perp},$$

故

$$\overline{R(T)} = N(T)^{\perp} = [I - (E_0 - E_{-0})](U)$$
$$= [(I - E_0) + E_{-0}](U).$$

33. 设 $\{\alpha_n\}$ 是实数列且 $\sup\limits_n |\alpha_n| < +\infty$，在 l^2 中令

$$Tx = y: \quad \eta_n = \alpha_n \xi_n,$$

其中：$x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$，$y = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots\}$. 证明 $\sigma(T)$ 等于 $\{\alpha_n\}$ 的闭包，每个 α_n 是 T 的特征值，T 的谱族 E_λ 满足下面的关系

$$(E_\lambda x, y) = \sum_{\alpha_i \leqslant \lambda} \xi_i \bar{\eta}_i.$$

证 每个 α_n 显然是自伴算子 T 的特征值，且对应于 α_n 的特征向量是 e_n 张成的一维子空间 H_n，显然 $n \neq m$ 时，$H_n \perp H_m$.

若 $\lambda \overline{\in} \overline{\{\alpha_n\}}$,则

$$\inf_n |\lambda - \alpha_n| = \mathrm{d} > 0, \|(\lambda - T)x\| \geqslant \mathrm{d}\|x\|,$$

且

$$R(T_\lambda) = l^2,$$

故 $\lambda \in \rho(T)$,从而 $\sigma(T) = \overline{\{\alpha_n\}}$. 我们令 P_n 为 H_n 上的投影算子,则 P_n 彼此直交,且

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = I, \qquad x = \{\xi_i\} \in l^2, \qquad P_i x = \xi_i e_i.$$

令 $E_\lambda = \sum\limits_{\alpha_i \leqslant \lambda} P_i$,容易验证 E_λ 满足谱族的三个条件以及

$$(Tx, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n \bar{\eta}_n = \int_{m-0}^{M} \lambda \mathrm{d}(E_\lambda x, y),$$

其中 $m = \inf\limits_n \alpha_n$, $M = \sup\limits_n \alpha_n$. 故 $\{E_\lambda\}$ 是 T 的谱族,$\{E_\lambda\}$ 满足关系

$$(E_\lambda x, y) = \sum_{\alpha_i \leqslant \lambda} \xi_i \bar{\eta}_i.$$

34. 证明希尔伯特空间 H 中的任何闭凸子集 A 含有最小范数的元素(即存在 $x_0 \in A$,使 $\|x_0\| = \inf\limits_{x \in A} \|x\|$).

证 设 A 为希尔伯特空间 H 中的闭凸子集,我们令

$$\alpha = \inf_{x \in A} \|x\|,$$

则存在点列 $\{x_n\} \subset A$,使

$$\|x_n\| \to \alpha \qquad (n \to \infty).$$

因为 $\dfrac{x_n + x_m}{2} \in A$,所以

$$\left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\| \geqslant \alpha,$$

按照中线公式可得

$$\begin{aligned}\|x_m - x_n\|^2 &= \|x_m + (-x_n)\|^2 \\ &= 2\|x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 - 4\left\|\frac{x_m + x_n}{2}\right\|^2 \\ &\leqslant 2\|x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 - 4\alpha^2,\end{aligned}$$

因为当 $m, n \to \infty$ 时,$\|x_m\| \to \alpha$, $\|x_n\| \to \alpha$,故

$$\|x_m - x_n\| \to 0 \qquad (n, m \to \infty),$$

即 $\{x_n\}$ 是 H 中的基本列. 于是 $x_n \to x_0 \in A$, $\|x_0\| = \inf\limits_{x \in A} \|x\|$.

35. 证明内积空间是一致凸的.

证 任取 $\varepsilon > 0$, $\|x\| = \|y\| = 1$,设 $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$,则

$$\|x-y\|^2=2-(y,x)-(x,y)\geqslant\varepsilon^2,$$

即

$$(y,x)+(x,y)\leqslant 2-\varepsilon^2,$$

从而

$$\|x+y\|^2\leqslant 4-\varepsilon^2.$$

我们取 $0<\delta<2$,使得

$$\delta^2-4\delta+\varepsilon^2=0,$$

则得

$$\|x+y\|^2\leqslant 4-4\delta+\delta^2=(2-\delta)^2,$$

即

$$\|x+y\|\leqslant 2-\delta,$$

故内积空间是一致凸的.

36. 试求作用于复 l^2 空间的算子 T 的共轭算子,其中 $T(x_1,x_2,\cdots)=(0,x_1,x_2,\cdots)$,$(x_n)\in l^2$.

答　$T^*(x_1,x_2,\cdots)=(x_2,x_3,x_4,\cdots)$.

37. 试求作用于 $L^2(0,1)$的算子的共轭算子.

(i) $Ax(t)=\int_0^t x(s)\mathrm{d}s$;

(ii) $Ax(t)=\alpha(t)x(t)$,其中 $\alpha(t)$为给定的实有界可测函数.

答　(i) $A^*y(t)=\int_t^1 y(s)\mathrm{d}s$;

(ii) $A^*y(t)=\alpha(t)y(t)$.

38. 设 H 为希尔伯特空间,$T\in\mathscr{B}(H)$,证明 $R(T)\subset N(T^*)^{\perp}$,并举例说明严格包含关系能够成立.这里 $R(T)$,$N(T)$分别表示 T 的值域和零空间.

39. 设 H 为希尔伯特空间,$T\in\mathscr{B}(H)$,试证明

(i) 若 T 紧,且 $S^*S\leqslant T^*T$,则 S 是紧算子;

(ii) 若存在常数 $c>0$,使得对一切 $x\in H$ 有

$$\|Tx\|\geqslant c\|x\|,$$

则 T 不是紧算子.

40. 设 H 为希尔伯特空间,$T\in\mathscr{B}(H)$,T^*为 T 的希尔伯特共轭算子,证明 T 为紧算子的充分必要条件是 T^*T 为紧算子.

41. 设算子 T:复 $l^2\to l^2$,$x=\{\xi_k\}\in l^2$,$Tx=\left\{0,\frac{\xi_1}{1},\frac{\xi_2}{2},\cdots\right\}$,试证明和计算

(i) T 是全连续算子;

(ii) 求出 $\|T\|$ 和 $\sigma(T)$;

(iii) 证明 $0\in\sigma_r(T)$.

42. 设 H 是实希尔伯特空间，$T\in\mathscr{B}(H)$，若对一切 $x\in H$，有

$$(Tx,x)\geqslant a(x,x),$$

其中 a 为大于零的常数，则 $T^{-1}\in\mathscr{B}(H)$，且 $\|T^{-1}\|\leqslant a^{-1}$.

43. 设 H 是希尔伯特空间，G 为 H 的真闭子空间，则存在 $y\in H$，$\|y\|=1$，使得

$$\rho(y,G)=\inf_{z\in G}\|y-z\|\geqslant 1.$$

44. 设 $l^2(T)=\{a(t):a(t)$ 是定义在 T 上的复值函数，至多有可数个点使 $a(t)\neq 0$，且 $\sum_t|a(t)|^2<\infty\}$，在 $l^2(T)$ 中线性运算与通常的函数空间相同，定义内积如下

$$(a(t),b(t))=\sum_t a(t)\overline{b(t)}.$$

若 $T=[0,1]$，试证明 $l^2(T)$ 是不可分的完备内积空间.

提示　关于 $l^2(T)$ 的不可分性，考察

$$M=\{a_\alpha(t):\alpha\in[0,1],a_\alpha(\alpha)=1,\ t\neq\alpha \text{ 时},a_\alpha(t)=0\}.$$

45. 设 X_1,X_2 和 X 均为赋范线性空间，称 $\varphi:X_1\times X_2\to X$ 为双线性映射，若 φ 满足

$$\varphi(x_1+x_2,y)=\varphi(x_1,y)+\varphi(x_2,y);\ \varphi(\lambda x,y)=\lambda\varphi(x,y);$$
$$\varphi(x,y_1+y_2)=\varphi(x,y_1)+\varphi(x,y_2);\ \varphi(x,\lambda y)=\lambda\varphi(x,y).$$

称 $\varphi:X_1\times X_2\to X$ 是半双线性映射，若 φ 满足

$$\varphi(x_1+x_2,y)=\varphi(x_1,y)+\varphi(x_2,y);\ \varphi(\lambda x,y)=\lambda\varphi(x,y);$$
$$\varphi(x,y_1+y_2)=\varphi(x,y_1)+\varphi(x,y_2);\varphi(x,\lambda y)=\bar{\lambda}\varphi(x,y).$$

特别地，若 $X=\mathbf{C}$，则分别称 φ 为 $X_1\times X_2$ 上的双线性型和半双线性型.

设 $\varphi:X_1\times X_2\to X$ 是双线性映射，对每个 $x\in X_1$，$\varphi_x(y)=\varphi(x,y)$ 关于 y 是连续的，对每个 $y\in X_2$，$\varphi^y(x)=\varphi(x,y)$ 关于 x 是连续的，又若 X_1 或 X_2 完备，则 φ 是有界的（即存在 $M>0$，使对一切 $x\in X_1,y\in X_2$，有 $\|\varphi(x,y)\|\leqslant M\|x\|\cdot\|y\|$）.

46. 设 X_1,X 为赋范线性空间，$X_2=X^*$，$T\in\mathscr{B}(X_1,X)$，$f\in X^*$，令 $\varphi_T(x,f)=f(Tx)$，则 $\varphi_T(x,f)$ 是 $X_1\times X_2$ 上的有界双线性型，试证明

(i) $\|\varphi_T\|=\|T\|$（这里 $\|\varphi_T\|=\sup\{|\varphi_T(x,f)|:\|x\|\leqslant 1,\|f\|\leqslant 1\}$）；

(ii) 映射 $l:T\to\varphi_T$ 是 $\mathscr{B}(X_1,X_2)\to\mathscr{B}(X_1,X_2;\mathbf{C})$ 中的等距线性映射，这里 $\mathscr{B}(X_1,X_2;\mathbf{C})$ 表示 $X_1\times X_2$ 上的有界双线性型全体；

(iii) 若 X 自反，则映射 $l:T\to\varphi_T$ 是满射.

47. 设 X_1,X_2 为赋范线性空间，X 是巴拿赫空间，则 $\mathscr{B}(X_1,X_2;X)$ 也是巴拿

赫空间.

48. 设 U 为内积空间,令 $\varphi_T(x,y)=(Tx,y)$,其中 $T\in\mathscr{B}(U)$,则 $\|\varphi_T\|=\|T\|$.

49. 设 H 是希尔伯特空间,对 $H\times H$ 上的任意有界半双线性型 $\varphi(x,y)$,必存在惟一的 $T\in\mathscr{B}(H)$,使对一切 $x,y\in H$,有

$$\varphi(x,y)=(Tx,y),$$

且

$$\|\varphi\|=\|T\|=\|\varphi_T\|,$$

其中 $\varphi_T(x,y)=(Tx,y)$.

50. 设 H 为希尔伯特空间,$T\in\mathscr{B}(H)$,T 正常,则存在酉算子 U,使 $T^*=UT$.

提示 利用正常算子性质,先作 $R(T)\to R(T^*)$上的算子 U:$UTx=T^*x$,由此可得本题结论.

注 本题可改为:若 $S,T\in\mathscr{B}(H)$,对一切 $x\in H$,有 $\|Sx\|=\|Tx\|$,则存在酉算子 U,使 $S=UT$.

51. 设 H 为希尔伯特空间,$T\in\mathscr{B}(H)$,$R(T)=H$,试证明存在常数 $\alpha>0$,使得对一切 $x\in H$,有

$$\|T^*x\|\geqslant\alpha\|x\|.$$

提示 令 $J=\{x\in H:\|T^*x\|\leqslant 1\}$,并作 H 上的有界线性泛函

$$f_x(y)=(y,x)\qquad(y\in H),$$

应用共鸣定理证明存在常数 $K>0$,使得

$$\sup_{x\in J}\|f_x\|\leqslant K,$$

从而可得,对一切 $y\in H$,成立

$$\|T^*y\|\geqslant\frac{1}{K}\|y\|.$$

52. 设 H 为希尔伯特空间,$T\in\mathscr{B}(H)$为单侧移位算子,$Te_k=e_{k+1}$,$k=1,2,\cdots$,其中$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是 H 的完备标准直交基,若 N 是 H 的闭子空间,N 约化算子 T,则 $N=\{0\}$或者 $N=H$.

提示 设 $N\neq\{0\}$,令 m 是$y\neq 0$,$y=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k\in N$ 中使$\lambda_k\neq 0$ 的最小指标,证明 $m=1$.

53. 设 H 为希尔伯特空间,$\lambda\in\mathbf{C}$,则下列条件等价(H 换成巴拿赫空间 X 也成立):

(i) $\lambda\in\sigma_a(T)$;

(ii) 存在算子序列 S_n,$\|S_n\|=1$,使 $\|(T-\lambda I)S_n\|\to 0\quad(n\to\infty)$.

54. 设 F 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的任一非空有界闭集，$\{e_n\}(n=1,2,\cdots)$是 H 的正规正交基，则存在一个正常算子 T，使得

(i) $\sigma(T)=F$；

(ii) $\lambda\in F\Leftrightarrow\lambda\in\sigma_a(T)$.

提示 取 F 的一个可数稠子集$\{\mu_n\}$，作 $T\in\mathscr{B}(H)$如下

$$Te_n=\mu_n e_n,\qquad n=1,2,\cdots.$$

55. 设 H 为希尔伯特空间，$T\in\mathscr{B}(H)$，$\sigma(T)\subset\{z\in\mathbf{C}:|z|<r\}$，如果$|z|<r$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nT^n$ 在 H 上处处收敛．

提示 实际上利用题设条件可以证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|\cdot\|T^n\|$ 收敛，从面$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nT^n$ 按算子范数收敛.

第二篇 《抽象分析基础》习题与解答

第一章 集、直线上的点集

§1.1 集合及其运算

1. 证明

(1) $A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$;

(2) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$;

(3) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$;

(4) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$;

(5) $(A-B)-(C-D)\subset(A-C)\cup(D-B)$.

证 (1) $A-(A\cap B)=(A-A)\cup(A-B)=A-B$,

$(A\cup B)-B=(A-B)\cup(B-B)=A-B$.

(2) $$\begin{aligned}(A-B)\cap(C-D)&=(A\cap\mathscr{C}B)\cap(C\cap\mathscr{C}D)\\&=(A\cap C)\cap(\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}D)\\&=(A\cap C)\cap\mathscr{C}(B\cup D)\\&=(A\cap C)-(B\cup D).\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}A-(B-C)&=A\cap\mathscr{C}(B\cap\mathscr{C}C)=A\cap(\mathscr{C}B\cup C)\\&=(A\cap\mathscr{C}B)\cup(A\cap C)=(A-B)\cup(A\cap C).\end{aligned}$$

(4) $(A-B)-C=(A\cap\mathscr{C}B)\cap\mathscr{C}C=A\cap\mathscr{C}(B\cup C)=A-(B\cup C)$.

(5) $$\begin{aligned}(A-B)-(C-D)&=(A\cap\mathscr{C}B)\cap\mathscr{C}(C\cap\mathscr{C}D)=A\cap\mathscr{C}B\cap(\mathscr{C}C\cup D)\\&=(A\cap\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}C)\cup(A\cap\mathscr{C}B\cap D)\subset(A-C)\cup(D-B).\end{aligned}$$

2. 证明

(1) $B-\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in I}(B-A_\alpha)$;

(2) $B-\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I}(B-A_\alpha)$;

(3) $B\cup\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}(B\cup A_\alpha)$;

(4) $\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)-B=\bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha-B)$;

(5) $\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)-B=\bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha-B)$.

证 (1) 设 $x\in B-\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$,则有 $x\in B$,且 $x\overline{\in}\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$,即 $x\in B$ 且 $x\overline{\in}A_\alpha$ $(\forall\alpha\in I)$,所以 $x\in B-A_\alpha$ $(\forall\alpha)$,即 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}(B-A_\alpha)$.

反之，设 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}(B-A_\alpha)$，则 $x\in B$ 且 $x\notin A_\alpha\quad(\forall\alpha)$，即 $x\in B$，且 $x\notin\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$，故 $x\in B-\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$.

(2) 证法同(1).

(3) 设 $x\in B\cup\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$，则 $x\in B$ 或 $x\in A_\alpha\quad(\forall\alpha\in I)$，即 $x\in B\cup A_\alpha\quad(\forall\alpha\in I)$，故 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}(B\cup A_\alpha)$.

反之，若 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}(B\cup A_\alpha)$，则 $x\in B\cup A_\alpha\quad(\forall\alpha\in I)$，若 $x\in B$，则 $x\in B\cup\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$，若 $x\notin B$，则 $x\in A_\alpha\quad(\forall\alpha\in I)$，从而 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$，$x\in B\cup\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$.

(4) $x\in\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)-B\Leftrightarrow x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 且 $x\notin B\Leftrightarrow\exists\,\alpha\in I$，使 $x\in A_\alpha$ 且 $x\notin B\Leftrightarrow x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha-B)$.

(5) $x\in\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)-B\Leftrightarrow x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 且 $x\notin B\Leftrightarrow x\in A_\alpha-B\ (\forall\alpha\in I)$

$$\Leftrightarrow x\in\bigcap_{\alpha\in I}(A_\alpha-B).$$

3. 证明 $E-\varliminf\limits_n A_n=\varlimsup\limits_n(E-A_n)$.

证

$$E-\varliminf_n A_n=E-\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\right)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(E-\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\right)$$
$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}(E-A_n)=\varlimsup_n(E-A_n).$$

4. 设 $A_{2n-1}=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，$A_{2n}=(0,n)$，$n=1,2,3,\cdots$，求 $\varliminf\limits_n A_n$ 和 $\varlimsup\limits_n A_n$.

解 首先 $\varliminf\limits_n A_n\subset\varlimsup\limits_n A_n\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=(0,+\infty)$. 其次，$x\in(0,+\infty)$ 时，存在 n_0，使 $n\geqslant n_0$ 时，$x>\dfrac{1}{n}$，即 $n\geqslant n_0$ 时，$x\notin A_{2n-1}$，所以 $x\notin\varliminf\limits_n A_n$，故 $\varliminf\limits_n A_n=\varnothing$.

又易知，对任何 k，$\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}A_n=(0,+\infty)$，从而

$$\varlimsup_n A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n=(0,+\infty).$$

5. 设 $\{A_n\}$ 是渐张集列，证明

$$\lim_n A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

证 因为 $A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$，则对任一自然数 k，$\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，$\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}A_n=A_k$，从而 $\varlimsup\limits_n A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，$\varliminf\limits_n A_n=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$，故 $\lim\limits_n A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

6. 用 $\chi_E(x)$ 表示 E 的特征函数，试证明对任一集列 $\{E_n\}$，有

$$\chi_{\overline{\lim\limits_n} E_n}(x)=\overline{\lim_n}\,\chi_{E_n}(x),\qquad \chi_{\underline{\lim\limits_n} E_n}(x)=\underline{\lim_n}\,\chi_{E_n}(x).$$

证 因为 $\chi_{\overline{\lim\limits_n} E_n}(x)=1 \Leftrightarrow x\in\overline{\lim\limits_n}E_n\Leftrightarrow \{E_n\}$中有无限多个集合含有 $x\Leftrightarrow$ $\{\chi_{E_n}(x)\}$中有无限多个取值为 1 $\Leftrightarrow \overline{\lim\limits_n}\,\chi_{E_n}(x)=1$.

而函数 $\chi_{\overline{\lim\limits_n} E_n}(x)$与函数$\overline{\lim\limits_n}\chi_{E_n}(x)$的值不取 1 就是取 0，两个函数取值为 0 的点也必定一致，故

$$\chi_{\overline{\lim\limits_n} E_n}(x)=\overline{\lim_n}\,\chi_{E_n}(x).$$

同理可证 $\chi_{\underline{\lim\limits_n} E_n}(x)=\underline{\lim\limits_n}\,\chi_{E_n}(x)$.

§1.2 映射·集的对等·可列集

1. 设 φ 是 $X\to Y$ 的映射，$A,A_\alpha\in X,B_\alpha\in Y,\alpha\in I$，试证明

(1) $\varphi\left(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha\right)=\bigcup\limits_\alpha\varphi(A_\alpha),\varphi\left(\bigcap\limits_\alpha A_\alpha\right)\subset\bigcap\limits_\alpha\varphi(A_\alpha)$;

(2) $\varphi^{-1}\left(\bigcap\limits_\alpha B_\alpha\right)=\bigcap\limits_\alpha(\varphi^{-1}(B_\alpha)),\varphi^{-1}\left(\bigcup\limits_\alpha B_\alpha\right)=\bigcup\limits_\alpha(\varphi^{-1}(B_\alpha)),\varphi^{-1}(\mathscr{C}B)=\mathscr{C}\varphi^{-1}(B)$;

(3) $\varphi(\varphi^{-1}(B))\subset B,\varphi^{-1}(\varphi(A))\supset A$，并举出有真包含关系之例.

证 (1) 显然成立.

(2)

$$x\in\varphi^{-1}\left(\bigcap_\alpha B_\alpha\right)\Leftrightarrow\varphi(x)\in\bigcap_\alpha B_\alpha\Leftrightarrow x\in\varphi^{-1}(B_\alpha),\qquad\forall\alpha\in I$$
$$\Leftrightarrow x\in\bigcap_\alpha(\varphi^{-1}(B_\alpha)).$$

$$x\in\varphi^{-1}\left(\bigcup_\alpha B_\alpha\right)\Leftrightarrow\varphi(x)\in\bigcup_\alpha B_\alpha\Leftrightarrow \text{存在 }\alpha\in I,\text{使 }\varphi(x)\in B_\alpha$$
$$\Leftrightarrow x\in\bigcup_\alpha\varphi^{-1}(B_\alpha).$$

$$x\in\varphi^{-1}(\mathscr{C}B)\Leftrightarrow\varphi(x)\in\mathscr{C}B\Leftrightarrow\varphi(x)\overline{\in}B$$
$$\Leftrightarrow x\overline{\in}\varphi^{-1}(B)\Leftrightarrow x\in\mathscr{C}\varphi^{-1}(B).$$

(3) 由 $\varphi^{-1}(B)$的定义，$x\in\varphi^{-1}(B)$时，必有 $\varphi(x)\in B$，故 $\varphi(\varphi^{-1}(B))\subset B$. 设 $x\in A$，则 $\varphi(x)\in\varphi(A)$，再由原像的定义知 $x\in\varphi^{-1}(\varphi(A))$，即 $\varphi^{-1}(\varphi(A))\supset A$.

例如，$\varphi(x)=\sin x$，取 $B=[0,2]$，则 $\varphi(\varphi^{-1}(B))\subsetneqq[0,2]$；若取 $A=[0,1]$，$\varphi(x)=x^2$，则 $\varphi(A)=[0,1]$，但 $\varphi^{-1}(\varphi(A))=[-1,1]$，$\varphi^{-1}(\varphi(A))\supsetneqq A$.

2. 设 $A=(0,+\infty),B=(-\infty,+\infty)$，试作 A 到 B 的一一对应.

解 令 $\varphi(x)=\ln x, x\in(0,+\infty)$，则 φ 是 A 到 B 的一一对应映射.

3. 试作 $[0,1]$ 与 $(0,1)$ 间的一一对应.

解 设 $(0,1)$ 中的有理点全体为 $\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$，则 $[0,1]$ 中有理点全体为 $\{0,1,r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$，作对应

$$0\leftrightarrow r_1,\ 1\leftrightarrow r_2,\ r_1\leftrightarrow r_3,\cdots,r_n\leftrightarrow r_{n+2},\cdots,$$

再让 $(0,1)$ 中的无理点与 $[0,1]$ 中的无理点自身对应，这样就建立了 $(0,1)$ 与 $[0,1]$ 之间的一一对应.

4. 试作 $(-1,1)$ 与 $(-\infty,+\infty)$ 的一一对应.

解 令 $\varphi(x)=\tan\frac{\pi}{2}x, x\in(-1,1)$，则 $\varphi(x)$ 是 $(-1,1)$ 到 $(-\infty,+\infty)$ 上的一对一映射.

5. 证明所有系数为有理数的多项式全体是可列的.

证 我们用 A_n 表示系数为有理数的 n 次多项式全体，P 为所有系数为有理数的多项式全体，则 $P=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，$p(x)\in A_n$，$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 均为有理数，显然

$$A_n\sim E_n=\{(a_0,a_1,\cdots,a_n):a_i\text{ 为有理数},i=0,1,\cdots,n\},$$

每个 E_n 可列，故 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 是可列集.

作映射 $\varphi:a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\to(a_0,a_1,\cdots,a_n)$，显然 φ 是 P 到 E 上的一对一映射，故 P 是可列集.

6. 证明直线上一切端点为有理数的开区间全体是一个可列集.

证 记 $\mathbf{Q}$ 为有理数全体，对任何有理数 r，$(r,+\infty)\cap\mathbf{Q}$ 也是可列集，注意到

$$\{(r_1,r_2):r_1<r_2,r_1,r_2\in\mathbf{Q}\}=\bigcup_{r_1\in\mathbf{Q}}\{(r_1,r_2):r_2\in(r_1,+\infty)\cap\mathbf{Q}\},$$

上式右端是可列个可列集的并，故可列.

7. 设 E 为 $\mathbf{R}$ 中的可列集，对任何实数 a，记 $E_a=\{x+a:x\in E\}$，证明必存在 $a\in\mathbf{R}$，使 $E\cap E_a=\varnothing$.（提示：考虑可列集 $A=\{x-y:x,y\in E\}$）.

证 因为 E 可列，则易知集合 $A=\{x-y:x,y\in E\}$ 也是可列集，取 $a\notin A$，因实数全体不可列，所以这样的 a 总可取到，此时，必有

$$E\cap E_a=\varnothing.$$

事实上，如果存在 $x\in E\cap E_a$，则必有 $y\in E$，使 $x=y+a$，于是

$$a=x-y,\qquad x,y\in E,$$

这与 a 的取法矛盾.

8. 证明闭区间 $[a,b]$ 上任何单调函数的间断点至多是可列集.

证 不妨设 f 是 $[a,b]$ 上的单调增加函数，首先由数学分析可知 f 的间断点

都是第一类间断点，且 $f(x-0)\leqslant f(x)\leqslant f(x+0), x\in(a,b), f(a)\leqslant f(a+0)$，$f(b-0)\leqslant f(b)$.

证法 1　记 f 的间断点全体为 E，并令

$$E_n = E\left(f(x+0)-f(x-0)\geqslant \frac{1}{n}\right),$$

这里约定 $f(b+0)=f(b), f(a-0)=f(a)$. 易知 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. 我们证明每个 E_n 都是有限集.

任取 $x_1,x_2,\cdots,x_p\in E_n$，不妨设 $a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_p\leqslant b$，再取分点 $\{\xi_i\}$，使得 $\xi_0=a, \xi_p=b, x_i<\xi_i<x_{i+1}, i=1,2,\cdots,p-1$，则

$$f(\xi_{i-1})\leqslant f(x_i-0)<f(x_i+0)\leqslant f(\xi_i),$$

所以

$$f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})\geqslant f(x_i+0)-f(x_i-0)\geqslant\frac{1}{n},$$

$$\frac{p}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{p}[f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})]=f(\xi_p)-f(\xi_0)=f(b)-f(a),$$

即

$$p\leqslant n[f(b)-f(a)],$$

故 E_n 中点的个数必是有限的，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 至多可列.

证法 2　若 $x_1,x_2\in E, x_1<x_2$，则 $f(x_1-0)<f(x_1+0)\leqslant f(x_2-0)<f(x_2+0)$. 因此，对每一个 $x\in E$，对应于直线上一个开区间 $(f(x-0),f(x+0))$，且这些区间互不相交，故 E 至多可列.

9. 设直线上点集 A 具有下述性质：对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 总存在包含 x 的某个区间 $(x-\delta,x+\delta)$，使得 $(x-\delta,x+\delta)\cap A$ 至多可列，则 A 必是有限集或可列集.

$\left(\text{提示：}A=\bigcup_{n=1}^{\infty}([-n,n]\cap A)=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)$.

证　显然 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}([-n,n]\cap A)=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，其中 $A_n=[-n,n]\cap A$，所以只要证明每个 A_n 至多可列即可. 由条件，$x\in[-n,n]$，取 $\delta_x>0$，使 $(x-\delta_x,x+\delta_x)\cap A$ 至多可列，因为

$$\bigcup_{x\in[-n,n]}(x-\delta_x,x+\delta_x)\supset[-n,n],$$

据有限覆盖定理，可取出有限个开区间 $\{(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i):i=1,2,\cdots,m\}$ 覆盖 $[-n,n]$.

$$\bigcup_{i=1}^{m}(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\cap A)\supset[-n,n]\cap A=A_n,$$

每个$(x_i-\delta_i, x_i+\delta_i)\cap A$至多可列，故$A_n$至多可列，$A$必是有限集或可列集.

§1.3 集的势·半序集

1. 设集A,B,C满足关系$C\subset A\subset B$，若$B\sim C$，证明$B\sim A$.

证 由于$B\sim C$，$C\subset A$，$A\sim A$，$A\subset B$，由伯恩斯坦定理立即知$B\sim A$.

2. 利用伯恩斯坦定理证明$A=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$与$B=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$对等.

证 映射$(x,y)\to\left(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y\right)$显然是集合$A$到集合

$$C=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant\frac{1}{4}\}\subset B$$

上的一对一映射，又$B\sim B\subset A$，则据伯恩斯坦定理$A\sim B$.

3. 设p,q为任意两个数，$p\neq q$，记

$$M=\{(x_n):x_n=p\text{ 或 }q, n=1,2,3,\cdots\},$$

证明M的势为$\aleph$.

证 用B表示二进制小数全体，作$M\to B$的映射如下

$$(x_n)=0.t_1t_2t_3,\cdots,\qquad (x_n)\in M,$$

其中当$x_n=p$时，$t_n=0$，当$x_n=q$时，$t_n=1$. 易知φ是M到B上的一对一映射，所以$\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{B}}=\aleph$.

4. 设集A中每个元素，由相互独立的可列个指标所决定，即$A=\{a_{x_1x_2\cdots}\}$，证明如果每个指标x_i在一个可列集上变化，则A的势是$\aleph$；如果每个指标x_i在一个势为$\aleph$的集上变化，则A的势也是$\aleph$.

证 记

$$A_1=\{a_{x_1x_2}\cdots:\text{每个 }x_i\text{ 在一个势为 }\aleph\text{ 的集上变化}\},$$

$$A_2=\{a_{x_1x_2}\cdots:\text{每个 }x_i\text{ 在一个可列集上变化}\},$$

$$A_3=\{a_{x_1x_2}\cdots:\text{每个 }x_i\text{ 取 0 或 1}\}.$$

显然A_1对等于实数列全体$\mathbf{R}^\infty$，A_3对等于二进制小数全体，从而有$\aleph=\overline{\overline{A}}_1\geqslant\overline{\overline{A}}_2\geqslant\overline{\overline{A}}_3=\aleph$，所以$\overline{\overline{A}}_1=\overline{\overline{A}}_2=\aleph$.

5. 设$C_{[0,1]}$表示$[0,1]$上连续函数全体，试证它的势为$\aleph$.

证 由于常值函数属于$C_{[0,1]}$，常值函数全体的势为$\aleph$，所以$C_{[0,1]}$的势大于等于$\aleph$. 下面再证明$C_{[0,1]}$与$\mathbf{R}^\infty$的一个子集对等. 把$[0,1]$中的有理数全体记为$r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n,\cdots$，作$C_{[0,1]}\to\mathbf{R}^\infty$的映射$\varphi$如下

$$f \to (f(r_1), f(r_2), \cdots), \qquad f \in C_{[0,1]},$$

则 φ 是 $C_{[0,1]} \to \mathbf{R}^\infty$ 中的一对一映射，即 $C_{[0,1]} \sim \varphi(C_{[0,1]}) \subset \mathbf{R}^\infty$，所以 $C_{[0,1]}$ 的势为 $\aleph$.

6. 设 M 为 $[a,b]$ 上单调函数全体，试证明 $\overline{\overline{M}} = \aleph$.

证 由于常值函数是单调函数，所以 $\overline{\overline{M}} \geqslant \aleph$，记 $[a,b]$ 中的有理数全体为 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$，$f \in M$，由 $(f(r_1), f(r_2), \cdots)$ 可惟一确定 f 在一切连续点上的函数值，又 f 的间断点至多可列，设无理间断点为 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，这里当 f 仅有有限个无理间断点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 时，约定 $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots$，作 $M \to \mathbf{R}^\infty$ 的映射 φ 如下

$$f \to (f(r_1), f(x_1), f(r_2), f(x_2), \cdots, f(r_n), f(x_n), \cdots).$$

显然 $f_1 \neq f_2$ 时，必有 $\varphi(f_1) \neq \varphi(f_2)$，所以 M 对等于 $\mathbf{R}^\infty$ 的一个子集，故 $\overline{\overline{M}} \leqslant \aleph$，从而 $\overline{\overline{M}} = \aleph$.

§1.4 数直线 R 中的点集

1. 设 G 为 $\mathbf{R}$ 中的开集，F 为 $\mathbf{R}$ 中的闭集，试证明 $G - F$ 是开集；$F - G$ 是闭集.

证 因为 $G - F = G \cap \mathscr{C}F$，所以 $G - F$ 为开集；而 $F - G = F \cap \mathscr{C}G$，故 $F - G$ 为闭集.

2. 证明 $x \in \overline{A}$ 的充要条件是存在 A 中一个点列 $\{x_n\}$，使得 $x_n \to x$.

证 必要性：设 $x \in \overline{A} = A \cup A'$，若 $x \in A$，可取 $x_n \equiv x$，若 $x \overline{\in} A$，则 $x \in A'$，故存在 $x_n \in \left(x - \dfrac{1}{n}, x + \dfrac{1}{n}\right) \cap (A - \{x\})$，$x_n \to x$.

充分性：若存在 A 中点列 $\{x_n\}$，使 $x_n \to x$，若对一切 n，$x_n \neq x$，则 $x \in A'$，若存在 $x_n = x$，则 $x \in A$，故总有 $x \in \overline{A}$.

3. 试证明

(1) 设 $A \subset B$，则 $A' \subset B'$；

(2) $(A \cup B)' = A' \cup B'$；

(3) $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集.

证 (1) 设 $A \subset B$，$x \in A'$，则存在 $\{x_n\} \subset A - \{x\} \subset C - \{x\}$，使 $x_n \to x$，故 $x \in B'$，即 $A' \subset B'$.

(2) 因为 $A \subset A \cup B$，$B \subset A \cup B$，则由(1)可知 $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$，反之，若 $x \in (A \cup B)'$，则存在点列 $\{x_n\} \subset A \cup B - \{x\}$，使 $x_n \to x$，于是总有无穷子序列 $\{x_{n_k}\} \subset A$ 或 $\{x_{n_k}\} \subset B$，所以 $x \in A'$ 或 $x \in B'$，即 $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$.

(3) 设闭集 $F \supset A$，则 $A' \subset F' \subset F$，于是

$$\bar{A}=A\cup A'\subset F.$$

故 $\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集.

4. 证明有限区间 (a,b) 不能表成有限个两两不相交的闭集之并.

证 设 $(a,b)=\bigcup\limits_{k=1}^{n}F_k$,其中 F_k 为互不相交的闭集.设 $x_n\to a$,其中 $x_n\in(a,b)$,因为 $\{x_n\}\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}F_k$,则必有无穷子序列 $\{x_{n_k}\}\subset F_{k_0}$,其中 $1\leqslant k_0\leqslant n$,$x_{n_k}\to a\in F_{k_0}\subset(a,b)$,矛盾.

5. 证明任何点集 E 的内点全体是开集.

证 设 $\mathring{E}$ 为 E 的内点组成之集,$x_0\in\mathring{E}$,则存在 (α,β),使 $x_0\in(\alpha,\beta)\subset E$,对任意的 $x\in(\alpha,\beta)$,显然 (α,β) 也是 x 的邻域,因此,x 也是 E 的内点,故 $(\alpha,\beta)\subset\mathring{E}$,$\mathring{E}$ 是开集.

6. 设 G_1,G_2 是 $\mathbf{R}$ 中的开集,且 $G_1\subset G_2$,试证明 G_1 的每个构成区间必含在 G_2 的某个构成区间之中.

证 设 G_1,G_2 为开集,$G_1\subset G_2$,(α_1,β_1) 是 G_1 的任一构成区间,$x\in(\alpha_1,\beta_1)$.又设 G_2 中含有 x 的构成区间是 (α_2,β_2),现证 $(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha_2,\beta_2)$.

用反证法.假设 $\alpha_1<\alpha_2$,由于 $\alpha_2<x$,则 $\alpha_2\in(\alpha_1,x)\subset(\alpha_1,\beta_1)\subset G_1\subset G_2$,这是不可能的,故 $\alpha_1\geqslant\alpha_2$.同理可证 $\beta_1\leqslant\beta_2$,从而 $(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha_2,\beta_2)$.

7. 连续映射是否映开集为开集?

解 连续映射不一定映开集为开集.如 $f(x)=\sin x,x\in\mathbf{R}$,$f(x)$ 连续,但映开集 $(0,4\pi)$ 为闭集 $[-1,1]$.

8. 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上,试证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续的充要条件是任何闭集的原像是闭集.

证 任取闭集 F,因为 $\mathscr{C}f^{-1}(F)=f^{-1}(\mathscr{C}F)$,而 f 连续 $\Leftrightarrow f^{-1}(\mathscr{C}F)$ 开集 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{C}f^{-1}(F)$ 为开集 $\Leftrightarrow f^{-1}(F)$ 为闭集.

9. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的实值函数,试证明 f 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数的充要条件是:对任何实数 c,集合

$$\{x:f(x)\geqslant c\}\text{ 和 }\{x:f(x)\leqslant c\}$$

均为闭集.

证 必要性:

证法 1 记 $A=\{x:f(x)\geqslant c\}$,设 $x_0\in A'$,则存在 $\{x_n\}\subset A$,使 $x_n\to x_0$,$f(x_n)\geqslant c$ $(n=1,2,3,\cdots)$,f 连续,则必有 $f(x_0)\geqslant c$,故 $x_0\in A$,即 $A'\subset A$,所以 A 为闭集.

证法 2 因为 $A=\{x:f(x)\geqslant c\}=f^{-1}([c,+\infty))$,由第 8 题知 A 为闭集.

同理可证 $B=\{x:f(x)\leqslant c\}$ 为闭集.

充分性：设对任何实数 c，A 与 B 均为闭集，若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使 f 在 x_0 处间断，则必存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $\{x_n\}\subset\mathbf{R}$，$x_n\to x_0$，使

$$f(x_n)\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0 \text{ 或者 } f(x_n)\leqslant f(x_0)-\varepsilon_0.$$

如果有无穷子序列 x_{n_k}，使得 $f(x_{n_k})\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0$，因为 $x_{n_k}\to x_0$，且集合 $\{f:f(x)\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0\}$ 是闭集，则 $x_0\in\{x:f(x)\geqslant f(x_0)+\varepsilon\}$，于是有 $f(x_0)\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0$，这是不可能的. 同样，如果有子序列 x_{n_k}，使得 $f(x_{n_k})\leqslant f(x_0)-\varepsilon_0$，可得 $f(x_0)\leqslant f(x_0)-\varepsilon_0$，矛盾，因此 f 必是连续函数.

10. 设 $\{A_n\}$ 是有限区间 $[a,b]$ 中的渐缩序列，且每个 A_n 均为非空闭集，试证交集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 非空.

证法 1 设 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$，以 $(a-1,b+1)$ 为基本集，对每个 A_n 取补得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}A_n\supset[a,b].$$

于是存在有限个开集 $\mathscr{C}A_{n_1},\mathscr{C}A_{n_2},\cdots,\mathscr{C}A_{n_k}$ 覆盖 $[a,b]$，可设 $n_1<n_2<\cdots<n_k$，则

$$\mathscr{C}A_{n_k}=\bigcup_{i=1}^{k}\mathscr{C}A_{n_i}\supset[a,b].$$

注意到 $A_{n_k}\subset[a,b]$，必有 $A_{n_k}=\varnothing$，矛盾，故 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\neq\varnothing$.

证法 2 不妨设 $A_n\supsetneqq A_{n+1}(\forall n)$，取 $x_n\in A_n-A_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$，则 $\{x_n\}$ 为 $[a,b]$ 中的点列，必存在子序列 $x_{n_k}\to x_0$. 对任一自然数 n，当 $n_k>n$ 时，$x_{n_k}\in A_{n_k}\subset A_n$，故 $x_0\in A_n$，即 $x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\neq\varnothing$.

第一章 复习题与解答

1. 设 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 是渐张集列，$\{C_n\}$ 和 $\{D_n\}$ 是渐缩集列，证明

(1) $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cap B_n\right)$；

(2) $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n\right)\cup\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}D_n\right)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(C_n\cup D_n)$.

证 (1) 对任一 $n\in\mathbf{N}$，$A_n\cap B_n\subset\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\right)$，所以

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)\subset\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right).$$

反之，设 $x\in\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\right)$，则必有 $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，且 $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$，从而存在自然数 i,j，使 $x\in A_i$，$x\in B_j$，取 $m=\max(i,j)$，由于 $\{A_n\}$，$\{B_n\}$ 均是渐张集列，所以 $x\in A_m\cap B_m$，这就证明了 $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)$，即

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n),$$

故

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n).$$

(2) 对任一 $n\in\mathbf{N}$，$\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n\right)\cup\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}D_n\right)\subset C_n\cup D_n$，所以

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n\right)\cup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}D_n\right)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}(C_n\cup D_n).$$

反之，设 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(C_n\cup D_n)$，则 $x\in C_n\cup D_n(n=1,2,3,\cdots)$，所以 x 必属于无穷多个 C_n 或者属于无穷多个 D_n. 不妨设 x 属于无穷多个 C_n，由于 $\{C_n\}$ 是渐缩集列，所以 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n$，从而 $x\in\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n\right)\cup\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}D_n\right)$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(C_n\cup D_n)\subset\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n\right)\cup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}D_n\right),$$

故

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n\right)\cup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}D_n\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(C_n\cup D_n).$$

2. 设有集合 A,B,C，试证明

(1) 若 $A-B\sim B-A$，则 $A\sim B$；

(2) 若 $A\subset B$ 且 $A\sim A\cup C$，则 $B\sim B\cup C$.

(提示：令 $C_1=C-B$，则 $B\cup C=B\cup C_1=(B-A)\cup(A\cup C_1)$，$B=(B-A)\cup A$).

证 (1) 设 $A-B\sim B-A$，因为

$$(A-B)\cap(A\cap B)=(B-A)\cap(A\cap B)=\varnothing,$$

所以

$$A=(A-B)\cup(A\cap B)\sim(B-A)\cup(A\cap B)=B.$$

(2) 令 $C_1=C-B$，因为 $A\subset B$，则 $B\cup C=B\cup C_1=(B-A)\cup(A\cup C_1)$，$B=(B-A)\cup A$，只要证明 $A\sim A\cup C_1$，事实上，因为

$$A\cup C\supset A\cup C_1\supset A,\qquad A\sim A\cup C,$$

故 $A\cup C_1\sim A$ 的一个子集，据伯恩斯坦定理可知 $A\sim A\cup C_1$，从而 $B\sim B\cup C$.

3. 设 f 是定义在 $[0,1]$ 上的实值函数，而且存在常数 M，使得对 $[0,1]$ 中任意有限个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均有

$$|f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)|\leqslant M,$$

试证明集合 $E=\{x\in[0,1]:f(x)\neq 0\}$ 至多可列.

证 令 $E_n=\left\{x\in[0,1]:f(x)>\dfrac{1}{n}\right\}$，$E_{-n}=\left\{x\in[0,1]:f(x)<-\dfrac{1}{n}\right\}$，则

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cup E_{-n}).$$

容易证明每个 E_n,E_{-n} 均为有限集. 事实上,设 $x_1,x_2,\cdots,x_p\in E_n$(或 E_{-n}),则

$$p\cdot\frac{1}{n}\leqslant|f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_p)|\leqslant M,$$

从而 $p\leqslant Mn$,故 E 至多可列.

4. 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$ 是一可列集,A 的一切子集所成的集为 $\mathscr{A}$,B 为 $[0,1]$ 中的二进位小数全体,试作 $\mathscr{A}\to B$ 上的一一映射 φ.

解 $C\in\mathscr{A}$,令

$$\varphi(C)=0.t_1t_2\cdots,$$

其中 $a_n\in C$ 时,$t_n=1$,$a_n\overline{\in}C$ 时,$t_n=0(n=1,2,3,\cdots)$,则 φ 是 $\mathscr{A}$ 到 B 上的一对一映射,从而 $\overline{\overline{A}}=\aleph$.

5. 试证明定义在 $[a,b]$ 上的实值函数 f 的严格极值点全体至多可列(x_0 为 f 的严格极大值点,是指存在 $\delta>0$,使 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)<f(x_0)$).

证 设 x_0 为 f 的严格极大值点,则存在 $\delta>0$,使 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)<f(x_0)$,在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中必有两个有理数 $\alpha_0,\beta_0(\alpha_0<\beta_0)$,令 x_0 与 (α_0,β_0) 对应,若 $x_1\neq x_0$ 也是 f 的严格极大值点,$x_1\leftrightarrow(\alpha_1,\beta_1)$,我们可以证明 (α_0,β_0) 与 (α_1,β_1) 不重合. 事实上,若 $(\alpha_0,\beta_0)=(\alpha_1,\beta_1)$,则 $f(x_1)<f(x_0)$ 以及 $f(x_0)<f(x_1)$,矛盾. 据§1.2 习题 6,直线上一切端点为有理数的开区间全体是可列集,故严格极大值点全体至多可列,同理严格极小值点全体也至多可列.

6. 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是直线上一族互不相交的开集,证明其中的成员至多可列个;对于直线上一族互不相交的闭集,结论又如何?

证 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是直线上一族互不相交的开集,对每个 $\alpha\in I$,取有理数 $r_\alpha\in U_\alpha$,因为 $\alpha\neq\alpha'$ 时,$U_\alpha\cap U_{\alpha'}=\varnothing$,故 $r_\alpha\neq r_{\alpha'}$,从而映射 $U_\alpha\to r_\alpha$ 是 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}\to$ 有理数集 $\mathbf{Q}$ 的一个单射,即 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 对等于 $\mathbf{Q}$ 的一个子集,故 $\{U_\alpha\}$ 至多可列.

对于互不相交的闭集族不一定可列,例如单点集 $\{x\}$ 是闭集,$\mathbf{R}$ 上单点集全体的势为 $\aleph$.

*7. 设点集 E 被一个开区间集类 $\mathscr{F}$ 所覆盖,则 $\mathscr{F}$ 中必能选出至多可列个开区间覆盖 E.

(提示:对 $x\in E$,找出 $\mathscr{F}$ 中一个开区间 I 及有理数 x_k 和正有理数 r,使 $x\in(x_k-r,x_k+r)\subset I$).

证 设 $\mathscr{F}=\{I_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 E 的一个开覆盖,其中每个 I_α 为 $\mathbf{R}$ 上的开区间,$x\in E$,存在 $\alpha\in I$,使 $x\in I_\alpha$. 因为 x 是 I_α 的内点,故存在有理数 x_k 和正有理数 r,使 $x\in(x_k-r,x_k+r)\subset I_\alpha$. 又因为

$$\{(x_k-r,x_k+r):x_k\in\mathbf{Q},r\in\mathbf{Q}\text{ 且 }r>0\}$$

至多可列，故可选出可列个开区间$\{(x_k-r,x_k+r)\}$来覆盖 E，记 $S_k=(x_k-r,x_k+r)$，$S_k\subset$某个 I_α，对可列个开区间 $S_1,S_2,\cdots,S_k,\cdots$，相应地有 $I_{\alpha_1},I_{\alpha_2},\cdots,I_{\alpha_k},\cdots$，使 $S_k\subset I_{\alpha_k}$，则$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_{\alpha_k}\supset E$.

*8. 设$\{f_n\}$是定义在 **R** 上的连续函数列，试证明点集

$$\{x:\varliminf_n f_n(x)>0\}$$

必可表为可列个闭集的并.

证

$$\begin{aligned}\{x:\varliminf_n f_n(x)>0\}&=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x:\varliminf_n f_n(x)\geqslant\frac{1}{k}\right\}\\&=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x:\exists N_x,\text{使 } n\geqslant N_x\text{ 时},f_n(x)\geqslant\frac{1}{2k}\right\}\\&=\bigcup_{k=1}^{\infty}\varliminf_n\left\{x:f_n(x)\geqslant\frac{1}{2k}\right\}\\&=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x:f_n(x)\geqslant\frac{1}{2k}\right\}\right).\end{aligned}$$

因为 f_n 是连续函数，所以每个$\left\{x:f_n(x)\geqslant\frac{1}{2k}\right\}$是闭集，从而可知

$$\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x:f_n(x)\geqslant\frac{1}{2k}\right\}$$

也是闭集，于是点集$\{x:\varliminf_n f_n(x)>0\}$可表为一列闭集$\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}\left\{x:f_n(x)\geqslant\frac{1}{2k}\right\}$($m=1,2,3,\cdots;k=1,2,3,\cdots$)之并.

*9. 设 f 是 **R** 上的可微函数，而且对任一实数 r，点集

$$\{x:f'(x)=r\}$$

是闭集，试证明 f'是 **R** 上的连续函数.

(提示：用反证法证明 $E_r=\{x:f'(x)\geqslant r\}$和 $E_r'=\{x:f'(x)\leqslant r\}$对每一个实数 r 均是闭集).

证 按照§1.4 习题 9，只要证明对每个实数 r，集合

$$E_r=\{x:f'(x)\geqslant r\}\text{ 和 }E_r'=\{x:f'(x)\leqslant r\}$$

均为闭集.我们用反证法证明这一结论.

设 $x_n\in E_r$，$x_n\to x_0$，我们证明 $x_0\in E_r$，因为若存在$\{x_{n_k}\}$，使 $f'(x_{n_k})=r$，则由条件可知 $x_0\in E_r$，其次，若存在 $x_n=x_0$，则 $x_0\in E_r$，故可设 $x_n<x_0(\forall n)$，且 $f'(x_n)>r$.

如果 $x_0\notin E_r$，则 $f'(x_0)<r$，因此，$\exists\delta>0$，使$|x-x_0|<\delta$ 时

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<r,$$

从而 $\exists N$，使 $n \geqslant N$ 时

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}<r.$$

因为 $f'(x_n)>r$，则 $\exists x \in (x_n, x_0)$，使

$$\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}>r.$$

令

$$F(t)=\frac{f(x_n)-f(t)}{x_n-t},$$

$F(t)$关于 $t \in [x, x_0]$连续，$F(x)>r$，$F(x_0)<r$，故存在 $x_n' \in [x, x_0]$，使

$$F(x_n')=r.$$

再由中值定理，$\exists a_n \in (x_n, x_n')$，使 $f'(a_n)=F(x_n')=r$. $x_n \to x_0$，$x_n \leqslant a_n \leqslant x_0 (n \geqslant N)$，所以 $a_n \to x_0$，由题设条件得 $f'(x_0)=r$，矛盾，故 E_r 闭. 同理可证 E'_r 也是闭集，所以 f' 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

第二章　勒贝格测度

§2.1　R 中的点集的外测度、内测度

1. 设 E 为 $\mathbf{R}$ 中的可列点集，则 $m^*E=0$.

证　由外测度的定义，单点集的外测度为 0，现在 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$，故

$$0\leqslant m^*E\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*\{x_n\}=0,$$

$$m^*E=0.$$

2. 如果 $m^*E=0$，则称 E 为零集，试证明

(1) 零集的任何子集仍是零集；

(2) 有限个或可列个零集的并集仍为零集.

证　(1) 设 $m^*E=0$，$E_1\subset E$，由外测度的单调性

$$m^*E_1\leqslant m^*E,$$

故 $m^*E_1=0$.

(2) 设 $E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$ 均为零集，则对一切 i，$m^*E_i=0$，由外测度的次可加性，得

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*E_i=0,$$

故 $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=0$.

3. 设 $A\subset\mathbf{R}$，且 $m^*A=0$，则对任意的集合 $B\subset\mathbf{R}$，有

$$m^*(A\cup B)=m^*B.$$

证　因为 $A\cup B\supset B$，所以 $m^*(A\cup B)\geqslant m^*B$，又因为 $m^*A=0$，则

$$m^*(A\cup B)\leqslant m^*A+m^*B=m^*B,$$

从而 $m^*(A\cup B)=m^*B$.

4. 设 E 为 $\mathbf{R}$ 中的零集，问其闭包是否一定是零集.

解　$m^*E=0$，未必有 $m^*(\bar{E})=0$，例如，有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可列集，故 $m^*\mathbf{Q}=0$，但 $\bar{\mathbf{Q}}=\mathbf{R}$，$\mathbf{R}$ 显然不是零集.

5. 设 E 为 $\mathbf{R}$ 中的任一点集，$\{I_n\}$ 是开区间列（可以相交），$\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\supset E$，试证明

$m^*E=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} mI_i:\ \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\supset E\right\}$.

证 对任一$\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\supset E$,令 $G=\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\supset E$,则

$$mG\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} mI_i,$$

$$m^*E=\inf\{mG:G\text{ 为开集,且 }G\supset E\}$$
$$\leqslant \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} mI_i:\ \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\supset E\right\}.$$

反之,对任一开集 $G\supset E$,令 $G=\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$,其中$\{I_i\}$为 G 的构成区间,则$\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\supset E$,且 $mG=\sum_{i=1}^{\infty} mI_i$.故

$$\inf\{mG:G\text{ 为开集,且 }G\supset E\}\geqslant \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} mI_i:\ \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\supset E\right\},$$

从而

$$m^*E=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} mI_i:\ \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\supset E\right\}.$$

§2.2 勒贝格可测集及其性质

1. 设 E_1,E_2 为可测集,试证明

$$m(E_1\cup E_2)=mE_1+mE_2-m(E_1\cap E_2).$$

证 因为 $E_1\cup E_2=E_1\cup(E_2-E_1\cap E_2)$,$E_1$ 与 $E_2-(E_1\cap E_2)$不相交,故

$$m(E_1\cup E_2)=mE_1+m(E_2-(E_1\cap E_2))$$
$$=mE_1+mE_2-m(E_1\cap E_2).$$

2. 设 E_1,E_2 为 $\mathbf{R}$ 中的有界点集,$E_1\subset E_2$,其中 E_1 是可测集,且有 $mE_1=m^*E_2$,试证明 E_2 也是可测集.

证 设 $E_1\subset E_2$

$$m^*E_2=mE_1=m_*E_1=\sup\{mF:F\text{ 为闭集,且 }F\subset E_1\}$$
$$\leqslant \sup\{mF:F\text{ 为闭集,且 }F\subset E_2\}$$
$$=m_*E_2\leqslant m^*E_2.$$

所以 $m^*E_2=m_*E_2$,E_2 也是可测集.

3. 设$\{E_n\}$是一列可测集,

(1) 证明 $m\left(\varliminf_n E_n\right)\leqslant\varliminf_n mE_n$;

(2) 若存在自然数 N,使 $m\left(\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k\right)<\infty$,试证明

$$m\left(\varlimsup_n E_n\right)\geqslant\varlimsup_n mE_n.$$

证 (1) 因为$\varliminf_n E_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}E_n$,令 $A_k=\bigcap_{n=k}^{\infty}E_n$,则$\{A_k\}$为渐张集列,所以

$$m\left(\varliminf_n E_n\right)=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\lim_{k\to\infty}mA_k\leqslant\varliminf_k mE_k.$$

(2) 若$\exists N$,使 $m\left(\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k\right)<\infty$,由于$\varlimsup_n E_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}E_n$,令 $A_k=\bigcup_{n=k}^{\infty}E_n$,则$\{A_k\}$为渐缩集列,$A_k\supset E_k$,由条件可知,$k\geqslant N$ 时,$mA_k<\infty$,所以

$$m\left(\varlimsup_n E_n\right)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\lim_{k\to\infty}mA_k\geqslant\varlimsup_{k\to\infty}mE_k.$$

4. 对每个 $\varepsilon>0$,构造一开集 $G\subset[0,1]$,使 $\bar{G}=[0,1]$,且 $mG\leqslant\varepsilon$.

解 设(0,1)中有理数全体为$\{r_n\}$,$\forall\varepsilon>0$,以每个 r_n 为中心,$\frac{\varepsilon_n}{2^n}$为半径,作开区间 $I_n\subset(0,1)\left(\varepsilon_n<\frac{\varepsilon}{2}\right)$,令 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\subset(0,1)$,则

$$mG\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}mI_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\varepsilon}{2^{n+1}}=\varepsilon.$$

显然 $\bar{G}=[0,1]$.

5. 设 E 是可测集,$mE=1$,$\{E_n\}$是 E 的一列可测子集,且对任何 $\varepsilon>0$,有这个集列中的一个集 E_n,使 $mE_n>1-\varepsilon$,试证明

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=1.$$

证 因为$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subset E$,所以 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant mE=1$.又对任何 $\varepsilon>0$,取 n,使 $mE_n>1-\varepsilon$,则

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\geqslant mE_n>1-\varepsilon.$$

因为 $\varepsilon>0$ 是任意的,故 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\geqslant1$,从而 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=1$.

6. 设 E 是可测集,$mE=1$,$\{E_n\}$是 E 的一列可测子集,且 $mE_n=1$,$n=1,2,3,\cdots$,试证明 $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=1$.

证 $m(E-E_n)=0\ (\forall n)$,$E-\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E-E_n)$,故 $m\left(E-\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0$,又$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=E-\left(E-\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)$,所以

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=1.$$

§2.3 勒贝格可测集类

1. 设 E 是 $\mathbf{R}$ 中的不可测集，A 是 $\mathbf{R}$ 中的零集，证明 $E\cap\mathscr{C}A$ 必是不可测集.

证 因为 $E=(E\cap A)\cup(E\cap\mathscr{C}A)$，由 $mA=0$ 可得 $m(E\cap A)=0$，故 $E\cap A$ 可测，由于 E 不可测，则 $E\cap\mathscr{C}A$ 必是不可测集.

2. 是否存在闭集 $F\subset[a,b]$，且 $F\neq[a,b]$，使 $mF=b-a$?

解 不存在闭集 $F\subsetneqq[a,b]$，使 $mF=b-a$. 这是因为，若存在这样的闭集 F，则 $G=(a,b)-F$ 为非空开集，其测度必大于零. 但

$$mG=m((a-b)-F)=(b-a)-mF=0,$$

矛盾.

3. 试证明对任一集合 $A\subset\mathbf{R}$，存在 G_δ 型集 $B\supset A$，使 $mB=m^*A$.

证 由 m^*A 的定义，$\forall n$，$\exists$ 开集 $G_n\supset A$，使

$$mG_n<m^*A+\frac{1}{n}.$$

令 $B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，$B$ 为 G_δ 型集，且 $B\supset A$

$$m^*A\leqslant mB\leqslant mG_n\leqslant m^*A+\frac{1}{n},$$

令 $n\to\infty$ 得 $mB=m^*A$.

4. 设 E 是可测集，且 $mE>0$，试证明对任何 $c\,(0<c<1)$，存在区间 (a,b)，使得 $m(E\cap(a,b))>c(b-a)$.

$\left(\text{提示：利用 } mE=\inf\{mG:\text{开集 } G\supset E\}\text{，可取开集 } G\supset E\text{，使 } mG<\frac{1}{c}mE\right)$.

证 对任何 $0<c<1$，可取开集 $G\supset E$，使

$$mG<\frac{1}{c}mE,$$

即 $mE>cmG$. 设 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)$，其中 $\{(\alpha_k,\beta_k)\}$ 为 G 的构成区间. 于是

$$c\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)<mE=m(E\cap G)=\sum_{k=1}^{\infty}m(E\cap(\alpha_k,\beta_k)),$$

因此，至少有一个 k，使得 $c(\beta_k-\alpha_k)<m(E\cap(\alpha_k,\beta_k))$. 取 $(a,b)=(\alpha_k,\beta_k)$，即得

$$m(E\cap(a,b))>c(b-a).$$

5. 设 E 是 $\mathbf{R}$ 中的可测集，$a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，若对满足 $|x|<\delta$ 的一切 x，$a+x$ 与 $a-x$ 之中必有一点属于 E，证明 $mE\geqslant\delta$.

证 由题设知

$$\{x:|x|<\delta\}=\{x:a+x\in E,|x|<\delta\}\cup\{x:a-x\in E,|x|<\delta\},$$

所以

$$2\delta \leqslant m(\{x:a+x\in E,|x|<\delta\})+m(\{x:a-x\in E,|x|<\delta\}).$$

于是,上式右端两项中至少有一项不小于 δ,设

$$m(\{x:a+x\in E,|x|<\delta\})\geqslant \delta.$$

因为 $\tau_{-a}E=\{y=x-a:x\in E\}=\{y:y+a\in E\}$,则

$$\begin{aligned} mE &= m(\tau_{-a}E) = m(\{y:y+a\in E\}) \\ &\geqslant m(\{x:x+a\in E,|x|<\delta\})\geqslant \delta. \end{aligned}$$

第二章 复习题与解答

1. 试证明在[0,1]无理数中必存在一个不可数的闭子集.

证 设$\{r_n\}$为[0,1]中有理数全体,取 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$,以 r_n 为中心,$\frac{\varepsilon}{2^n}$为半径作开区间 I_n,令 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$,则闭集

$$F=[0,1]-G\subset[0,1]-\{r_n\}=[0,1]\text{ 中无理数集}.$$

因为 $F=[0,1]-([0,1]\cap G)$,所以

$$\begin{aligned} mF &= 1-m([0,1]\cap G)\geqslant 1-mG \\ &\geqslant 1-\sum_{n=1}^{\infty}mI_n = 1-2\varepsilon>0. \end{aligned}$$

故 F 为不可数闭集.

2. 设 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 为互不相交的可测集,$E_i\subset S_i$,$i=1,2,\cdots,n$,证明 $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}m^*E_i$.

证 不妨设 $n=2$,$E_i\subset S_i$ $(i=1,2)$,S_i 可测$(i=1,2)$,S_i 互不相交.因为 S_1 可测,由§2 定理 2.2,取 $A=E_1\cup E_2$,可得

$$\begin{aligned} m^*(E_1\cup E_2) &= m^*((E_1\cup E_2)\cap S_1)+m^*((E_1\cup E_2)\cap \complement S_1) \\ &= m^*E_1+m^*E_2. \end{aligned}$$

3. 设 $A_n\subset[0,1]$$(n=1,2,3,\cdots)$可测,而且 1 为$\{mA_n\}$的一个聚点,证明存在子序列$\{n_k\}$,使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-mA_{n_k})<1,\quad m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{n_k}\right)>0.$$

证 因为 1 是$\{mA_n\}$的聚点,则对任一自然数 k,存在 n_k,使

$$1-mA_{n_k}<\frac{1}{2^k},$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - mA_{n_k}) < 1,$$

$$m\left(\mathscr{C}\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{n_k}\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathscr{C}A_{n_k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}(1 - mA_{n_k}) < 1,$$

故 $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{n_k}\right)>0$.

4. 设 $\{A_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的可测集列, $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n = (0,1)$, 令

$$E = \{x \in (0,1) : x \text{ 至多属于有限个 } A_n\},$$

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}mA_n < \infty$, 试证明 $mE = 1$.

证 因为 $E = \{x \in (0,1) : x$ 至多属于有限个 $A_n\}$, 令

$$A = \overline{\lim_{n}}A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right) \subset (0,1),$$

则 $x \in A \Leftrightarrow x$ 属于无穷多个 A_n, 所以

$$E = (0,1) - A.$$

$\forall \varepsilon>0$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}mA_n < \infty$, 则 $\exists N$, 使 $k \geqslant N$ 时

$$m\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty}mA_n < \varepsilon,$$

$$mA \leqslant m\left(\bigcup_{k=N}^{\infty}A_n\right) < \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的, 所以 $mA = 0$, 从而 $mE = 1$.

5. 证明对每个实数 α, $0<\alpha<1$, 存在闭子集 $F \subset [0,1]$, 使 F 不含任何非空开集, 且 $mF = \alpha$.

$\Big($提示: 类似于康托尔集的构造法, 在 $[0,1]$ 中央挖去长度为 $x\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$ 的开区间, …, 得一集 G, 使 $mG = 1-\alpha\Big)$.

证 类似于康托尔集的构造方法, 在 $[0,1]$ 中央挖去长度为 x 的开区间 $\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$, 然后在余下的两个闭区间各挖去长度为 x^2 的开区间, …, 可得开集 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$, 其中 C_n 为第 n 次挖去长度为 x^n 的开区间之并, 一共有 2^{n-1} 个小开区间,

$$mG = \sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^n = \frac{x}{1-2x}.$$

我们使

$$mG = 1 - \alpha,$$

得 $x=\dfrac{1-\alpha}{3-2\alpha}$. 再令 $F=[0,1]-G$,则 F 为$[0,1]$中的闭子集,$mF=1-mG=\alpha$.

6. 设 A 是$[0,1]$中的不可测集,证明存在 $0<\varepsilon<1$,使得对$[0,1]$中任一满足 $mE\geqslant\varepsilon$ 的可测集 E,$A\cap E$ 均是不可测集.

$\Big($提示:用反证法,设 $\varepsilon_n=1-\dfrac{1}{n}$,存在可测集 $E_n\subset[0,1]$,使 $mE_n\geqslant 1-\dfrac{1}{n}$,而 $A\cap E_n$ 可测,利用 $A=\left(A\cap\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)\right)\cup\left(A\cap\left([0,1]-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)\right)$推出 A 可测$\Big)$.

证 用反证法,设对 $\varepsilon_n=1-\dfrac{1}{n}$,存在可测集 $E_n\subset[0,1]$,使 $mE_n\geqslant 1-\dfrac{1}{n}$,而 $A\cap E_n$ 可测. 由于 $E_n\subset[0,1]$,则

$$1\geqslant m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\geqslant mE_n\geqslant 1-\frac{1}{n},$$

所以

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=1.$$

又因为 $A\cap E_n$ 可测($\forall n$),所以 $A\cap(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)$也可测

$$A=A\cap[0,1]=\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\right)\cup\left(A\cap\left([0,1]-\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\right).$$

由于 $m\left([0,1]-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0$,故 $m\left(A\cap\left([0,1]-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)\right)=0$,从而可测,矛盾. 因此,必存在 $0<\varepsilon<1$,使得对$[0,1]$中任一满足 $mE\geqslant\varepsilon$ 的可测集 E,$A\cap E$ 均是不可测集.

7. 设 $E\subset[0,1]$是可测集,$mE\geqslant\varepsilon>0$,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是$[0,1]$中的点,其中 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}$,试证明 E 中存在两点,其距离等于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中某两点之间的距离.

$\Big($提示:考虑$\bigcup\limits_{i=1}^{n}(E+x_i)$,由条件证明存在 $i\neq j$,使$(E+x_i)\cap(E+x_j)\neq\varnothing\Big)$.

证 考察集合$\bigcup\limits_{i=1}^{n}(E+x_i)\subset[0,2]$,因为

$$\sum_{i=1}^{n}m(E+x_i)=n\cdot mE\geqslant n\varepsilon>2,$$

故必存在 $i,j,i\neq j$,使$(E+x_i)\cap(E+x_j)\neq\varnothing$,设

$$a\in(E+x_i)\cap(E+x_j),$$

则 $a-x_i,a-x_j\in E$,而$|(a-x_i)-(a-x_j)|=|x_j-x_i|$,证毕.

*8. 设 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$,试证明

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}m^*E_n.$$

证 令 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$,$\forall n$,$E_n\subset E$,由外测度的单调性得

$$m^*E_n \leqslant m^*E_{n+1} \leqslant m^*E,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} m^*E_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} m^*E_n \leqslant m^*E$.

反之，不妨设 $\forall n, m^*E_n < +\infty$，$\forall \varepsilon > 0$，作开集 $G_n \supset E_n$，使

$$mG_n < m^*E_n + \varepsilon \qquad (n = 1,2,3,\cdots),$$

再令 $P_k = \bigcap\limits_{n=k}^{\infty} G_n$，则 $P_k \subset G_k \quad (k = 1,2,3,\cdots)$，于是

$$mP_k \leqslant mG_k < m^*E_k + \varepsilon \qquad (k = 1,2,3,\cdots),$$

$P_k = \bigcap\limits_{n=k}^{\infty} G_n \supset E_k$，$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \supset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = E$，且 $P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_k \subset \cdots$，故

$$m^*E \leqslant m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\right) = \lim_{k\to\infty} mP_k \leqslant \lim_{k\to\infty} m^*E_k + \varepsilon,$$

因为 $\varepsilon > 0$ 是任取的，所以 $m^*E \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} m^*E_k$，因此

$$m^*E = \lim_{n\to\infty} m^*E_n.$$

第三章　可 测 函 数

§3.1　可测函数及其性质

1. 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数，$E_1 \subset E$ 可测，则 $f(x)$ 也是 E_1 上的可测函数.

证　因为 f 有 E 上可测，则对任一实数 α，$E(f>\alpha)$ 可测，又 $E_1 \subset E$ 可测，则 $E_1(f>\alpha)=E(f>\alpha)\cap E_1$ 也可测，从而 f 是 E_1 上的可测函数.

2. 设 $\{E_n\}$ 是一列可测集，$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$，证明 f 在 E 上可测的充要条件是 f 在每个 E_i 上可测.

证　必要性：设 f 在 E 上可测，则对任一实数 α 和自然数 i，集合

$$E_i(f>\alpha)=E(f>\alpha)\cap E_i$$

是可测集，故 f 在每个 E_i 上均可测.

充分性：设 f 在每个 E_i 上可测，则对任何实数 α，因为

$$E(f>\alpha)=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i(f>\alpha),$$

所以 $E(f>\alpha)$ 可测，f 在 E 上可测.

3. 设 $f(x)$，$g(x)$ 为可测集 E 上的可测函数，试证明 $E(f>g)$ 是可测集(要求不利用 $f-g$ 的可测性).

证　设 $\{r_n\}$ 是全体有理数，则易证

$$E(f>g)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[E(f>r_n)\cap E(g<r_n)].$$

因为 f，g 均可测，所以对一切 n，$E(f>r_n)\cap E(g<r_n)$ 可测，从而 $E(f>g)$ 是可测集.

4. 试证明 $f(x)$ 在可测集 E 上可测的充要条件是对任一有理数 r，集 $E(f>r)$ 恒可测；如果 $E(f=r)$ 恒可测，问 $f(x)$ 是否可测?

证　必要性显然成立.

充分性：任取实数 α，设有理数列 $\{r_n\}$，满足 $r_1<r_2<\cdots<r_n<\cdots$，且 $r_n\to\alpha$，则

$$E(f\geqslant\alpha)=\bigcap_{n=1}^{\infty} E(f>r_n).$$

因为每个 $E(f>r_n)$ 可测，所以 $E(f\geqslant\alpha)$ 可测，$f(x)$ 是 E 上的可测函数.

若仅有 $E(f=r)$ 可测(对每个有理数 r)，则 $f(x)$ 在 E 上不一定可测，例如，

设 $E=[0,1]$，$A\subset E$ 为任一不可测集，定义

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & x\in A,\\ -\sqrt{2}, & x\in E-A.\end{cases}$$

则对任何有理数 r，$E(f=r)=\varnothing$，可测，因为 $E(f>0)=A$ 是不可测集，故 $f(x)$ 在 E 上不可测.

5. 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数，G 为开集，F 为闭集，试问 $E(f\in G)$，$E(f\in F)$ 是否可测，这里 $E(f\in A)=\{x\in E:f(x)\in A\}$.

证　(1) 设开集 $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$，其中每个 (α_n,β_n) 为 G 的构成区间

$$E(f\in G)=E(x:f(x)\in G)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[E(f>\alpha_n)\cap E(f<\beta_n)].$$

因为 f 可测，所以对一切 n，$E(f>\alpha_n)\cap E(f<\beta_n)$ 可测，从而 $E(f\in G)$ 也可测.

(2) 设 F 是闭集，令 $G=\mathscr{C}F$，则 G 为开集，由(1)知 $E(f\in G)$ 是可测集.

$$E(f\in F)=E-E(f\in G),$$

故 $E(f\in F)$ 也是可测集.

6. 设 f^2 是 E 上的可测函数，且 $E(f>0)$ 是可测集，试证明 f 是 E 上的可测函数.

证　因为对任何实数 α

$$E(f>\alpha)=\begin{cases}E(f>0)\cap E(f^2>\alpha^2), & \alpha>0\text{ 时},\\ E(f>0), & \alpha=0\text{ 时},\\ E(f>0)\cup E(f^2<\alpha^2), & \alpha<0\text{ 时}.\end{cases}$$

f^2 可测，$E(f>0)$ 是可测集，从而 $E(f>\alpha)$ 可测，f 是 E 上的可测函数.

7. 设 f 是 $[a,b]$ 上的可微函数，试证明 f' 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

证　补充定义 $f(x)=f(b)$（$x\geqslant b$ 时），令

$$F_n(x)=\frac{f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)}{\dfrac{1}{n}},\qquad n=1,2,3,\cdots,$$

因为 f 连续，故每个 $F_n(x)$ 可测，对 $x\in[a,b)$

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=f'(x).$$

因此，$f'(x)$ 是一列可测函数序列的极限，故 $f'(x)$ 可测.

8. 设 A 是 $[0,1]$ 中的一个不可测集，令

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in A,\\ -x, & x\overline{\in} A,\end{cases}$$

问 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否可测？$|f(x)|$ 是否可测？

解　令 $E=[0,1]$，则 $E(f>0)=A-\{0\}$，因为 A 不可测，所以 $A-\{0\}$ 也不

可测，f 在 $[0,1]$ 上不可测. 但是 $|f(x)|=x, x\in[0,1]$，$|f(x)|\in C_{[0,1]}$，所以 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上可测.

9. 设 f,g 是 $\mathbf{R}$ 上的有限可测函数，试讨论复合函数 $f(g(x))$ 的可测性：

(1) 若 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$g(x)$ 可测；

(2) 若 f 单调，$g(x)$ 可测.

解 (1) 令 $E=(-\infty,+\infty)$，$f\in C_{(-\infty,+\infty)}$，则对任何实数 α，$E(f>\alpha)=G_\alpha$ 是 $\mathbf{R}$ 中的开集，由于

$$E(f(g(x))>\alpha)=E(g(x)\in G_\alpha),$$

$g(x)$ 可测，则 $E(g(x)\in G_\alpha)$ 是可测集，从而 $f(g(x))$ 是可测函数.

(2) 不妨设 f 是单调上升函数，对任一实数 α

$$E(f(x)\geqslant\alpha)=[x_\alpha,+\infty)\text{ 或 }(x_\alpha,+\infty)\text{ 或者 }\varnothing,$$

其中 $x_\alpha=\inf\{x:f(x)\geqslant\alpha\}$.

$$E(f(g(x))\geqslant\alpha)=\begin{cases}\varnothing, & f(x)<\alpha,\forall x\in E,\\ E(g(x)\geqslant x_\alpha), & f(x_\alpha)\geqslant\alpha,\\ E(g(x)>x_\alpha), & f(x_\alpha)<\alpha,\end{cases}$$

$g(x)$ 可测，故 $E(f(g(x))\geqslant\alpha)$ 可测，从而 $f(g(x))$ 必可测.

10. 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的非负可测函数，试利用定理 1.3 证明

(1) 存在非负上升的简单函数列 $\{\varphi_n\}$，使 $\varphi_n(x)\to f(x)$，且每个 $\varphi_n(x)$ 在一个有限测度集外恒为 0.

(2) 若 $f(x)$ 还是有界的，则存在非负上升的简单函数列 $\{\varphi_n\}$，使 $\varphi_n(x)$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$.

证 (1) 按照本节定理 1.3，存在非负上升简单函数列 $\{\varphi_n\}$，使

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x).$$

令 $E_n=E\cap[-n,n]$，则 $mE_n<\infty$，再令

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\varphi_n(x), & x\in E_n,\\ 0, & x\overline{\in} E_n,\end{cases}$$

则 $0\leqslant\psi_1(x)\leqslant\psi_2(x)\leqslant\cdots\leqslant\psi_n(x)\leqslant\cdots$，每个 $\psi_n(x)$ 是简单函数，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)=f(x)$.

(2) 设 $f(x)$ 有界可测，按定理 1.3，令

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n\cdot 2^n}\frac{k-1}{2^n}\chi_{A_{n,k}}(x)+n\chi_{B_n}(x),$$

其中

$$A_{n,k}=\left\{x\in E:\frac{k-1}{2^n}\leqslant f(x)<\frac{k}{2^n}\right\},\qquad k=1,2,\cdots,n\cdot 2^n,$$

$$B_n \doteq \{x \in E: f(x) \geqslant n\}.$$

现在 $f(x)$ 有界，则存在自然数 N，使 $B_N = \varnothing$，$n \geqslant N$ 时，$B_n = \varnothing$，所以 $n \geqslant N$ 时

$$E = \bigcup_{k=1}^{n \cdot 2^n} A_{n,k}.$$

$x \in \bigcup_{k=1}^{n \cdot 2^n} A_{n,k}$ 时，$|f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^n}$，故 $n \geqslant N$ 时，对一切 $x \in E$，有

$$|f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^n},$$

$\varphi_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in E$.

§3.2　可测函数列的收敛性

1．设 $\{f_n\}$，$\{g_n\}$ 均是可测集 E 上的可测函数列，$f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$，$g_n \xrightarrow{\text{mes}} g$，则

(1) $|f_n| \xrightarrow{\text{mes}} |f|$；

(2) $\sup(f_n, g_n) \xrightarrow{\text{mes}} \sup(f, g)$，$\inf(f_n, g_n) \xrightarrow{\text{mes}} \inf(f, g)$.

证　(1) 因为

$$E(||f_n| - |f|| \geqslant \varepsilon) \supset E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon),$$

故当 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$ 时，必有 $|f_n| \xrightarrow{\text{mes}} |f|$.

(2) 因为

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|),$$

$$\inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|),$$

故

$$\sup(f_n, g_n) \xrightarrow{\text{mes}} \sup(f, g),$$

$$\inf(f_n, g_n) \xrightarrow{\text{mes}} \inf(f, g).$$

2．设 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$，又有 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} g$，则 $f \sim g$.

证　因为 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$，由里斯定理存在子序列 $f_{n_k} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$，又因为 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} g$，则 $f_{n_k} \xrightarrow{\text{mes}} g$，再据里斯定理，存在子序列 $f_{n_{k_i}} \xrightarrow{\text{a.e.}} g$. 故 $f \sim g$.

3．设 $f(x)$，$g_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 是可测集 E 上的几乎处处有限可测函数，令 $A_n = \{x \in E: f(x) \neq g_n(x)\}$，$A = \overline{\lim_n} A_n$，如果 $mA_n < \frac{1}{2^n}$，$n = 1, 2, 3, \cdots$，试证明

$g_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$.

证

$$A = \overline{\lim_n} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n,$$

由条件

$$m\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

$$mA = \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

$x \overline{\in} A \Leftrightarrow x$ 属于至多有限个 A_n，故存在 N，使 $n > N$ 时，$x \overline{\in} A_n$，即 $n > N$ 时，$g_n(x) = f(x)$，故 $g_n(x) \to f(x)(x \overline{\in} A)$，这就证明了

$$g_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x).$$

4. 设函数列 $\{f_n\}$ 在可测集上测度收敛于 $f(x)$，且 $f_n(x) \leqslant g(x)$ 在 E 上 a.e. 成立 $(n = 1,2,3,\cdots)$，试证明 $f(x) \leqslant g(x)$，a.e.

证 因为 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$，且 $f_n(x) \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} g(x)$，由里斯定理存在子序列

$$f_{n_k}(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x),$$

故

$$f(x) \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} g(x).$$

5. 设 E 为可测集，E 上的可测函数列 $\{f_n(x)\}$ 测度收敛于 $f(x)$，且 $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$，a.e. $(n = 1,2,3,\cdots)$，则 $f_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$.

证 因为 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$，则存在子序列 $f_{n_k} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 令

$$A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > f_{n+1})\right) \cup E(f_{n_k} \not\to f),$$

则 $mA = 0$. 再令

$$E_0 = E - A.$$

任取 $x_0 \in E_0$，则 $f_n(x_0) \leqslant f_{n+1}(x_0)$ 对一切 n 成立，且

$$f_{n_k}(x_0) \to f(x_0),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = f(x_0),$$

即 $f_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$.

6. 设可测集 E 上的可测函数列 $\{f_n(x)\}$ 测度收敛于 $f(x)$，而 $f_n(x) \sim g_n(x)$，$n = 1,2,3,\cdots$，则 $g_n(x)$ 测度收敛于 $f(x)$.

证　令 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n\neq g_n)$，则 $mA=0$，任给 $\sigma>0$，因为

$$E(|g_n-f|\geqslant\sigma)\subset E(|f_n-f|\geqslant\sigma)\cup A,$$

所以

$$mE(|g_n-f|\geqslant\sigma)\leqslant mE(|f_n-f|\geqslant\sigma)\qquad(\forall n).$$

由于 $f_n\xrightarrow{\text{mes}}f$，故 $g_n\xrightarrow{\text{mes}}f$.

7. 设 $mE<\infty$，$\{f_n\}$ 为 E 上的可测函数列，$f_n\xrightarrow{\text{a.e}}\infty$，试证明对任一 $\delta>0$，必存在可测子集 $E_\delta\subset E$，使 $m(E-E_\delta)<\delta$，且 $\{f_n\}$ 在 E_δ 上均匀地发散于 ∞（即对任何实数 $M>0$，存在自然数 N，使 $n\geqslant N$ 时，对一切 $x\in E_\delta$，有 $|f_n(x)|\geqslant M$）.

证　令

$$g_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{f_n(x)}, & f_n(x)\neq0,\\ 1, & f_n(x)=0.\end{cases}$$

因为 $f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}\infty$，则 $g_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}0$，由叶果洛夫定理，$\forall\delta>0$，$\exists E_\delta\subset E$，使 $m(E-E_\delta)<\delta$，而 $\{g_n\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 0，即对任何 $M>0$，$\exists N$，使 $n\geqslant N$ 时，对一切 $x\in E_\delta$，有 $|g_n(x)|<\dfrac{1}{M}$，即

$$|f_n(x)|>M\qquad(n\geqslant N,\forall x\in E_\delta).$$

8. 设 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上一列 a.e. 有限可测函数，$f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$，试证明存在一列可测集 $E_n\subset[a,b]$，$n=1,2,3,\cdots$，使 $m\left([a,b]-\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0$，而 $\{f_n\}$ 在每一个 E_n 上一致收敛于 f.

证　由叶果洛夫定理，对每一个 n，可取 $E_n\subset[a,b]$，使

$$m([a,b]-E_n)<\frac{1}{n},$$

而 $\{f_n\}$ 在 E_n 上一致收敛于 $f(x)$. 于是

$$m\left([a,b]-\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant m([a,b]-E_n)<\frac{1}{n}\qquad(\forall n),$$

所以

$$m\left([a,b]-\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0.$$

9. 设可测函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上近一致收敛于 f，则 $\{f_n\}$ 在 E 上必几乎处处收敛于 f（这里 mE 可以为 ∞）.

证法 1　因为 $\{f_n\}$ 在 E 上近一致收敛于 f，所以对任一自然数 k，存在 $E_k\subset E$，使 $m(E-E_k)<\dfrac{1}{k}$，而 $\{f_n\}$ 在 E_k 上一致收敛于 f，令

$$E_0 = \{x \in E : f_n(x) \not\to f(x)\},$$

则 $E_0 \subset E - E_k (\forall k)$，$m^* E_0 \leqslant m(E - E_k) < \frac{1}{k}$，所以 $mE_0 = 0$，故

$$f_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x).$$

证法 2 E_k 同(证法 1)，令 $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$，$m(E - A) \leqslant m(E - E_k) < \frac{1}{k} \to 0$，所以 $m(E - A) = 0$，$x \in A$ 时，显然有 $f_n(x) \to f(x)$，故

$$f_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x).$$

§3.3 可测函数的结构

1. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 0, & x \in [-1,0), \end{cases}$$

试通过对可测函数 $f(x)$ 的分析证明

(1) 鲁津定理 3.2 中连续函数改为多项式，结论不成立；

(2) 鲁津定理 3.2 中的 $\delta > 0$ 改为零，结论不成立.

证 (1) $E = [-1,1]$，$f(x)$ 在 E 上可测，设 $P(x)$ 为多项式，则至多只有有限个点 x，使得 $P(x) = 0$ 或 $P(x) = 1$，故必有

$$mE(f \neq P) = 2,$$

从而鲁津定理 3.2 中连续函数改为多项式，结论不成立.

(2) 设 $\exists g(x)$ 连续，使

$$mE(f \neq g) = 0.$$

取 $\delta > 0$，使 $|x| < \delta$ 时，$|g(x) - g(0)| < \frac{1}{4}$，则当 $g(0) \geqslant \frac{1}{2}$ 时，必有

$$E(f \neq g) \supset (-\delta, 0),$$

当 $g(0) \leqslant \frac{1}{2}$ 时，有

$$E(f \neq g) \supset (0, \delta),$$

故 $mE(f \neq g) > \delta$，矛盾.

2. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上几乎处处有限的可测函数，则对任意的 $\varepsilon > 0$ 及 $\delta > 0$，恒有闭集 $F \subset [a,b]$ 及多项式 $P(x)$，使 $mF > b - a - \delta$，而在 F 上

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

证 据鲁津定理 3.2，对 $\forall \delta > 0$，存在 $g(x) \in C_{[a,b]}$，使 $mE(f \neq g) < \frac{\delta}{2}$，从而存在开集 $G \supset E(f \neq g)$，使

$$mG < \delta.$$

令 $F=[a,b]-G$，则 F 为$[a,b]$中的闭集，$mF>(b-a)-\delta$，$\forall \varepsilon>0$，因为 $g(x)\in C_{[a,b]}$，则存在多项式 $P(x)$，使

$$|g(x)-P(x)|<\varepsilon \qquad (\forall x\in[a,b]),$$

于是 $x\in F$ 时

$$|f(x)-P(x)|=|g(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

3. 试证明定理 3.1 之逆定理也成立，即如果 $f(x)$在可测集 E 上几乎处处有限，且对任意的 $\delta>0$，存在闭集 $F_\delta\subset E$，使得 $m(E-F_\delta)<\delta$，而 $f(x)$限制在 F_δ 中连续，则 $f(x)$必可测.

证法 1 由假设，对任一 $n\in\mathbf{N}$，存在闭集 $F_n\subset E$，使得

$$m(E-F_n)<\frac{1}{n^2},$$

且 f 在 F_n 上连续.作函数

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & x\in F_n,\\ 0, & x\in E-F_n,\end{cases} \qquad n=1,2,3,\cdots,$$

则 $f_n(x)$在 E 上可测，又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(E-F_n)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$，

$$\varliminf_n F_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty}F_n\right),$$

$$E-\varliminf_n F_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}(E-F_n)\right)=\varlimsup_n(E-F_n),$$

故

$$m\left(E-\varliminf_n F_n\right)=m\left(\varlimsup_n(E-F_n)\right)=0.$$

而 $x\in\varliminf\limits_n F_n$ 时，显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，即 $f(x)$是可测函数列$\{f_n\}$的几乎处处收敛的极限，从而 $f(x)$是可测函数.

证法 2 $\forall n$，$\exists$ 闭集 $F_n\subset E$，使 $m(E-F_n)<\frac{1}{n}$，且 $f(x)$在 F_n 上连续，则 $f(x)$在 F_n 上可测，从而 $f(x)$在 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$ 上可测.

$$m\left(E-\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)\leqslant m(E-F_n)<\frac{1}{n} \qquad (\forall n),$$

所以

$$m\left(E-\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)=0.$$

由于 $f(x)$在零测度集上必可测，$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n+\left(E-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n\right)$，故 $f(x)$在 E 上可测.

第三章 复习题与解答

1. 设 $f(x), f_n(x), n=1,2,3,\cdots$,是定义在 $E=[a,b]$上的实函数,对每对自然数 n,k,令

$$E_{n,k}=\left\{x\in E:|f_n-f|<\frac{1}{k}\right\},$$

试证明

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n}E_{n,k}=\{x\in E:\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\}.$$

证 设 $A=\left\{x\in E:\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\right\}$,任取 $x\in A$,对 $\forall k\in\mathbf{N}$,存在 N,使得当 $n\geqslant N$ 时,$|f_n(x)-f(x)|<\dfrac{1}{k}$,则

$$x\in\bigcap_{n=N}^{\infty}E\left(|f_n-f|<\frac{1}{k}\right),$$

故

$$x\in\varliminf_{n}E\left(|f_n-f|<\frac{1}{k}\right)=\varliminf_{n}E_{n,k}.$$

因为 k 是任意的,所以 $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\varliminf\limits_{n}E_{n,k}$.

反之,若 $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\varliminf\limits_{n}E_{n,k}$,则对任一 k,有

$$x\in\bigcup_{N=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=N}^{\infty}E\left(|f_n-f|<\frac{1}{k}\right)\right),$$

故存在 N_0,使 $x\in\bigcap\limits_{n=N_0}^{\infty}E_{n,k}$,即 $n\geqslant N_0$ 时,有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}.$$

从而 $x\in A$,这样就证明了

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n}E_{n,k}=A.$$

2. 设$\{f_n\}$是可测集 E 上的可测函数列,试证明它的收敛点集与发散点集都是可测的.

证法 1 设$\{f_n\}$的收敛点集为 A,发散点集为 B,则

$$A=E\left(\varlimsup_{n}f_n=\varliminf_{n}f_n\right)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E\left(|\varlimsup_{n}f_n-\varliminf_{n}f_n|<\frac{1}{k}\right),$$

$$B=E-A.$$

因为$\{f_n\}$是可测函数列,所以$\varlimsup\limits_{n}f_n$ 和$\varliminf\limits_{n}f_n$ 均是可测函数,从而$|\varlimsup\limits_{n}f_n-\varliminf\limits_{n}f_n|$也

是可测函数，于是对任一自然数 k，$E\left(\left|\overline{\lim_n} f_n - \underline{\lim_n} f_n\right| < \frac{1}{k}\right)$ 是可测集，故 A 可测，从而 $B = E - A$ 也是可测集.

证法 2　因为 $A = E\left(\overline{\lim_n} f_n - \underline{\lim_n} f_n \leqslant 0\right)$，故 A 可测，$B = E - A$ 也可测.

3. 设 $mE < \infty$，$\{f_n\}$ 为 E 上的几乎处处有限可测函数列，试证明 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$ 的充要条件是：对 $\{f_n\}$ 的任一子序列 $\{f_{n_k}\}$ 均有一子序列 $f_{n_k'} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$.

证　必要性：因为每个 $f_{n_k} \xrightarrow{\text{mes}} f$，由里斯定理立即知存在一子序列 $f_{n_k'} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$.

充分性：设条件成立，但 $f_n \overset{\text{mes}}{\nrightarrow} f$，则存在 $\sigma > 0$，使

$$mE(|f_n - f| \geqslant \sigma) \nrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

因此，必有子序列 $\{f_{n_k}\}$，使

$$\lim_{k \to \infty} mE(|f_{n_k} - f| \geqslant \sigma) > 0 \qquad (*)$$

则可以证明 $\{f_{n_k}\}$ 不存在子序列 a.e. 收敛于 f. 事实上，若有子序列

$$f_{n_k'} \xrightarrow{\text{a.e.}} f,$$

因为 $mE < \infty$，据 §3.2 定理 2.2(ii) $f_{n_k'} \xrightarrow{\text{mes}} f$，与 $(*)$ 矛盾，故必有 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$.

4. 设 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上测度收敛于 f，g 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，证明 $g(f_n(x))$ 在 $[a,b]$ 上测度收敛于 $g(f(x))$（这里 $f_n(x)$ 和 $f(x)$ 均是有限可测函数）.

证　由第 3 题知 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f \Leftrightarrow$ 对任何子序列 f_{n_k}，有子序列 $f_{n_k'} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 再由 $g(x)$ 的连续性，可得 $g(f_{n_k'}(x)) \xrightarrow{\text{a.e.}} g(f(x))$，所以

$$g(f_n(x)) \xrightarrow{\text{mes}} g(f(x)).$$

5. 设 f 是可测集上的几乎处处有限的可测函数，$mE < \infty$，试证明对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 E 上的有界可测函数 g，使 $mE(f \neq g) < \varepsilon$.

证　令 $E_n = E(|f| < n)$，则由条件知 $m\left(E - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$，又因为 $mE < \infty$，$\{E_n\}$ 是渐张集列，所以 $mE = \lim_{n \to \infty} mE_n$. $\forall \varepsilon > 0$，取 N，使

$$mE - mE_N < \varepsilon.$$

令

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E_N, \\ 0, & |f(x)| \geqslant N, \end{cases}$$

则 $g(x)$ 有界可测，且

$$mE(f \neq g) = m(E - E_N) < \varepsilon.$$

6. 设 $f(x)$ 在可测集 E 上可测，B 是 $\mathbf{R}$ 中的博雷尔集，试证明 $f^{-1}(B)$ 是可测集.

（提示：令 $\mathscr{F}=\{A\subset\mathbf{R}: f^{-1}(A)$ 可测$\}$，则 $\mathscr{F}$ 是包含开集全体的 σ 代数）.

证 令

$$\mathscr{F} = \{A \subset \mathbf{R}: f^{-1}(A) \text{ 可测}\},$$

我们证明 $\mathscr{F}$ 是包含开集全体的 σ 代数.

对任一开集 $G\subset\mathbf{R}$，$G=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)$，其中 (α_k,β_k) 为 G 的构成区间

$$f^{-1}(G) = f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}((\alpha_k,\beta_k))$$
$$= E(f < \beta_k) - E(f \leqslant \alpha_k),$$

因为 f 可测，所以 $f^{-1}(G)$ 是可测集，即 $G\in\mathscr{F}$. $f^{-1}(\mathbf{R})\in\mathscr{F}$ 显然，由于

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A \cap \mathscr{C}B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(\mathscr{C}B)$$
$$= f^{-1}(A) \cap \mathscr{C}f^{-1}(B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B),$$

对任一列 $\{M_i\}\subset\mathscr{F}$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}M_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(M_i),$$

故

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}M_i \in \mathscr{F},$$

即 $\mathscr{F}$ 是包含开集全体的 σ 代数. 博雷尔集是包含开集的最小 σ 代数，故博雷尔集 $\in\mathscr{F}$，即对任一博雷尔集 B，$f^{-1}(B)$ 必可测.

7. 设 E 为有界可测集，f 是 E 上的可测函数，试证明必存在一列阶梯函数 $\{\varphi_n\}$，使得每个 φ_n 定义在有限区间上，$\{\varphi_n\}$ 几乎处处收敛于 f；若 E 为无界可测集，结论是否成立？

证 不妨设 $E\subset(a,b)$，$f(x)$ 处处有限可测，首先必存在简单函数 $\psi_n(x)$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)=f(x)$，设

$$\psi_n(x) = \sum_{i=1}^{m_n} C_i^{(n)}\chi_{E_i^{(n)}}(x) \qquad (n = 1,2,3,\cdots),$$

其中 $E_i^{(n)}\subset E\subset(a,b)\ (\forall\, i,n)$. 取 $\varepsilon_n>0$，使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n < \infty$，对 $E_i^{(n)}$，可取开集 $G_i^{(n)} \supset E_i^{(n)}\ (G_i^{(n)} \subset (a,b))$，使

$$m(G_i^{(n)}-E_i^{(n)})<\frac{\varepsilon_n}{2^{i+1}}.$$

因为 $mG_i^{(n)}<\infty$，$G_i^{(n)}$ 中可取出有限个有限长的构成区间，其并集为 $F_i^{(n)}$，使得

$$m(G_i^{(n)}-F_i^{(n)})<\frac{\varepsilon_n}{2^{i+1}},$$

则

$$m[(F_i^{(n)}-E_i^{(n)})\cup(E_i^{(n)}\quad F_i^{(n)})]\leqslant m(G_i^{(n)}-E_i^{(n)})+m(G_i^{(n)}-F_i^{(n)})$$
$$<\frac{\varepsilon_n}{2^i}.$$

作阶梯函数

$$\varphi_n(x)=\sum_{i=1}^{m_n}C_i^{(n)}\chi_{F_i^{(n)}}(x),$$

因为

$$E(\varphi_n\neq\psi_n)=E\cap\left(\bigcup_{i=1}^{m_n}[(F_i^{(n)}-E_i^{(n)})\cup\left(E_i^{(n)}-F_i^{(n)})]\right),$$

故

$$mE(\varphi_n\neq\psi_n)<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2^i}=\varepsilon_n.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}mE(\varphi_n\neq\psi_n)<\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\infty,$$

$$m(\overline{\lim_n}E(\varphi_n\neq\psi_n))=0.$$

另一方面，我们可以证明

$$E(\varphi_n\not\to f)\subset\overline{\lim_n}E(\varphi_n\neq\psi_n).$$

这是因为，若 $x\in E(\varphi_n\not\to f)$，则 $\exists\,\varepsilon_0>0$ 及 $\{n_k\}$，使

$$|\varphi_{n_k}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0.$$

又因为 $\psi_n(x)\to f(x)$，故 $x\in\overline{\lim_n}E(\varphi_n\neq\psi_n)$，从而 $mE(\varphi_n\not\to f)=0$，$\varphi_n(x)\xrightarrow{a.e.}f$.

若 E 为无界可测集，考虑 $\Delta_k=(k,k+1]$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，令 $E_k=E\cap\Delta_k$，则在每个 E_k 上，存在 $(k,k+1]$ 上的阶梯函数 $\varphi_k^{(n)}(x)\xrightarrow{a.e.}f(x)\quad(n\to\infty)$，令

$$\varphi_n(x)=\varphi_k^{(n)}(x),\qquad x\in\Delta_k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

则 $\varphi_n(x)$ 是有限区间的阶梯函数，且 $\varphi_n(x)\xrightarrow{a.e.}f(x)$.

8. 设 $mE<\infty$，$\{f_n\}$ 是可测集 E 上的一列几乎处处有限可测函数，且 $\{f_n\}$ a.e. 收敛于有限函数 f，试证明对任意的 $\varepsilon>0$，存在常数 C 和可测集 $E_0\subset E$，使

$m(E-E_0)<\varepsilon$，而且

$$|f_n(x)|\leqslant C \qquad (x\in E_0, n=1,2,3,\cdots).$$

$\Big($提示：不妨设$\{f_n\}$是一列处处有限可测函数，且在 E 上处处收敛于有限函数 $f(x)$，则 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(|f_n|\leqslant k).\Big)$

证 不妨设$\{f_n\}$是一列处处有限的可测函数，且在 E 上处处收敛于有限函数。因为收敛数列必是有界的，所以

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}E(|f_n|\leqslant k).$$

则

$$\varnothing=E-\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}E(|f_n|\leqslant k)\Big)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\Big(E-\bigcap_{n=1}^{\infty}E(|f_n|\leqslant k)\Big).$$

因为 $mE<\infty$，$\Big(E-\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(|f_n|\leqslant k)\Big)$关于 k 是一渐缩集列，所以

$$0=\lim_{k\to\infty}m\Big(E-\bigcap_{n=1}^{\infty}E(|f_n|\leqslant k)\Big).$$

$\forall\varepsilon>0$，可取 k_0，使

$$m\Big(E-\bigcap_{n=1}^{\infty}E(|f_n|\leqslant k_0)\Big)<\varepsilon.$$

令 $C=k_0$，$E_0=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(|f_n|\leqslant k_0)$，则

$$m(E-E_0)<\varepsilon,$$

$$|f_n(x)|\leqslant C,\qquad x\in E_0,\ n=1,2,3,\cdots.$$

9. 设 $mE<\infty$，$\{f_n\}$是 E 上的 a.e. 有限可测函数列，试证明存在正数 $a_n(n=1,2,3,\cdots)$，使

$$g_n=\frac{f_n}{a_n}\to 0,\qquad \text{a.e.}$$

（提示：利用 $mE<\infty$，f_na.e. 有限，则$\lim\limits_{k\to\infty}mE(|f_n|>k)=0$ 这一结论来构造正数 a_n）.

证 因为 $mE<\infty$，f_na.e. 有限，所以$\lim\limits_{k\to\infty}mE(|f_n|>k)=0$. 则对任一自然数 n，可取正数 K_n，使 $mE(|f_n|>K_n)<\dfrac{1}{2^n}$，不妨设$\{K_n\}$单调上升趋于 $+\infty$. 令 $a_n=K_n^2$，我们可以证明

$$g_n=\frac{f_n}{a_n}\xrightarrow{\text{a.e.}}0.$$

事实上，令 $E_n=E(|f_n|>K_n)$，$E_0=\overline{\lim\limits_{n}}E_n=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}E_n$

$$E - E_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} (E - E_n),$$

$$mE_0 \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} mE_n < \frac{1}{2^{k-1}} (\forall k),$$

所以 $mE_0 = 0$.

$x \in E - E_0$ 时, $\exists N$ 使 $n \geqslant N$ 时, $x \in E - E_n$, 故 $n \geqslant N$ 时

$$|g_n(x)| \leqslant \frac{|f_n(x)|}{K_n^2} \leqslant \frac{1}{K_n} \to 0,$$

从而 $g_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$.

10. 设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的一列可测函数, $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f, 试证明必存在子序列 $\{f_{n_k}\}$, 使得对任何 $\delta > 0$, 总存在可测子集 $E_\delta \subset E$, 满足 $m(E - E_\delta) < \delta$, 而且 $\{f_{n_k}\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 f.

证 因为 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$, 故对每一个自然数 k, 可取 n_k, 使

$$mE\left(|f_{n_k} - f| > \frac{1}{2^k} \right) < \frac{1}{2^k},$$

不妨设 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$, $\forall \delta > 0$, 取 N, 使

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \delta.$$

记

$$E_\delta = \bigcap_{k=N}^{\infty} E\left(|f_{n_k} - f| \leqslant \frac{1}{2^k} \right),$$

则

$$E - E_\delta = \bigcup_{k=N}^{\infty} E\left(|f_{n_k} - f| > \frac{1}{2^k} \right).$$

因此

$$m(E - E_\delta) \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} mE\left(|f_{n_k} - f| > \frac{1}{2^k} \right) < \delta,$$

易证 $\{f_{n_k}\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 f.

11. 证明如果 $\mathscr{F}$ 是 $[0,1]$ 上的一族可测函数, 则函数 $\sup\limits_{f \in \mathscr{F}} f$ 和 $\inf\limits_{f \in \mathscr{F}} f$ 未必是 $[0,1]$ 上的可测函数; 但如果 $\mathscr{F}$ 是 $[0,1]$ 上的一族连续函数, 则相应的上确界函数和下确界函数均是可测的.

证 设 $A \subset [0,1]$ 是不可测集, f_x 是单点集 $\{x\}$ 上的特征函数, 则 $\sup\limits_{x \in A} f_x = \chi_A$, 这是不可测的, 取 $g_x = -f_x$, 则 $\inf\limits_{x \in A} g_x = -\chi_A$ 也是不可测的.

如果 $\mathscr{F}$ 是一族连续函数, 则对任一实数 C

$$E\left(\sup_{f\in\mathscr{F}} f > C\right) = \bigcup_{f\in\mathscr{F}} E(f > C),$$

而 $E(f>C)$是开集,故$\bigcup\limits_{f\in\mathscr{F}} E(f>C)$是开集,必可测,所以$\sup\limits_{f\in\mathscr{F}} f$ 是可测函数,同理可证$\inf\limits_{f\in\mathscr{F}} f$ 是可测函数.这一结论还可利用$\inf\limits_{f\in\mathscr{F}} f=-\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}(-f)$得到.

12. 设 $f(x)$是 $E=[0,1]$上的 a.e.有限可测函数,令

$$F(x) = m(E(f(t)\geqslant x)) = m(\{t\in E: f(t)\geqslant x\}),$$

(1) 证明 $F(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的单调减少的左连续函数;

(2) 证明存在实数 α_0,使得 $F(\alpha_0)\geqslant\frac{1}{2}$以及对一切 $\alpha>\alpha_0$,有 $F(\alpha)<\frac{1}{2}$.

证 (1) 因为 $F(x)=m(\{t\in[0,1]:f(t)\geqslant x\})$,显然 $x_1<x_2$ 时

$$\{t\in[0,1]:f(t)\geqslant x_2\}\subset\{t\in[0,1]:f(t)\geqslant x_1\},$$

故 $F(x_2)\leqslant F(x_1)$,即 $F(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的单调减少函数,$F(-\infty)=1,F(+\infty)=0$.下证 $F(x)$的左连续性,注意到 $x>x_1$ 时,有

$$\{t\in[0,1]:f(t)\geqslant x_1\}-\{t\in[0,1]:f(t)\geqslant x\}=\{t\in[0,1]:x>f(t)\geqslant x_1\}.$$

显然,当 x 固定时,集合$\bigcap\limits_{x_1<x}\{t\in[0,1]:x>f(t)\geqslant x_1\}=\varnothing$,所以对任何 $x_n<x$,x_n 单调上升收敛于 x,$\lim\limits_{n\to\infty} m(\{t\in[0,1]:x>f(t)\geqslant x_n\})=0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}F(x_n)=F(x)$,故 $F(x)$左连续.

(2) 我们证明集合$\left\{x\in\mathbf{R}:F(x)\geqslant\frac{1}{2}\right\}$是非空有界集.事实上,由于 $f(x)$在$[0,1]$上 a.e.有限,则

$$\lim_{k\to\infty} mE(|f|\geqslant k) = 0.$$

故存在 k_0,使 $k\geqslant k_0$ 时,$m(\{t\in[0,1]:|f(t)|\geqslant k_0\})<\frac{1}{2}$,从而当 $x>k_0$ 时,$x\overline{\in}\left\{x\in\mathbf{R}:F(x)\geqslant\frac{1}{2}\right\}$,即$\left\{x\in\mathbf{R}:F(x)\geqslant\frac{1}{2}\right\}\subset(-\infty,k_0]$

$$E = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} E(k<f\leqslant k+1)\cup E(|f|=\infty),$$

故 $m\left(\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty}E(k<f\leqslant k+1)\right)=1$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} mE(k<f\leqslant k+1)=1$,于是存在 N,使

$$\sum_{k=-N}^{N} mE(k<f\leqslant k+1) > \frac{1}{2},$$

即

$$mE(-N<f\leqslant N+1) > \frac{1}{2}.$$

因此,$x=-N$ 时,$F(x)>\frac{1}{2}$,故集合$\{x\in\mathbf{R}:F(x)\geqslant\frac{1}{2}\}$非空,记

$$\alpha_0 = \sup\left\{x: F(x)\geqslant\frac{1}{2}\right\},$$

因为 $F(x)$左连续,所以 $\alpha_0 \in \left\{x: F(x) \geqslant \frac{1}{2}\right\}$,即 $F(\alpha_0) \geqslant \frac{1}{2}$,对任何 $\alpha > \alpha_0$,由上确界的定义知 $F(\alpha) < \frac{1}{2}$.

第四章　勒贝格积分

§4.1　勒贝格积分的定义和性质

1. 设 $f(x),g(x)$ 都是可测集 E 上的可测函数，如果 $0\leqslant f\leqslant g$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}m;$$

又如果 $f(x)\leqslant g(x)$，则当 $g(x)$ 可积时，$f(x)$ 是否一定可积？

解　因为 $0\leqslant f\leqslant g$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m=\sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)\mathrm{d}m\leqslant\sup_{0\leqslant\psi\leqslant g}\int_E\psi(x)\mathrm{d}m=\int_E g(x)\mathrm{d}m.$$

若 $f(x)\leqslant g(x)$，且 $g(x)$ 可积，则 $f(x)$ 不一定可积.

例如，$E=(-\infty,1)$，$f(x)=-1$，$\forall x\in E$，$g(x)=\chi_{(0,1)}(x)$. 则 $f(x)\leqslant g(x)$，且 $\int_E g(x)\mathrm{d}m$ 存在有限，但 $\int_E f(x)\mathrm{d}m$ 不存在.

2. 设 $f(x)$ 在 E 上可积，如果对每一个可测子集 $A\subset E$，有 $\int_A f(x)\mathrm{d}m=0$，则 $f\sim 0$.

证法 1　因为

$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}m=\int_{E(f\geqslant 0)}f(x)\mathrm{d}m-\int_{E(f<0)}f(x)\mathrm{d}m=0,$$

所以 $f\sim 0$.

证法 2　令 $E_+=E(f>0)$，$E_-=E(f<0)$，则 E_+,E_- 均可测，由 $\int_{E_+}f(x)\mathrm{d}m=0$，知存在 E_+ 上 $f(x)\sim 0$，故 $mE_+=0$，同理 $mE_-=0$，所以 $f\sim 0$.

3. 设 $f(x)$ 在 E 上可积，令 $E_n=E(|f|\geqslant n)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}mE_n=0$.

证　由条件

$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}m=M<\infty,$$

所以

$$M\geqslant\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}m\geqslant n\cdot mE_n,$$

$mE_n\leqslant\dfrac{M}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}mE_n=0$.

4. 设 $f(x)$ 在 E 上可积，且 $\left|\int_E f(x)\mathrm{d}m\right| = \int_E |f(x)|\mathrm{d}m$，则存在 $\alpha(\alpha=\pm 1)$，使 $\alpha f = |f|$, a.e.

证法 1　由条件 $\int_E f_+ \mathrm{d}m < \infty$, $\int_E f_- \mathrm{d}m < \infty$，且

$$\left|\int_E f_+ \mathrm{d}m - \int_E f_- \mathrm{d}m\right| = \int_E f_+ \mathrm{d}m + \int_E f_- \mathrm{d}m,$$

从而可得 $\int_E f_- \mathrm{d}m = 0$ 或者 $\int_E f_+ \mathrm{d}m = 0$.

若 $\int_E f_- \mathrm{d}m = 0$，则 $f_- \sim 0$, $f \overset{\text{a.e.}}{\geqslant} 0$, $|f| \overset{\text{a.e.}}{=\!=} f$.

若 $\int_E f_+ \mathrm{d}m = 0$，则 $f_+ \sim 0$, $f \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} 0$, $|f| \overset{\text{a.e.}}{=\!=} -f$.

故存在 α　($\alpha = \pm 1$)，使 $\alpha f \overset{\text{a.e.}}{=\!=} |f|$.

证法 2　因为 $\left|\int_E f(x)\mathrm{d}m\right| = \int_E |f(x)|\mathrm{d}m$，所以存在 $\alpha = \pm 1$，使

$$\alpha\int_E f(x)\mathrm{d}m = \int_E |f(x)|\mathrm{d}m,$$

即

$$\int_E [|f(x)| - \alpha f(x)]\mathrm{d}m = 0.$$

显然 $|f(x)| - \alpha f(x) \geqslant 0$，故 $|f(x)| - \alpha f(x) \sim 0$，即 $|f(x)| \overset{\text{a.e.}}{=\!=} \alpha f(x)$.

5. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可积，$f(0)=0$，$f'(0)$ 存在，试证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}m$ 存在．

证

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}m = \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}m + \int_{\mathbf{R}-[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}m.$$

因为 $f'(0)$ 存在，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = f'(0)$ 存在有限，则存在 $\varepsilon > 0$ 和 $M > 0$，使

$$\frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant M, \qquad \forall x \in [-\varepsilon,\varepsilon].$$

在 $\mathbf{R}-[-\varepsilon,\varepsilon]$ 上，$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}|f(x)|$，故 $\int_{\mathbf{R}-[-\varepsilon,\varepsilon]}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}m$ 存在．因此我们有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}m$ 存在．

6. 设 $mE < \infty$，f 是 E 上的可测函数，令 $E_k = E(k \leqslant |f| < k+1)$，$k = 1,2,3,\cdots$，试证明 f 在 E 上可积的充要条件是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kmE_k < \infty$.

证 令 $E_0=E(|f|<1)$，则 $E=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}E_k$，$E_k$ 互不相交，$mE=\sum\limits_{k=0}^{\infty}mE_k$，因为对于非负函数 $|f(x)|$

$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}m=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}m,$$

所以

$$\sum_{k=0}^{\infty}kmE_k\leqslant\int_E|f(x)|\mathrm{d}m\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)mE_k.$$

因此，f 可积 $\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{\infty}kmE_k<\infty$.

7. 设 $mE<\infty$，f 是 E 上的非负可测函数，令 $E_n=E(f\geqslant n)$，$n=1,2,3,\cdots$，试证明 f 在 E 上可积的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}mE_n<\infty$.

证 因为 $mE<\infty$，$f\geqslant0$，$E_n=E(f\geqslant n)$，$n=1,2,3,\cdots$，则

$$E_n'=E_n-E_{n+1}=E(n\leqslant f<n+1).$$

从而据第 6 题知，$f(x)$ 可积 $\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}nmE_n'<\infty$. 又因为 $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k'=E_n$，所以 $\sum\limits_{k=n}^{\infty}mE_k'=mE_n$. 又我们可以证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nmE_n'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty}mE_k'\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}mE_n$，故 $f(x)$ 可积 $\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}mE_n<\infty$.

8. 设 $f(x)$ 是 $(a-\delta,b+\delta)(\delta>0)$ 上的可积函数，试证明

$$\lim_{h\to0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}m=0.$$

证 $\forall\varepsilon>0$，据本章定理 1.7(逼近定理)，存在 $g(x)\in C_{[a-\delta,b+\delta]}$，使

$$\int_{a-\delta}^{b+\delta}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}m<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $g(x)$ 在 $[a-\delta,b+\delta]$ 上一致连续，可取 $\eta>0$，使 $|h|<\eta$ 时，有

$$|g(x+h)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)},\qquad\forall x\in(a-\delta,b+\delta).$$

则当 $|h|<\eta$ 时

$$\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}m\leqslant\int_a^b|f(x+h)-g(x+h)|\mathrm{d}m$$
$$+\int_a^b|g(x+h)-g(x)|\mathrm{d}m+\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}m<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}m = 0.$$

9. 设函数 $f(x)$ 定义在 $[0,1]$ 上，当 x 属于康托尔集 P_0 时，$f(x)=x^2$，当 x 属于 P_0 的补集 G_0 中长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的构成区间时，$f(x)=\frac{1}{2^n}$，试计算 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}m$.

解　显然 $f(x)$ 是 $(0,1)$ 上的有界可测函数，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 (L) 可积. 因为 $mP_0=0$，所以 $\int_{P_0} f(x)\mathrm{d}m = 0$，令 $G_0=\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$，其中 e_n 为 G_0 中长为 $\frac{1}{3^n}$ 的各开区间之并，则

$$me_n = \frac{2^{n-1}}{3^n},$$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{e_n} f(x)\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^n}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{4}.$$

*10. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可积，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 $g(x)$，使 $mE(g\neq 0)=m\{x\in\mathbf{R}: g(x)\neq 0\}<\infty$，且

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}m < \varepsilon.$$

证　$\forall\,\varepsilon>0$，因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可积，则存在 N，使

$$\int_{R-[-N,N]} |f(x)|\,\mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{3}.$$

在 $[-N,N]$ 上，存在 $\varphi(x)\in C_{[-N,N]}$，使

$$\int_{-N}^{N} |f(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{3}.$$

设 $|\varphi(x)|\leqslant M_N\quad(\forall\, x\in[-N,N])$，再令

$$g(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in[-N,N],\\ \text{线性}, & x\in[-N-\delta,-N]\cup[N,N+\delta],\\ 0, & x\in(-\infty,-N-\delta]\cup[N+\delta,+\infty),\end{cases}\qquad(\delta>0)$$

则 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，$m\{x\in\mathbf{R}: g(x)\neq 0\}<\infty$，现取 $\delta=\frac{\varepsilon}{6M_N}$

$$\int_{\mathbf{R}-[-N,N]} |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}m \leqslant \int_{\mathbf{R}-[-N,N]} |f(x)|\,\mathrm{d}m + \int_{\mathbf{R}-[-N,N]} |g(x)|\,\mathrm{d}m$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + 2\delta\cdot M_N = \frac{2}{3}\varepsilon,$$

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

§4.2 积分序列的极限定理

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积，且处处有 $f(x)>0$，试证明 $(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

证 因为

$$(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}m = (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

所以若 $(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$，则据 (L) 积分的惟一性定理知 $f(x)\xlongequal{\text{a.e.}}0$，矛盾. 故

$$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

2. 设 $f(x)\geqslant 0$，在 $[a,b]$ 上可测，试证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}m = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_a^b f(x)\chi_{[a+\varepsilon,b]}(x)\mathrm{d}m \quad (\text{有限或} +\infty).$$

证 (1) 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}m = +\infty$，令

$$F(\varepsilon) = \int_a^b f(x)\chi_{[a+\varepsilon,b]}(x)\mathrm{d}m = \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}m.$$

显然当 ε 单调下降趋于 0_+ 时，$F(\varepsilon)$ 单调上升. 令 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$，$f_n(x) = f(x)\chi_{\left[a+\frac{1}{n},b\right]}$，则 $f_n(x)$ 单调上升，$f_n(x)\geqslant 0$ 可测，由勒维定理

$$+\infty = \int_a^b f(x)\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}F\left(\frac{1}{n}\right).$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_a^b f(x)\chi_{[a+\varepsilon,b]}(x)\mathrm{d}m = \lim_{\varepsilon\to 0_+}F(\varepsilon) = +\infty,$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}m = \lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_a^b f(x)\chi_{[a+\varepsilon,b]}\mathrm{d}m.$$

(2) 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}m < \infty$，则由于 $0\leqslant f(x)\chi_{[a+\varepsilon,b]} < f(x)$，据 L.D.C

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_a^b f(x)\chi_{[a+\varepsilon,b]}\mathrm{d}m = \int_a^b f(x)\mathrm{d}m.$$

3. 设 $f(x)$ 为可测集 E 上的非负可测函数，令

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } f(x)\leqslant n, \\ 0, & \text{若 } f(x) > n, \end{cases}$$

则当 $f(x)$a.e.有限时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m=\int_E f(x)\mathrm{d}m$.

证 因为 $f_n(x)\geqslant 0$，且 $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$，$f(x)$a.e.有限时，必有 $f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$，则据勒维定理立即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m=\int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

4. 设 $f(x)$在$[a,b)$上非负(b 可以是$+\infty$)，$f(x)$在任一有穷区间$[a,b']$($b'<b$)上正常可积，则 $f(x)$广义可积(即(CR)可积)的充要条件是 $f(x)$在$[a,b)$上(L)可积，且

$$(CR)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}m.$$

证法 1 不妨设 $b=+\infty$，对任一 $A>a$，因为 $f(x)\geqslant 0$，$f(x)$在$[a,A]$上(R)可积，据文献[13]p190 例 1

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}m=\lim_{A\to+\infty}(R)\int_a^A f(x)\mathrm{d}x,\qquad (\text{有限或}+\infty)$$

所以 $f(x)(L)$可积$\Leftrightarrow f(x)(CR)$可积，且

$$(CR)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}m.$$

证法 2 令

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[a,n),\\ 0, & x\in[n,+\infty),\end{cases}$$

则 $f_n(x)$非负，单调上升，且 $f_n(x)\to f(x)$，由勒维定理立即得

$$\begin{aligned}(L)\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}m&=\lim_{n\to\infty}(L)\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}m\\&=\lim_{n\to+\infty}(R)\int_a^n f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故 $f(x)(L)$可积$\Leftrightarrow f(x)(CR)$可积，且

$$(CR)\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=(L)\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}m.$$

5. 设$\{E_k\}$为 $\mathbf{R}$ 中的可测集序列，如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} mE_k<\infty$，则对几乎所有的 $x\in\mathbf{R}$，x 至多属于有限个 E_k.

证 令 $A=\{x\in\mathbf{R}: x$ 属于无穷多个 $E_k\}$，我们证明 $mA=0$.

证法 1 考察函数 $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}(x)$，$x\in\mathbf{R}$，则 $x\in A\Leftrightarrow g(x)=+\infty$，即 $A=\{x\in\mathbf{R}: g(x)=+\infty\}$，由逐项积分定理

$$\int_{\mathbf{R}} g(x)\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty} mE_k < \infty.$$

$g(x)\in L(\mathbf{R})$，则 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上 a.e. 有限，所以 $mA=0$.

证法 2 $\overline{\lim_k} E_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$，$x\in\overline{\lim_k} E_k \Leftrightarrow x$ 属于无穷多个 E_k，所以 $A=\overline{\lim_k} E_k$

$$mA \leqslant m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right), \qquad (\forall\, n)$$

$$mA \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} mE_k \to 0, \qquad (n\to\infty)$$

故 $mA=0$.

6. 设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上的非负可测函数列，且 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$，试证明 $\int_E f(x)\mathrm{d}m \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m$.

证法 1 不妨设 $\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty}\int_E f_{n_k}(x)\mathrm{d}m$，因为 $f_{n_k}\xrightarrow{\text{mes}} f$，故存在子序列 $f_{n_k'}\xrightarrow{\text{a.e.}} f$，由法图定理

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_{n_k'}(x)\mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty}\int_E f_{n_k}(x)\mathrm{d}m$$

$$= \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

证法 2 不妨设 $\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m < +\infty$，对任一自然数 k，$\exists\, n_k$，使

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int E f_n(x)\mathrm{d}m + \frac{1}{k} > \int_E f_{n_k}(x)\mathrm{d}m.$$

$f_{n_k}\xrightarrow{\text{mes}} f$，必存在子序列 $f_{n_k'}\xrightarrow{\text{a.e.}} f$，从而

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty}\int_E f_{n_k'}(x)\mathrm{d}m \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m.$$

7. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可积函数列，$f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$，且 $\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}m \leqslant K < \infty$，$n=1,2,3,\cdots$，则 $f(x)$ 必是 E 上的可积函数，且

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}m \leqslant K.$$

证 因为 $f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$，所以 $|f_n(x)|\xrightarrow{\text{a.e.}} |f(x)|$. 再由法图定理

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}m \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}m \leqslant K.$$

8. 试用逐项积分定理(定理 2.2)来证明积分的 σ 可加性.

证 不妨设 $f(x)\geqslant 0$，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，$E_i\cap E_j=\varnothing\ (i\neq j)$，令

$$u_n(x)=\begin{cases}f(x), & x\in E_n,\\ 0, & x\overline{\in} E_n,\end{cases}$$

则 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，于是据逐项积分定理得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E u_n(x)\mathrm{d}m=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}m.$$

一般情况下，$f(x)=f_+(x)-f_-(x)$，$\int_E f(x)\mathrm{d}m=\int_E f_+(x)\mathrm{d}m-\int_E f_-(x)\mathrm{d}m$. 因为$\int_E f(x)\mathrm{d}m$ 存在，则$\int_E f_+(x)\mathrm{d}m<\infty$，$\int_E f_-(x)\mathrm{d}m<\infty$，

$$\int_E f_+(x)\mathrm{d}m=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f_+(x)\mathrm{d}m<\infty,$$

$$\int_E f_-(x)\mathrm{d}m=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f_-(x)\mathrm{d}m<\infty,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}m&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f_+(x)\mathrm{d}m-\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f_-(x)\mathrm{d}m\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{E_n}f_+(x)\mathrm{d}m-\int_{E_n}f_-(x)\mathrm{d}m\right]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

9. 设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots$都是 E 上的非负可积函数，且有 $f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}f(x)$以及$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m=\int_E f(x)\mathrm{d}m$，试证明对任一可测集 $A\subset E$，有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\mathrm{d}m=\int_A f(x)\mathrm{d}m$.

证法 1 考察函数序列$(f(x)-f_n(x))_+$，因为 $f_n(x)$非负可积，显然有

$$0\leqslant(f(x)-f_n(x))_+\leqslant f(x)\qquad(x\in E).$$

又因为 $f(x)$在 E 上可积，则 $f(x)$必 a.e. 有限，$|f(x)-f_n(x)|\xrightarrow{\text{a.e.}}0$，

$$(f(x)-f_n(x))_+\leqslant|f(x)-f_n(x)|,$$

故$(f(x)-f_n(x))_+\xrightarrow{\text{a.e.}}0$，由 L.D.C 得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E(f(x)-f_n(x))_+\mathrm{d}m=0.$$

按题设

$$\lim_{n\to\infty}\int_E (f(x)-f_n(x))\mathrm{d}m = 0,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_E (f(x)-f_n(x))_-\,\mathrm{d}m = 0.$$

对任何可测子集 $A\subset E$,有

$$\int_A (f(x)-f_n(x))_+\,\mathrm{d}m \leqslant \int_E (f(x)-f_n(x))_\pm\,\mathrm{d}m,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_A (f(x)-f_n(x))_+\,\mathrm{d}m = 0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_A (f(x)-f_n(x))\mathrm{d}m = 0.$$

证法 2 首先由法图定理得

$$\int_A f(x)\mathrm{d}m \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\mathrm{d}m,\qquad \forall A\subset E,\text{可测}.$$

另一方面利用 $\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$,令 $x_n = -\int_A f_n(x)\mathrm{d}m$, $y_n = \int_E f_n(x)\mathrm{d}m$,

$$\begin{aligned}\int_A f(x)\mathrm{d}m &= \int_E f(x)\mathrm{d}m - \int_{E-A} f(x)\mathrm{d}m \geqslant \int_E f(x)\mathrm{d}m - \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_{E-A} f_n(x)\mathrm{d}m\\ &= \int_E f(x)\mathrm{d}m - \underline{\lim}_{n\to\infty}\left[\int_E f_n(x)\mathrm{d}m - \int_A f_n(x)\mathrm{d}m\right]\\ &\geqslant \int_E f(x)\mathrm{d}m - \left[\int_E f(x)\mathrm{d}m - \overline{\lim}_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\mathrm{d}m\right].\end{aligned}$$

所以

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\mathrm{d}m \leqslant \int_A f(x)\mathrm{d}m \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\mathrm{d}m,$$

故

$$\int_A f(x)\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\mathrm{d}m.$$

证法 3 令 $g_n(x)=\min(f_n(x),f(x))$,则

$$0\leqslant g_n\leqslant f,\quad \text{且}\quad g_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}} f(x).$$

$f(x)$在 E 上可积,按 L.D.C,对任一可测集 $A\subset E$,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_A g_n(x)\mathrm{d}m = \int_A f(x)\mathrm{d}m.$$

再令 $h_n=f_n-g_n$，则 $0\leqslant h_n(x)$，$h_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}0$.

$$\lim_{n\to\infty}\int_E h_n(x)\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\left[\int_E f_n(x)\mathrm{d}m-\int_E g_n(x)\mathrm{d}m\right]=0,$$

$$0\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_A h_n(x)\mathrm{d}m\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_E h_n(x)\mathrm{d}m=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_A h_n(x)\mathrm{d}m=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_A h_n(x)\mathrm{d}m+\lim_{n\to\infty}\int_A g_n(x)\mathrm{d}m=\int_A f(x)\mathrm{d}m.$$

10. 设 $f(x)$，$\{f_n(x)\}(n=1,2,3,\cdots)$都是 E 上的可积函数，$f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}f(x)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n(x)|\mathrm{d}m=\int_E|f(x)|\mathrm{d}m,$$

试证明对任一可测集 $A\subset E$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_A|f_n(x)|\mathrm{d}m=\int_A|f(x)|\mathrm{d}m.$$

证 $|f(x)|$，$\{|f_n(x)|\}$满足第 9 题条件，考察函数列$(|f(x)|-|f_n(x)|)_+$

$$0\leqslant(|f(x)|-|f_n(x)|)_+\leqslant|f(x)|,$$

$$|f(x)|-|f_n(x)|\xrightarrow{\text{a.e.}}0,$$

同第 9 题，立即可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_A|f_n(x)|\mathrm{d}m=\int_A|f(x)|\mathrm{d}m,\qquad\forall A\subset E.$$

11. 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的非负广义可积函数，$f(0)=0$，试证明 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}f(n^2x)$在 $\mathbf{R}$ 上 a.e. 收敛于一个可积函数.

证 因为 $f(0)=0$，

$$\int_{\mathbf{R}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n^2x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\mathbf{R}}f(n^2x)\mathrm{d}x=\left(\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

故 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}f(n^2x)$a.e.有限，即函数项级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}f(n^2x)$ a.e.收敛于一个可积函数.

12. 证明对任何 $p>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln^p(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x=0$.

证 令 $f_n(x)=\dfrac{\ln^p(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x$，则 $f_n(x)\to0$，$\forall x\in[0,+\infty)$

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\ln^p(x+n)}{n+x}\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x}\cos x\right| \leqslant e^{-x}\left(1+\frac{x}{n}\right) \qquad (n \text{ 充分大时}),$$

$$|f_n(x)| \leqslant (1+x)e^{-x} \qquad (n \text{ 充分大时}),$$

按 L.D.C

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

13. 证明 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2} \qquad (p>-1).$

证 $x\in(0,1)$时

$$\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x} = -\sum_{n=0}^{\infty}x^{p+n}\ln x,$$

则由逐项积分定理得

$$\int_0^1\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}m = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{p+n}\ln x\mathrm{d}m = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{p+n}\ln x\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(p+n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2} \qquad (p>-1).$$

14. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\mathrm{d}x.$$

解 因为

$$f_n(x) = \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx \in C_{[0,1]},$$

且

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{nx}{1+n^2x^2}x^{-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \in L[0,1],$$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x) = 0,$$

所以按 L.D.C 得

$$\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}(L)\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}m = 0.$$

* **15.** 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的可积函数，令 $\tilde{f}(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\alpha x}f(x)\mathrm{d}x, \alpha\in(-\infty,+\infty)$，则 $\tilde{f}(\alpha)$ 是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，且

$$\tilde{f}(\alpha) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\alpha x}}{-ix}f(x)\mathrm{d}x,$$

这里 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示(L)积分$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}m$.

(提示:应用勒贝格控制收敛定理.)

证

$$\tilde{f}(\alpha+\Delta\alpha)-\tilde{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{-ix(\alpha+\Delta\alpha)}-e^{-ix\alpha}]f(x)dx,$$

因为

$$|[e^{-ix(\alpha+\Delta\alpha)}-e^{-ix\alpha}]f(x)|\leqslant 2|f(x)|\in L(-\infty,+\infty),$$

则由勒贝格控制收敛定理,得

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}[\tilde{f}(\alpha+\Delta\alpha)-\tilde{f}(\alpha)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\Delta\alpha\to 0}[e^{-ix(\alpha+\Delta\alpha)}-e^{-ix\alpha}]f(x)dx=0.$$

所以 $\tilde{f}(\alpha)\in C_{(-\infty,+\infty)}$.

若令

$$g(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix\alpha}-1}{-ix}f(x)dx,$$

则

$$\frac{g(\alpha+\Delta\alpha)-g(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{e^{-ix(\alpha+\Delta\alpha)}-1}{-ix}-\frac{e^{-ix\alpha}-1}{-ix}\right]\frac{f(x)}{\Delta\alpha}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix\alpha}(e^{-ix\Delta\alpha}-1)}{-ix\cdot\Delta\alpha}f(x)dx.$$

由中值定理存在 $0<\theta<1$,使

$$\left|\frac{e^{-ix\alpha}(e^{-ix\Delta\alpha}-1)}{-ix}\frac{f(x)}{\Delta\alpha}\right|=\left|\frac{e^{-ix\Delta\alpha}e^{-ix\theta\Delta\alpha}(-ix\Delta\alpha)}{-ix\cdot\Delta\alpha}f(x)\right|$$

$$\leqslant|f(x)|\in L(-\infty,+\infty).$$

再据 L.D.C 得

$$g'(\alpha)=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix\alpha}e^{-ix\theta\Delta\alpha}f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix\alpha}f(x)dx=\tilde{f}(\alpha).$$

16. 设 $f(x)$是$[0,1]$上的处处有限可测函数,令 $E=\{x\in[0,1]:f(x)$为整数$\}$,试证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|\cos(\pi f(x))|^n dx=mE.$$

证 因为 $E=\{x\in[0,1]:f(x)$为整数$\}$,所以

$$x\in E\Leftrightarrow|\cos(\pi f(x))|^n=1,$$

$$x\in[0,1]-E\text{ 时},\lim_{n\to\infty}|\cos(\pi f(x))|^n=0.$$

于是

$$|\cos\pi(f(x))|^n\to g(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\in[0,1]-E.\end{cases}$$

据有界控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |\cos(\pi f(x))|^n \mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = mE.$$

§4.3 微分和积分

1. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调增加函数，且它的值域是整个区间 $[f(a), f(b)]$，试证 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

证 反证法. 设存在 $c\in[a,b]$，使 $f(x)$ 在 c 点间断，则

$$f(c-0)\leqslant f(c)\leqslant f(c+0),$$

且至少有一个是严格不等号，例如 $f(c-0)<f(c)$，由 $f(x)$ 的单调上升性，知开区间 $(f(c-0), f(c))$ 的原象是空集，这与题设矛盾，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

2. 如果 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的囿变函数，试证 $|f(x)|$ 也是 $[a,b]$ 上的囿变函数，且 $\bigvee_a^b(|f|)\leqslant\bigvee_a^b(f)$；反之，如果 $|f(x)|$ 是 $[a,b]$ 上的囿变函数，问 $f(x)$ 是否也是 $[a,b]$ 上的囿变函数?

证 对 $[a,b]$ 的任一分划 $\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

$$\sum_{k=1}^{n}\big|\,|f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\,\big|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$
$$\leqslant\bigvee_a^b(f).$$

所以

$$\bigvee_a^b(|f|)\leqslant\bigvee_a^b(f)<+\infty.$$

反之，设

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\text{ 为}[0,1]\text{ 中的无理数},\\ 1, & x\text{ 为}[0,1]\text{ 中的有理数},\end{cases}$$

则 $|f(x)|\equiv 1$，故 $|f(x)|$ 是 $[0,1]$ 上的囿变函数. 在 $[0,1]$ 中取一列点 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{2n}\}$ 如下

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_{2n}=1,$$

其中 $x_0,x_2,x_4,\cdots,x_{2n}$ 为有理数，$x_1,x_3,\cdots,x_{2n-1}$ 为无理数，则

$$\sum_{k=1}^{2n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=2\cdot 2n=4n\to\infty\quad(n\to\infty).$$

故 $f(x)$ 不是 $[0,1]$ 上的囿变函数.

3. 试证明 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上绝对连续函数的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任一列 $[a,b]$ 中互不相交的区间 $\{(a_k,b_k): k=1,2,3,\cdots\}$，当 $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k$

$-a_k)<\delta$ 时,有 $\sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$.

证 本题只需证明必要性.设 $\{(a_k,b_k):k=1,2,3,\cdots\}$ 是 $[a,b]$ 中一列互不相交的开区间,满足 $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<\delta$.由绝对连续函数的定义,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,对 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_k,b_k)\}$,当 $\sum_k(b_k-a_k)<\delta$ 时,有 $\sum_k|f(b_k)-f(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

现在,对任一自然数 n,$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$,故

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(\forall n).$$

让 $n\to\infty$,得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k)-f(a_k)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

4. 设 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上的囿变函数列,$f_n(x)$ 收敛于一有限函数 $f(x)$,且 $\bigvee_a^b(f_n)\leqslant K(n=1,2,3,\cdots)$,则 $f(x)$ 亦囿变.

证 对 $[a,b]$ 的任一分划 $\pi:a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$,因为 $\bigvee_a^b(f_n)\leqslant K(\forall n)$,所以

$$\sum_{k=1}^{m}|f_n(x_k)-f_n(x_{k-1})|\leqslant K.$$

又因为 $f_n(x)\to f(x)$,所以

$$\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant K,$$

从而 f 在 $[a,b]$ 上囿变,且 $\bigvee_a^b(f)\leqslant K$.

5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续,且几乎处处存在非负导数,则 $f(x)$ 必为增函数.

证 任取 $x_1,x_2\in[a,b]$,$x_1<x_2$,因为 $f'(x)\overset{\text{a.e.}}{\geqslant}0$,$f(x)$ 绝对连续,则

$$0\leqslant\int_{x_1}^{x_2}f'(t)\mathrm{d}t=f(x_2)-f(x_1),$$

即 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$,$f(x)$ 为增函数.

6. 设 $f(x)=x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}}\quad(0\leqslant x\leqslant1,\alpha,\beta>0)$,试证明

(1) $\alpha>\beta>0$ 时,$f(x)$ 绝对连续;

(2) $\alpha\leqslant\beta$ 时，$f(x)$不是囿变函数.

证 (1) 设 $\alpha>\beta>0$，$x\neq0$ 时，$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x^\beta}-\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\dfrac{1}{x^\beta}$，

$$|f'(x)|\leqslant\alpha x^{\alpha-1}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\qquad(x\neq0).$$

因为 $\alpha>0$，$\alpha-\beta>0$，所以 $f'(x)$在$[0,1]$上广义绝对可积，于是

$$(L)\int_0^x f'(t)\mathrm{d}m=(CR)\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\lim_{\delta\to0_+}(R)\int_\delta^x f'(t)\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{\delta\to0_+}t^\alpha\sin\frac{1}{t^\beta}\Big|_\delta^x=x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}=f(x).$$

故 $f(x)$在$[0,1]$上必绝对连续.

(2) 设 $\alpha\leqslant\beta$，在$[0,1]$上取分点 $x_0=0$，$x_{2n+2}=1$，

$$x_{2i}=\frac{1}{(2i\pi)^{\frac{1}{\beta}}}\qquad(i=1,2,\cdots,n),$$

$$x_{2i+1}=\frac{1}{\left(2i\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}}\qquad(i=0,1,2,\cdots),$$

作分法 π

$$0<\frac{1}{\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}}<\frac{1}{(2n\pi)^{\frac{1}{\beta}}}<\cdots<\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{\beta}}}<\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}}<1,$$

则

$$v(f;\pi)=\left|f(1)-f\left(\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}}\right)\right|+\left|f\left(\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}}\right)-f\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{\beta}}}\right)\right|$$

$$+\cdots+\left|f\left(\frac{1}{\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}}\right)-f(0)\right|$$

$$\geqslant\sum_{i=0}^n\frac{1}{\left(2i\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}}\geqslant\sum_{i=0}^n\frac{1}{2i\pi+\frac{\pi}{2}},$$

所以 $\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(f)=+\infty$，$f(x)$不是囿变函数.

7. 设 $f(x)$定义在$[a,b]$上有限，且对任给的 $\varepsilon>0$，有 $\overset{b}{\underset{a+\varepsilon}{\mathrm{V}}}(f)\leqslant M$，这里 M 与 ε 无关，试证明 $f(x)$是$[a,b]$上的囿变函数.

证法 1 因为对任给的 $\varepsilon>0$，有

$$\bigvee_{a+\varepsilon}^{b}(f) \leqslant M,$$

则

$$|f(b) - f(a+\varepsilon)| \leqslant \bigvee_{a+\varepsilon}^{b}(f) \leqslant M,$$

$$|f(a+\varepsilon)| \leqslant M + |f(b)| \qquad (\forall \varepsilon > 0).$$

对$[a,b]$的任一分划$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,

$$v(f;\pi) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant |f(x_1) - f(a)| + M$$
$$\leqslant 2M + |f(b)| + |f(a)|,$$

所以

$$\bigvee_{a}^{b}(f) \leqslant 2M + |f(b)| + |f(a)| < +\infty.$$

证法 2　令

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a + \frac{1}{n}, b], \\ 0, & x \in (a, a + \frac{1}{n}), \\ f(a), & x = a, \end{cases}$$

则 $f_n(x) \to f(x)$

$$\bigvee_{a}^{b}(f_n) = \bigvee_{a+\frac{1}{n}}^{b}(f_n) + \bigvee_{a}^{a+\frac{1}{n}}(f_n) = \bigvee_{a+\frac{1}{n}}^{b}(f) + |f(a)| \leqslant M + |f(a)|,$$

据本节习题 4 立即知$\bigvee_{a}^{b}(f) \leqslant M + |f(a)|$.

8. 设$g(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数,$f(x)$定义在$(-\infty,+\infty)$上,且满足利普希茨(Lipschitz)条件,试证明$f(g(x))$是$[a,b]$上的绝对连续函数.

证　由题设条件,对任何$x, x' \in (-\infty,+\infty)$

$$|f(x) - f(x')| \leqslant M|x - x'|.$$

因为$g(x)$在$[a,b]$上绝对连续,则$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,使对$[a,b]$中任何有限个互不相交的开区间$\{(a_i,b_i)\}$,当$\sum_i (b_i - a_i) < \delta$时,有

$$\sum_i |g(b_i) - g(a_i)| < \frac{\varepsilon}{M},$$

则

$$\sum_i |f(g(b_i)) - f(g(a_i))| \leqslant M \sum_i |g(b_i) - g(a_i)| < \varepsilon,$$

$f(g(x))$是$[a,b]$上的绝对连续函数.

9. 设$\{g_n\}$是$[a,b]$上的绝对连续函数列,$F(x)$在$[a,b]$上(L)可积,如果

$|g_n'(x)|\overset{\text{a.e.}}{\leqslant}F(x)(n=1,2,3,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=g(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty}g_n'(x)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}f(x)$，试证明 $g'(x)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}f(x)$.

证 因为 $g_n(x)$ 绝对连续，所以

$$g_n(x)-g_n(a)=\int_a^x g_n'(t)\mathrm{d}t,\qquad x\in[a,b].$$

由条件，利用 L.D.C 知 $f(t)\in L[a,b]$，上式中令 $n\to\infty$，即得

$$g(x)-g(a)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

故 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，从而 a.e. 存在导数，于是

$$g'(x)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}f(x).$$

§4.4 抽象测度与积分·富比尼定理

1．设 $(X,\mathscr{A})$ 是一个可测空间

(1) 如果 $\{\mu_n\}$ 是 $(X,\mathscr{A})$ 上的一个递增测度序列(即 $\mu_n(A)\leqslant\mu_{n+1}(A)$，$\forall A\in\mathscr{A}$，$n=1,2,3,\cdots$)，令 $\mu(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)$，$A\in\mathscr{A}$，则 μ 也是 $(X,\mathscr{A})$ 上的一个测度.

(2) 如果 $\{\mu_n\}$ 是 $(X,\mathscr{A})$ 上的任意测度序列，令 $\mu(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n(A)$，$A\in\mathscr{A}$，则 μ 是 $(X,\mathscr{A})$ 上的一个测度.

证 (1) $\mu(\varnothing)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(\varnothing)=0$，设 $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$，其中 $A_k\in\mathscr{A}$，互不相交，则

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_n(A_k)$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k).$$

若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)<+\infty$，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_n(A_k)$ 关于 n 一致收敛，故

$$\mu(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\mu_n(A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k).$$

若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)=+\infty$，则对任意的 $M>0$，$\exists$ 自然数 N_0，使

$$\sum_{k=1}^{N_0}\mu(A_k)>2M.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A_k)=\mu(A_k)$，则存在 N，使 $n>N$ 时

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_n(A_k) > M.$$

故

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_n(A_k) = +\infty = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k).$$

μ 具有可数可加性，所以 μ 是$(X,\mathscr{A})$上的一个测度.

(2) $\mu(\varnothing)=0$ 显然，现设 $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k, A_k\in\mathscr{A}$，互不相交

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_n(A_k)\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A_k)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k).$$

所以 μ 是$(X,\mathscr{A})$上的一个测度.

2. 设 $\mu:\mathscr{A}\to[0,+\infty]$满足 $\mu(\varnothing)=0$ 以及 $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)$，其中 E_k 为 $\mathscr{A}$ 中互不相交的集合，如果下列条件之一成立：

(a) 若$\{A_n\}$是 $\mathscr{A}$ 中渐张集合序列，则 $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$；

(b) 若$\{A_n\}$是 $\mathscr{A}$ 中渐缩集合序列，且 $\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=\varnothing$，则 $\lim_{k\to\infty}\mu(A_k)=0$.

则 μ 是$(X,\mathscr{A})$上的一个测度.

证 (1) 设条件(a)成立. 设$\{B_j\}$是 $\mathscr{A}$ 中互不相交的集合序列，令

$$A_n=\bigcup_{j=1}^{n}B_j,$$

则$\{A_n\}$是 $\mathscr{A}$ 中渐张集合序列，$\mu(A_n)=\sum_{j=1}^{n}\mu(B_j)$，由条件(a)可得

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(B_j),$$

但

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j,$$

所以

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(B_j).$$

μ 是$(X,\mathscr{A})$上的一个测度.

(2) 设条件(b)成立. 令 $A_k=\bigcup_{j=k}^{\infty}B_j$，其中$\{B_j\}$是 $\mathscr{A}$ 中互不相交的集合序列，则$\{A_k\}$是 $\mathscr{A}$ 中的渐缩集合序列，且

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} B_j\right) = \varnothing,$$

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j) + \mu(A_{k+1}).$$

由条件(b)，$\lim\limits_{k\to\infty}\mu(A_{k+1})=0$，故

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j).$$

3. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间，$A,A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$均属于$\mathscr{A}$，$f_n(x)=\chi_{A_n}(x)$，$f(x)=\chi_A(x)$，试证明

(1) $f_n(x)\xrightarrow{\text{mes}}0$，充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$；

(2) $f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}0$，充要条件是$\mu\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\right)=0$；

(3) $f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}0$，充要条件是集合$A$，$\overline{\lim\limits_{n}}A_n$和$\underline{\lim\limits_{n}}A_n$之间仅相差一个零测度集.

$\Bigg($提示：(2) 令$E_n\left(\frac{1}{k}\right)=X\left(f_n(x)\geqslant\frac{1}{k}\right)$，则$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overline{\lim\limits_{n}}E_n\left(\frac{1}{k}\right)=\{x\in X: f_n(x)\not\to 0\}$；(3) 先证明$\chi_{\overline{\lim\limits_n} A_n}(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)$，$\chi_{\underline{\lim\limits_n} A_n}(x)=\underline{\lim\limits_{n}}\chi_{A_n}(x)\Bigg)$.

证 (1) 因为$f_n(x)=\chi_{A_n}(x)$，所以$A_n=X(|f_n|\geqslant\varepsilon)$，$\forall\varepsilon>0$，于是$f_n\xrightarrow{\text{mes}}0\Leftrightarrow\mu(A_n)\to 0\ (n\to\infty)$；

(2) 令$E_n(\varepsilon)=X(|f_n(x)|\geqslant\varepsilon)$，则可以证明

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{\lim_{n}}\,E_n\left(\frac{1}{k}\right)=\{x\in X: f_n(x)\not\to 0\}.$$

事实上，$x\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overline{\lim\limits_{n}}E_n\left(\frac{1}{k}\right)\Leftrightarrow\exists k_0\in\mathbf{N}$，使$x\in\overline{\lim\limits_{n}}E_n\left(\frac{1}{k_0}\right)\Leftrightarrow\exists k_0\in\mathbf{N}$，以及子序列$\{n_k\}$，使$\left|f_{n_k}(x)\right|\geqslant\frac{1}{k_0}\Leftrightarrow f_n(x)\not\to 0$. 但对一切自然数$k$，$E_n\left(\frac{1}{k}\right)=A_n$，所以

$$\overline{\lim_{n}}A_n=\{x\in X: f_n(x)\not\to 0\},$$

从而

$$f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}0\Leftrightarrow\mu\left(\overline{\lim_{n}}A_n\right)=0;$$

(3) 首先按照第一章§1习题6知

$$\chi_{\overline{\lim\limits_n} A_n}(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x),\quad \chi_{\underline{\lim\limits_n} A_n}(x)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x),$$

则

$$\chi_{A_n}(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}\chi_A(x)\Leftrightarrow\chi_{\overline{\lim\limits_n} A_n}(x)\xlongequal{\text{a.e.}}\chi_{\underline{\lim\limits_n} A_n}(x)\xlongequal{\text{a.e.}}\chi_A(x)$$

等价于

$$A-\overline{\lim_n}A_n,\ A-\underline{\lim_n}\ A_n,\ \overline{\lim_n}A_n-\underline{\lim_n}A_n \text{ 均为零测度集.}$$

4. 设 X 表示整数全体，μ 是所有子集组成的 σ 代数上的一个计数测度，f，$f_n(n=1,2,3,\cdots)$是 X 上的实值函数，试证明 $f_n\xrightarrow{\text{mes}}f$ 等价于 f_n 在 X 上一致收敛于 f.

（提示：必要性用反证法）.

证　充分性：设 $f_n(x)\rightrightarrows f(x),x\in X$，则 $\forall\varepsilon>0,\exists N$，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\qquad(\forall x\in X).$$

从而 $n\geqslant N$ 时

$$\mu\{X(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)\}=0,$$

故 $f_n\xrightarrow{\text{mes}}f$.

必要性：设 $f_n\xrightarrow{\text{mes}}f$，则 $\forall\varepsilon>0$

$$\mu\{X(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)\}\to0\qquad(n\to\infty).$$

若$\{f_n\}$非一致收敛，则存在 $\varepsilon_0>0$ 以及子序列$\{n_k\}$和点列$\{x_k\}\subset X$，使

$$|f_{n_k}(x_k)-f(x_k)|\geqslant\varepsilon_0,$$

从而

$$\mu\{X(|f_{n_k}-f|\geqslant\varepsilon_0)\}\geqslant1,$$

$f_{n_k}\not\xrightarrow{\text{mes}}f(x)$，矛盾，故 $f_n(x)\rightrightarrows f(x),x\in X$.

5. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间，$f_n(n=1,2,3,\cdots)$都是 X 上的 μ 可积函数，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_X|f_n-f|\mathrm{d}\mu<\infty$，则 $f_n\xrightarrow[\mu]{\text{a.e.}}f$.

证　因为$|f_n-f|$非负可测，据逐项积分定理得

$$\int_X\left(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n-f|\right)\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X|f_n-f|\mathrm{d}\mu<\infty.$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n-f|$ a.e. 有限，从而 $f_n-f\xrightarrow[\mu]{\text{a.e.}}0$.

6. 设在$[0,1]\times[0,1]$上定义函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x\cdot y\text{ 为无理数},\\ 0, & x\cdot y\text{ 为有理数},\end{cases}$$

试求积分 $\int_{[0,1]\times[0,1]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　对固定 $x_0\in[0,1]$，由 $f(x,y)$的定义，$f(x_0,y)$至多对可列个 y 取值为

0，故 $f(x_0,y)\xlongequal{\text{a.e.}}1$，则按富比尼定理

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 1\mathrm{d}x=1.$$

7．设 $X=[0,1]$，$Y=[0,1]$，$(X,\mathscr{A},\mu)=(Y,\mathscr{B},\nu)$ 为勒贝格测度空间，E 是 $X\times Y$ 中满足下列条件的集合：对每个 x 与每个 y，E_x 与 $X-E^y$ 都是可列集，则 E 是不可测的.

证 若 E 可测，由条件 E_x 和 $X-E^y$ 均是可列集，则按本节定理 4.8，有

$$\lambda(E)=\int_X \nu(E_x)\mathrm{d}\mu=\int_Y \mu(E^y)\mathrm{d}\nu.$$

又因为 $\nu(E_x)=0$，$\mu(E^y)=1$，则

$$\lambda(E)=0,\quad 且\ \lambda(E)=1,$$

矛盾，故 E 为不可测的.

8．设 $f(x)$，$g(y)$ 分别是定义在集 X，Y 上的 μ，ν 可积函数，则 $h(x,y)=f(x)g(y)$ 是乘积空间 $X\times Y$ 上的 $(\mu\times\nu)$ 可积函数，且有

$$\int_{X\times Y} h(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\int_X f(x)\mathrm{d}\mu\int_Y h(y)\mathrm{d}\nu.$$

证法 1

$$h_+(x,y)=\begin{cases} f(x)g(y), & f(x)g(y)\geqslant 0,\\ 0, & f(x)g(y)<0,\end{cases}$$

$$h_-(x,y)=\begin{cases} -f(x)g(y), & f(x)g(y)\leqslant 0,\\ 0, & f(x)g(y)>0.\end{cases}$$

按照本节定理 4.9 的证明(ii)，对 $h_+(x,y)$，$h_-(x,y)$ 成立富比尼定理，即

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} h_+(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\nu)&=\int_X\left(\int_Y h_+(x,y)\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu\\&=\int_X\left(\int_{Y(f(x)g(y)\geqslant 0)} h_+(x,y)\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu\\&=\int_Y\left(\int_{X(f(x)g(y)\geqslant 0)} h_+(x,y)\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}\nu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} h_-(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\nu)&=\int_X\left(\int_{Y(f(x)g(y)\leqslant 0)} -f(x)g(y)\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu\\&=\int_Y\left(\int_{X(f(x)g(y)\leqslant 0)} -f(x)g(y)\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}\nu.\end{aligned}$$

所以

$$\int_X\left(\int_{Y(f(x)g(y)\geqslant 0)} f(x)g(y)\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu=\int_X f(x)\mathrm{d}\mu\int_{Y(f(x)g(y)\geqslant 0)} g(y)\mathrm{d}\nu<\infty,$$

同理

$$\int_X \left(\int_{Y(f(x)g(y)\leqslant 0)} - f(x)g(y)\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

所以

$$\int_{X\times Y} h_{\pm}(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\nu) < \infty.$$

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} h(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\nu) &= \int_{X\times Y} h_{+}(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\nu) - \int_{X\times Y} h_{-}(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\nu)\\ &= \int_X\left(\int_{Y(f(x)g(y)\geqslant 0,)} f(x)g(y)\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu\\ &\quad + \int_X\left(\int_{Y(f(x)g(y)\leqslant 0,)} f(x)g(y)\mathrm{d}\nu\right)\mathrm{d}\mu\\ &= \int_X f(x)\mathrm{d}\mu\int_Y g(y)\mathrm{d}\nu.\end{aligned}$$

证法 2　类似本节定理 4.9，分三步来证明.

(1) 先设 $h(x,y)=\chi_A(x)\chi_B(y)$，则

$$\int_{X\times Y} h(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int_X \chi_A(x)\mathrm{d}\mu\int_Y \chi_B(y)\mathrm{d}\nu.$$

从而对 $f(x)$，$g(y)$ 均为简单函数 $h(x,y)=f(x)g(y)$ 时成立.

(2) 若 $f(x)\geqslant 0, g(y)\geqslant 0$，则存在单调上升简单函数列 $\{f_n(x)\}$ 和 $\{g_n(y)\}$ 使 $f_n(x)\to f(x), g_n(y)\to g(y)$，按勒维定理可得

$$\int_{X\times Y} h(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int_X f(x)\mathrm{d}\mu\int_Y g(y)\mathrm{d}\nu.$$

(3) 一般情况下，$f(x)=f_{+}-f_{-}, g(y)=g_{+}-g_{-}$

$$h(x,y) = (f_{+}-f_{-})(g_{+}-g_{-}) = f_{+}g_{+}+f_{-}g_{-}-f_{-}g_{+}-f_{+}g_{-},$$

因为

$$\int_{X\times Y} f_{+}(x)g_{+}(y)\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int_X f_{+}(x)\mathrm{d}\mu\int_Y g_{+}(y)\mathrm{d}\nu,$$

$$\int_{X\times Y} f_{-}(x)g_{-}(y)\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int_X f_{-}(x)\mathrm{d}\mu\int_Y g_{-}(y)\mathrm{d}\nu,$$

$$\int_{X\times Y} f_{-}(x)g_{+}(y)\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int_X f_{-}(x)\mathrm{d}\mu\int_Y g_{+}(y)\mathrm{d}\nu,$$

$$\int_{X\times Y} f_{+}(x)g_{-}(y)\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int_X f_{+}(x)\mathrm{d}\mu\int_Y g_{-}(y)\mathrm{d}\nu,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} h(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\nu) &= \int_X (f_{+}-f_{-})\mathrm{d}\mu\int_Y (g_{+}-g_{-})\mathrm{d}\nu\\ &= \int_X f(x)\mathrm{d}\mu\int_Y g(y)\mathrm{d}\nu.\end{aligned}$$

第四章 复习题与解答

1. 设 f 是 E 上 a.e. 大于零的可测函数，且满足 $\int_E f(x)\mathrm{d}m=0$，试证明 $mE=0$.

证 因为 $E=E(f\leqslant 0)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\geqslant\frac{1}{n}\right)\right)$，$mE(f\leqslant 0)=0$，

$$0=\int_E f(x)\mathrm{d}m\geqslant\int_{E\left(f\geqslant\frac{1}{n}\right)}f(x)\mathrm{d}m\geqslant\frac{1}{n}mE\left(f\geqslant\frac{1}{n}\right),$$

故对任一 $n\in\mathbf{N}$，$mE\left(f\geqslant\frac{1}{n}\right)=0$，从而 $mE=0$.

2. 设 $\{E_k\}$ 是一列渐张可测集合序列，$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$，$f$ 是 E_k 上的 (L) 可积函数 $(k=1,2,3,\cdots)$，且 $\left\{\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}m\right\}$ 存在有限极限，试证明 f 是 E 的可积函数，且 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}m=\int_E f(x)\mathrm{d}m$.

证法 1 记 $f_k(x)=|f(x)|\chi_{E_k}(x)$，则在 E 上 $\{f_k(x)\}$ 单调上升收敛于 $|f(x)|$，由条件可知

$$\left\{\int_E f_k(x)\mathrm{d}m\right\}=\left\{\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}m\right\}$$

收敛，故按勒维定理

$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}m=\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}m=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}m<+\infty,$$

$f(x)$ 在 E 上 (L) 可积. 再令 $g_k(x)=f(x)\chi_{E_k}(x)$，则 $g_k(x)\to f(x)$，且 $|g_k(x)|\leqslant|f(x)|$，则按 L.D.C 即得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}m=\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}m=\int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

证法 2 因为 $\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}m=\int_{E_k}f_+(x)\mathrm{d}m+\int_{E_k}f_-(x)\mathrm{d}m$，$\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}m$ 存在有限，显然 $\left\{\int_{E_k}f_\pm(x)\mathrm{d}m\right\}$ 均是单调上升数列，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k}f_\pm(x)\mathrm{d}m$ 均存在有限. 从而可不妨设 $f(x)\geqslant 0$，令 $f_k(x)=f(x)\chi_{E_k}(x)$，$f_k(x)\geqslant 0$，单调上升，$f_k(x)\to f(x)$，则按勒维定理立即得

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}m.$$

3. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$是一个测度空间，$f,f_n(n=1,2,3,\cdots)$是非负可积函数，满足条件：$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu$，试证明

(1) 对任意的可测子集 $E\subset X$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu = \int_E f\mathrm{d}\mu$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\mathrm{d}\mu = 0$.

证　(1) **证法 1**　可按本章§4.2 习题 9 的方法来证明.

证法 2　令 $g_n(x)=\min\{f_n,f\}$，则 $0\leqslant g_n\leqslant f$，且 $g_n\xrightarrow{\text{a.e.}} f$，应用 L.D.C，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n\mathrm{d}\mu = \int_E f\mathrm{d}\mu \qquad (\forall E\subset X \text{ 可测}).$$

再令 $h_n(x)=f_n(x)-g_n(x)$，则 $0\leqslant h_n$，$h_n\xrightarrow{\text{a.e.}}0$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_X h_n\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\left[\int_X f_n\mathrm{d}\mu - \int_X g_n\mathrm{d}\mu\right] = 0,$$

所以

$$0\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E h_n(x)\mathrm{d}\mu \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_X h_n(x)\mathrm{d}\mu = 0.$$

故对任一可测集 $E\subset X$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E h_n(x)\mathrm{d}\mu = 0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E h_n\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty}\int_E g_n\mathrm{d}\mu = \int_E f\mathrm{d}\mu.$$

(2)

$$\int_X |f_n - f|\mathrm{d}\mu = \int_{X(f_n-f\geqslant 0)}(f_n - f)\mathrm{d}\mu + \int_{X(f_n-f<0)}(f - f_n)\mathrm{d}\mu,$$

利用(1)立即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\mathrm{d}\mu = 0.$$

4. 设 $f(x)$ 为 E 上的可积函数，如果对任何有界可测函数 $\varphi(x)$，都有 $\int_E f(x)\varphi(x)\mathrm{d}m = 0$，则 $f\sim 0$.

证　设 $E_+ = E(f>0)$，$mE_+ = \alpha>0$，令 $\varphi(x)=\chi_{E_+}(x)$，则 $\varphi(x)$是 E 上的有界可测函数，由条件

$$\int_E f(x)\varphi(x)\mathrm{d}m = \int_{E_+} f(x)\mathrm{d}m = 0,$$

据本章复习题 1 知 $mE_+=0$,矛盾,故 $mE_+=0$,同理可证 $mE_-=0$,其中 $E_-=E(f<0)$,因此 $f\sim 0$.

5. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\frac{3}{2}x}dx$.

解 令

$$f_n(x)=\begin{cases}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\frac{3}{2}x}, & x\in[0,n),\\ 0, & x\geqslant n,\end{cases}$$

则 $f_n(x)\geqslant 0$,$f_n(x)$单调上升收敛于 $e^{-\frac{x}{2}}$,则由勒维定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\frac{3}{2}x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{2}}dx=2.$$

6. 设$\{f_n(x)\}\subset L(E)$,若对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得 $A\subset E$,$mA<\delta$,对一切 n,有 $\left|\int_A f_n(x)dm\right|<\varepsilon$,就称$\{f_n(x)\}$具有积分的一致绝对连续性.设 $mE<\infty$,$f(x),f_n(x)\in L(E)$,$n=1,2,3,\cdots$,$f_n\xrightarrow{\text{mes}}f$,试证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E|f_n-f|dm=0$的充要条件是$\{f_n(x)\}$具有积分的一致绝对连续性.

证 必要性:设 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E|f_n-f|dm=0$,则 $\forall\varepsilon>0$,存在 N,使 $n>N$ 时

$$\int_E|f_n-f|dm<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $f_1,f_2,\cdots,f_N,f\in L(E)$,则存在 $\delta>0$,使得 $A\subset E$,$mA<\delta$ 时,有

$$\int_A|f(x)|dm<\frac{\varepsilon}{2},\qquad\left|\int_A f_n(x)dm\right|<\varepsilon\qquad(n=1,2,3,\cdots,N).$$

因此,$n>N$ 时

$$\left|\int_A f_n(x)dm\right|\leqslant\int_A|f_n-f|dm+\int_A|f(x)|dm<\varepsilon,$$

故对一切 $n\in\mathbf{N}$,有

$$\left|\int_A f_n(x)dm\right|<\varepsilon.$$

充分性:$\forall\varepsilon>0$,由条件,存在 $\delta>0$,使 $A\subset E$,$mA<\delta$ 时,对一切 n,有

$$\left|\int_A f_n(x)dm\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

又因为,$f_n\xrightarrow{\text{mes}}f$,故存在 N,使 $n\geqslant N$ 时

$$mE\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\varepsilon}{3mE}\right)<\delta,$$

$$E_n=E\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\varepsilon}{3mE}\right)=E\left(f_n-f\geqslant\frac{\varepsilon}{3mE}\right)\cup E\left(f_n-f\leqslant\frac{-\varepsilon}{3mE}\right)$$

$$= A_n + B_n,$$

则 $mA_n < \delta, mB_n < \delta$

$$\int_E |f_n - f| \mathrm{d}m = \int_{A_n} (f_n - f) \mathrm{d}m + \int_{B_n} (f - f_n) \mathrm{d}m + \int_{\mathscr{C}E_n} |f_n - f| \mathrm{d}m$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3mE} \cdot m\mathscr{C}E_n \leqslant \varepsilon \qquad (n \geqslant N),$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \mathrm{d}m = 0.$$

7. 设 $f(x)$是$[a,b]$上的(L)可积函数,试证明对任给的 $\varepsilon>0$,存在阶梯函数 $\varphi(x)$,使

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \mathrm{d}m < \varepsilon.$$

证　因为 $f(x) \in L[a,b]$,首先由本章定理 1.7,对 $\forall \varepsilon>0$,存在 $g(x) \in C_{[a,b]}$,使

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$g(x) \in C_{[a,b]}$,必一致连续,则存在阶梯函数 $\varphi(x)$,使

$$|g(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (\forall x \in [a,b]).$$

则

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b |\varphi(x) - g(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

8. 设 $f(x)$是$[a,b]$上的(L)可积函数,试证明

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cos nx \mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx \mathrm{d}m = 0.$$

$\Big($提示:先考虑 $f(x) = \chi_{(\alpha,\beta)}(x)$,其中$(\alpha,\beta) \subset [a,b]$,再考虑阶梯函数 $\sum_{i=1}^n C_i \chi_{(\alpha_i,\beta_i)}(x)\Big)$.

证　(1) 设 $f(x) = \chi_{(\alpha,\beta)}$,其中$(\alpha,\beta) \subset [a,b]$,则

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cos nx \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \cos nx \mathrm{d}x = 0.$$

从而对阶梯函数 $f(x) = \sum_{i=1}^n C_i \chi_{(\alpha_i,\beta_i)}(x)$, 成立

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cos nx \mathrm{d}m = 0.$$

(2) 设 $f(x)\in L_{[a,b]}$，$\forall\varepsilon>0$，由本章复习题 7 知，存在阶梯函数 $\varphi(x)$，使

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}m<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对 $\varphi(x)$，按(1)所证，存在 N，使 $n\geqslant N$ 时

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\cos nx\mathrm{d}m\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

则 $n\geqslant N$ 时

$$\left|\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}m\right|\leqslant\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}m+\left|\int_a^b\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}m\right|<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}m=0.$$

同理可证

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}m=0.$$

9. 设 $f(x)$是$[a,b]$上的(L)可积函数，试证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\cos nx|\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}m=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}m.$$

证 同第 8 题，实际上只要对 $f(x)=\chi_{(\alpha,\beta)}(x)$ （其中$(\alpha,\beta)\subset[a,b]$）证明本题的结论，即证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta|\cos nx|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b\chi_{(\alpha,\beta)}(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}(\beta-\alpha).$$

注意到 $\int_0^\pi|\cos x|\mathrm{d}x=2$，所以

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta|\cos nx|\mathrm{d}x&=\frac{1}{n}\int_{n\alpha}^{n\beta}|\cos x|\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n}\left\{\int_{\left(\left[\frac{n\alpha}{\pi}\right]+1\right)\pi}^{\left[\frac{n\beta}{\pi}\right]\pi}|\cos x|\mathrm{d}x+\int_{E_n}|\cos x|\mathrm{d}x\right\},\end{aligned}$$

其中 $E_n=\left(n\alpha,\left(\left[\frac{n\alpha}{\pi}\right]+1\right)\pi\right)\cup\left(\left[\frac{n\beta}{\pi}\right]\pi,n\beta\right)$，这里$[\lambda]$表示 λ 的整数部分

$$mE_n\leqslant 2\pi.$$

显然

$$\frac{1}{n}\int_{E_n}|\cos x|\mathrm{d}x\to 0\qquad(n\to\infty),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta|\cos nx|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\left(\left[\frac{n\beta}{\pi}\right]-\left[\frac{n\alpha}{\pi}\right]-1\right)\pi}|\cos x|\mathrm{d}x.$$

利用

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\cos x|\,dx=\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx=2,$$

得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}|\cos nx|\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\left[\frac{n\beta}{\pi}\right]-\left[\frac{n\alpha}{\pi}\right]-1\right)=\frac{2}{\pi}(\beta-\alpha).$$

这里读者容易证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{n\beta}{\pi}\right]=\frac{\beta}{\pi}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{n\alpha}{\pi}\right]=\frac{\alpha}{\pi}$. 同理可证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}|\sin nx|\,dx=\frac{2}{\pi}(\beta-\alpha)$.

10. 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的广义绝对可积函数，$\alpha>0$，试证明对 $\mathbf{R}$ 中几乎处处的 x 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}f(nx)=0$.

$\left(\text{提示：}f(x)\geqslant 0\text{ 时，有}\int_{\mathbf{R}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}f(nx)\right)dx<+\infty\right)$.

证　先设 $f(x)\geqslant 0$，有

$$\int_{\mathbf{R}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}f(nx)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{n^{\alpha}}f(nx)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\int_{\mathbf{R}}f(x)\,dx<+\infty.$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}f(nx)\overset{\text{a.e.}}{<}\infty$，从而$\frac{1}{n^{\alpha}}f(nx)\xrightarrow{\text{a.e.}}0$.

一般情况下，$f(x)=f_+-f_-$，对 f_+,f_- 分别讨论即得本题结论.

11. 证明 $f(x)$是$[a,b]$上的囿变函数当且仅当存在单调上升函数 $\varphi(x)$，使得当 $x'>x$ 时，有

$$f(x')-f(x)\leqslant\varphi(x')-\varphi(x).$$

证　必要性：设 $f(x)$在$[a,b]$上囿变，令 $\varphi(x)=\bigvee_a^x(f)$，则 $\varphi(x)$是单调上升函数，且当 $x'>x$ 时

$$f(x')-f(x)\leqslant\bigvee_x^{x'}(f)=\varphi(x')-\varphi(x).$$

充分性：设存在单调上升函数 $\varphi(x)$，使 $x'>x$ 时，有

$$f(x')-f(x)\leqslant\varphi(x')-\varphi(x).$$

考察函数 $h(x)=\varphi(x)-f(x)$，$x'>x$ 时

$$\varphi(x')-f(x')\geqslant\varphi(x)-f(x),$$

故 $h(x)=\varphi(x)-f(x)$是$[a,b]$上的单调上升函数，且

$$f=\varphi-h.$$

因此，$f(x)$必为囿变函数.

12. 设 $f(x)$，$g(x)$是$[a,b]$上的(R)可积函数，且在一个稠密子集上相等，试证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为 f,g 均为 (R) 可积函数，所以 $f-g$ a.e. 连续. 由条件，在一个稠密子集上 $f(x)-g(x)=0$，则 $f-g$ 在连续点上取值为 0，从而 $f-g \xlongequal{\text{a.e.}} 0$

$$(R)\int_a^b (f-g)\mathrm{d}x = \int_a^b (f-g)\mathrm{d}m = 0.$$

故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

* **13.** 设 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的 (L) 可积函数，$[a_\lambda, b_\lambda]$ 是 $(0,+\infty)$ 中与 λ 有关的一族区间，证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{a_\lambda}^{b_\lambda} f(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t = 0.$$

（提示：用反证法，并利用 (L) 可积函数的性质）.

证 用反证法. 设不然，则存在 $\varepsilon_0>0$ 以及 $\{\lambda_n\}$，λ_n 上升趋于 $+\infty$，使

$$\left|\int_{a_{\lambda_n}}^{b_{\lambda_n}} f(t)\cos\lambda_n t\,\mathrm{d}t\right| \geqslant \varepsilon_0 \tag{1}$$

由于 f 可积，则存在 $B>0$，使

$$\int_B^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon_0}{3} \tag{2}$$

又存在 $\delta>0$，使 $mE<\delta$ 时

$$\int_E |f(t)|\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon_0}{6}.$$

由(1),(2)易知 $a_{\lambda_n}<B$，记 $c_n=\min(b_{\lambda_n}, B)$，$a_n=a_{\lambda_n}$，则

$$\left|\int_{a_n}^{c_n} f(t)\cos\lambda_n t\,\mathrm{d}t\right| > \frac{2}{3}\varepsilon_0.$$

因为 $a_{\lambda_n}<B$，$c_n\leqslant B$，可设 $a_n\to a$，$c_n\to c$ $(n\to\infty)$，则可取 N，使 $n>N$ 时

$$|a_n-a|<\delta,\qquad |c_n-c|<\delta.$$

于是 $n>N$ 时

$$\left|\int_a^c f(t)\cos_{\lambda_n} t\,\mathrm{d}t\right| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{3},$$

但

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^c f(t)\cos_{\lambda_n} t\,\mathrm{d}t = 0,$$

矛盾，故本题结论成立.

* **14.** 设 $f(x),f_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$ 均是 $\mathbf{R}$ 上的(L)可积函数，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}f(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，试证明对任意的 $\varepsilon>0$，存在可测子集 E，E 上的非负可积函数 $g(x)$ 及自然数 n_0，使 $n>n_0$ 时

$$\left|\int_{\mathbf{R}-E}f_n(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

$$|f_n(x)|\leqslant g(x),\qquad x\in E.$$

证 因为 $\int_{\mathbf{R}}f(x)\mathrm{d}m<\infty$，所以 $\forall\varepsilon>0$，存在 E_1，使 $mE_1<\infty$，且

$$\left|\int_{\mathbf{R}-E_1}f(x)\mathrm{d}m\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

再取 $\delta>0$，使 $mE<\delta$ 时，有

$$\left|\int_{E}f(x)\mathrm{d}m\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

按照叶果洛夫定理，可取 $E\subset E_1$，使 $m(E_1-E)<\delta$，而且 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，$x\in E$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}m=\int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

由条件

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}}f_n(x)\mathrm{d}m=\int_{\mathbf{R}}f(x)\mathrm{d}m,$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}-E}f_n(x)\mathrm{d}m=\int_{\mathbf{R}-E}f(x)\mathrm{d}m.$$

因为

$$\left|\int_{\mathbf{R}-E}f(x)\mathrm{d}m\right|\leqslant\left|\int_{\mathbf{R}-E_1}f(x)\mathrm{d}m\right|+\left|\int_{E_1-E}f(x)\mathrm{d}m\right|<\varepsilon,$$

故存在自然数 n_1，使 $n>n_1$ 时，有

$$\left|\int_{\mathbf{R}-E}f_n(x)\mathrm{d}m\right|<\varepsilon.$$

令 $g(x)=|f(x)|+1(x\in E)$，因为 $mE<\infty$，所以 g 是 E 上的非负可测函数，必可积，又因为 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，$x\in E$，所以 $\exists n_2$，使 $n>n_2$ 时，$|f_n(x)|\leqslant|f(x)|+1=g(x)(x\in E)$，令 $n_0=\max(n_1,n_2)$，本题结论即成立.

第五章　距离空间·赋范线性空间

§5.1　距离空间

1. 设 X 是距离空间，ρ 是 X 上的距离，试证明对 X 中任意三点 x,y,z 成立

$$|\rho(x,z)-\rho(z,y)|\leqslant\rho(x,y).$$

证　因为 $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$ 以及 $\rho(z,y)\leqslant\rho(z,x)+\rho(x,y)$，所以 $|\rho(x,z)-\rho(z,y)|\leqslant\rho(x,y)$.

2. 证明 $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$ 在实数集上定义了一个距离.

证　$\rho(x,y)\geqslant0,\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$ 以及 $\rho(y,x)=\rho(x,y)$ 显然成立.

$$\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}\leqslant\sqrt{|x-z|+|z-y|}$$
$$\leqslant\sqrt{|x-z|}+\sqrt{|z-y|}=\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

故 $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个距离.

3. 设 (X,ρ) 是任一距离空间，证明由 $\tilde{\rho}(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ 定义了 X 上的另一个距离，而且在距离 $\tilde{\rho}$ 之下，X 是有界的.

证　只需证明三点不等式：$\tilde{\rho}(x,y)\leqslant\tilde{\rho}(x,z)+\tilde{\rho}(z,y)$. 因为 $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$，令 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}=1-\dfrac{1}{1+t}$，$t\geqslant0$ 时，$f(t)$ 单调上升. 所以

$$\tilde{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}\leqslant\frac{\rho(x,z)+\rho(z,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)}$$
$$\leqslant\frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)}+\frac{\rho(z,y)}{1+\rho(z,y)}=\tilde{\rho}(x,z)+\tilde{\rho}(z,y).$$

$\tilde{\rho}(x,y)\leqslant1$ $(\forall x,y\in X)$，因此在距离 $\tilde{\rho}$ 之下，X 是有界的.

4. 设 f 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，对 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，记

$$\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|.$$

试证明 ρ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上距离的充要条件是 f 为严格单调函数.

证　充分性：设 f 为严格单调函数，则可直接验证 $\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|$ 是一个距离.

必要性：设 $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$，则 $x\neq y\Leftrightarrow f(x)\neq f(y)$，故 f 是一对一的. 为了证明 f 的单调性，只要证明 $x<y<z$ 时，或有 $f(x)>f(y)>f(z)$，或有 $f(x)<f(y)<f(z)$ 即可. 若不然，必有 $f(x)>f(y)$，$f(z)>f(y)$ 或者 $f(x)<f(y)$，

$f(z)<f(y)$. 如果第一种情况发生,可不妨设 $f(z)>f(x)$,事实上,若 $f(z)<f(x)$,则 $f(x)>f(z)>f(y)$,由 f 的连续性,存在 $t\in[x,y]$,使 $f(t)=f(z)$,$t\leqslant y<z$,矛盾. 在闭区间$[y,z]$上考察连续函数 f,因为

$$f(z)>f(x)>f(y),$$

必存在 $t\in[y,z]$,使 $f(t)=f(x)$,但 $x<y\leqslant t$,$x\neq t$,矛盾,对另一种情况可作同样的讨论,故 f 是严格单调函数.

5. 设 X 为距离空间,$A\subset X$,证明 A 的一切内点组成的集必为开集.

证 设 $\dot{A}=\{x\in A: x$ 为 A 的内点$\}$,任取 $x\in\dot{A}$,必存在 $\delta>0$,使开球 $S(x,\delta)\subset A$,现证明 $S(x,\delta)\subset\dot{A}$,即证明 $S(x,\delta)$中任一点 $y\in\dot{A}$. 任取 $y\in S(x,\delta)$,令 $\delta_1=\delta-\rho(x,y)>0$,则由三点不等式可得

$$S(y,\delta_1)\subset S(x,\delta)\subset A,$$

故 $y\in\dot{A}$,即 $S(x,\delta)\subset\dot{A}$,$\dot{A}$ 是开集得证.

6. 设 X 为距离空间,$A\subset X$,证明 A'和$\bar{A}$ 都是闭集.

证 任取 $x\in\mathscr{C}A'$,则 $x\overline{\in}A'$,故存在 x 的开球$S(x,\delta)$,使 $S(x,\delta)$中不含 $A-\{x\}$的点,从而 $S(x,\delta)$中任一点不属于 A',故 $x\in S(x,\delta)\subset\mathscr{C}A'$,即 x 为 $\mathscr{C}A'$的内点,$\mathscr{C}A'$为开集,因此 A'为闭集.

对于 $\bar{A}$,因为 $\bar{A}=A\cup A'$,$\mathscr{C}\bar{A}=\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}A'$,任取 $x\in\mathscr{C}\bar{A}$,则 $x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}A'$,故存在 $\delta>0$,使 $S(x,\delta)\cap(A-\{x\})=\varnothing$,于是 $S(x,\delta)\subset\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}A'$,$S(x,\delta)\subset\mathscr{C}\bar{A}$,$\mathscr{C}\bar{A}$ 为开集,故 $\bar{A}$ 为闭集.

7. 设 X 为距离空间,则 X 中的基本列是有界的.

本题结论显然成立.

8. 设$\{x_n\}$是距离空间 X 中的基本列,并且有子序列 $x_{n_k}\to x$,试证明 $x_n\to x$.

证 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,使 $n,m>N$ 时,有

$$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

现设 $x_{n_k}\to x$,可设 $n_k>N$ 时,$\rho(x_{n_k},x)<\varepsilon$,则 $n>N$ 时

$$\rho(x_n,x)\leqslant\rho(x_n,x_{n_k})+\rho(x_{n_k},x)<2\varepsilon,$$

故 $x_n\to x$.

9. 设 X 为距离空间,$A\subset X$,如果 A 按照 X 的距离是完备的距离空间,证明 A 是闭集.

证 设 $x\in\bar{A}$,则存在$\{x_n\}\subset A$,使 $x_n\to x$,显然$\{x_n\}$为 A 中的基本列,因为 A 完备,则 $x_n\to x\in A$,所以 A 是闭集.

10. 设 $f(x)$是距离空间 X 到距离空间 X_1 中的连续映射,A 在 X 中稠密,证明 $f(A)$在 $f(X)$中稠密.

证 任取 $z\in f(X)$,则存在 $x\in X$,使 $z=f(x)$,因为 A 在 X 中稠密,故存在

$x_n \in A$，使 $x_n \to x$，f 连续，$f(x_n) \to f(x)$（在 X_1 中），所以 $\overline{f(A)} = f(X)$.

11. 设 X 为距离空间，$A \subset X$，$\varepsilon > 0$，试证明

(1) $\{x : \rho(x, A) < \varepsilon\}$ 是 X 中的开集；

(2) $\{x : \rho(x, A) \leqslant \varepsilon\}$ 是 X 中的闭集.

证 令 $f(x) = \rho(x, A)$，$x \in X$，则易知 $f(x)$ 是 $X \to [0, +\infty)$ 的连续函数，故 $\{x : \rho(x, A) < \varepsilon\} = f^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ 是开集，$\{x : \rho(x, A) \leqslant \varepsilon\} = f^{-1}([0, \varepsilon])$ 是闭集.

12. 设 X 为距离空间，试证明

(1) X 中的闭集必为可列个开集的交；

(2) X 中的开集必为可列个闭集的并.

证 (1) 设 $F \subset X$ 为闭集，令

$$G_n = \left\{ x \in X : \rho(x, F) < \frac{1}{n} \right\},$$

由上题知每个 G_n 是 X 中的开集，且容易证明 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

(2) 设 $G \subset X$ 为任一开集，令 $F = \mathscr{C}G$，由(1)知，存在开集 G_n，使

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

所以

$$G = \mathscr{C}F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}G_n,$$

其中 $\mathscr{C}G_n$ 为 X 中的闭集.

13. 设 X 为距离空间，F_1, F_2 为 X 中不相交的闭集，证明存在 X 上的连续函数 $f(x)$，使 $x \in F_1$ 时，$f(x) = 0$，$x \in F_2$ 时，$f(x) = 1$.

证 令

$$f(x) = \frac{\rho(x, F_1)}{\rho(x, F_1) + \rho(x, F_2)}.$$

因为 $F_1 \cap F_2 = \varnothing$，则 $x \in F_1$ 时，$f(x) = 0$，$x \in F_2$ 时，$f(x) = 1$，$\rho(x, F_1) + \rho(x, F_2) > 0$，所以 $f(x)$ 连续.

14. 试证明 § 5.1 中例 4 所述的空间 s 是可分的.

证 令 $E_0 = \{(r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, \cdots) : r_1, r_2, \cdots, r_n$ 均有理数，$n \in \mathbf{N}\}$，则易知 E_0 为 s 的可数稠密子集，故 s 可分.

15. 设 X, Y 均为距离空间，映射 $f: X \to Y$ 是一致连续的，$\{x_n\}$ 是 X 中的基本列，证明 $\{f(x_n)\}$ 必为 Y 中的基本列.

证 设 $\{x_n\} \subset X$ 为基本列，则 $\forall \delta > 0$，$\exists N$，使 $n, m > N$ 时，有

$$\rho(x_n, x_m) < \delta,$$

$f(x)$在 X 上一致连续，$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，使 $x, y\in X, \rho(x,y)<\delta$ 时，有

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

因此，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 N，使 $n, m>N$ 时，成立

$$\rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon,$$

即$\{f(x_n)\}$是 Y 中的基本列.

16. 如果在 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$上定义距离

$$\rho(x,y) = |\arctan x - \arctan y|, \qquad x, y \in \mathbf{R}.$$

试问 $\mathbf{R}$ 是完备空间吗?

解 不完备. 取 $x_n = n\in(-\infty,+\infty)$，则 $n, m\to\infty$时

$$\rho(x_n, x_m) = |\arctan x_n - \arctan x_m| \to 0,$$

故$\{x_n\}$是$(-\infty,+\infty)$中的基本列，但显然对任何 $x\in\mathbf{R}$，$\rho(x_n, x) \not\to 0$.

§5.2 赋范线性空间

1. 下列集合中，按通常的线性运算，哪些是线性空间：

(1) 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$ 的数列 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$全体；

(2) 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=1$ 的数列 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$全体.

答 (1) 是线性空间；(2) 不是线性空间.

2. 设线性空间 X 按 ρ 成为距离空间，而且 ρ 满足

$$\rho(x-y, 0) = \rho(x,y), \qquad \rho(\alpha x, 0) = |\alpha|\rho(x,0),$$

其中 $x, y\in X, \alpha\in K$，试证明 X 按照

$$\|x\| = \rho(x,0), \qquad x \in X$$

是一个赋范线性空间.

证 (i) $\|x\|=\rho(x,0)\geqslant 0$，且 $\|x\|=0 \Leftrightarrow \rho(x,0)=0 \Leftrightarrow x=0$.

(ii) $\|\alpha x\| = \rho(\alpha x,0)=|\alpha|\rho(x,0)=|\alpha|\cdot\|x\|$.

(iii) $\|x+y\| = \rho(x+y,0)\leqslant\rho(x+y,y)+\rho(y,0)$,

利用条件 $\rho(x,y)=\rho(x-y,0)$可得 $\rho(x+y,y)=\rho(x,0)$，所以

$$\|x+y\| \leqslant \rho(x,0)+\rho(y,0) = \|x\| + \|y\|,$$

故 X 是赋范线性空间.

3. 证明 l^∞按范数 $\|x\|_\infty=\sup\limits_i|\xi_i|$，$x=(\xi_i)$是完备的.

证 设$\{x^{(n)}\}\subset l^\infty$是一基本列，其中 $x^{(n)}=(\xi_i^{(n)})$，则 $\forall\varepsilon>0, \exists N$，使 $n, m>N$ 时

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_\infty = \sup_i|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \varepsilon,$$

即 $n, m>N$ 时，对 $i=1,2,3,\cdots$，成立

$$|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}=\xi_i$ 存在有限($i=1,2,3,\cdots$),令 $x=(\xi_i)$,我们证明 $x\in l^\infty$,且 $\|x^{(n)}-x\|_\infty\to 0\ (n\to\infty)$. 事实上,因为 $n,m>N$ 时

$$|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|<\varepsilon \qquad (i=1,2,3,\cdots),$$

令 $n>N$ 固定,让 $m\to\infty$,得

$$|\xi_i^{(n)}-\xi_i|\leqslant\varepsilon \qquad (n>N,i=1,2,3,\cdots)$$

所以 $x^{(n)}-x\in l^\infty$,$x\in l^\infty$,且 $\|x^{(n)}-x\|_\infty\to 0(n\to\infty)$.

4. 设 $V[a,b]$表示在$[a,b]$上囿变,右连续函数全体,其线性运算与 $C_{[a,b]}$中相同,在 $V[a,b]$中定义范数

$$\|x\|=|x(a)|+\mathop{V}_a^b(x),$$

则 $V[a,b]$是一个巴拿赫空间.

本题证明见第一篇第七章第 1 题.

5. 设 $B[a,b]$是$[a,b]$上有界函数全体,线性运算与 $C[a,b]$中相同,在 $B[a,b]$中定义范数

$$\|x\|=\sup_{t\in[a,b]}|x(t)|,$$

则 $B[a,b]$是一个巴拿赫空间.

本题证明见第一篇第七章第 2 题.

6. 设 C 为一切收敛数列组成的集合,线性运算与 l^p 中相同,在 C 中定义范数

$$\|x\|=\sup_{i\geqslant 1}|x_i|,$$

其中 $x=(x_i)\in C$,则 C 是可分的巴拿赫空间.

证 C 是一个赋范线性空间显然,只需证明 C 的完备性和可分性.

完备性. 任取$\{x^{(n)}\}\subset C$ 为基本列,其中 $x^{(n)}=(x_i^{(n)})$,则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$,使 $n,m>N$ 时,对一切 $i=1,2,3,\cdots$,有

$$|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i$ 存在有限($i=1,2,3,\cdots$),记 $x=(x_i)$,易知 $n>N$ 时,对一切 $i=1,2,3,\cdots$,有

$$|x_i-x_i^{(n)}|\leqslant\varepsilon.$$

又因为 $x^{(n)}=(x_i^{(n)})\in C$,所以 $\exists N_1$,使 $i>N_1$ 时,对一切 $p\in N$,有

$$|x_{i+p}^{(n)}-x_i^{(n)}|<\varepsilon,$$

故 $i>N_1$ 时

$$\begin{aligned}|x_{i+p}-x_i|&=|x_{i+p}-x_{i+p}^{(n)}|+|x_{i+p}^{(n)}-x_i^{(n)}|+|x_i^{(n)}-x_i|\\&<3\varepsilon.\end{aligned}$$

由此可知$\lim\limits_{i\to\infty}x_i$存在有限，$x=(x_i)\in C$，且

$$\|x^{(n)}-x\|\to 0 \qquad (n\to\infty),$$

故 C 是完备的.

可分性. 令 $E_0=\{(r_1,r_2,\cdots,r_n,r,r,\cdots):r_i,r$ 均为有理数，$i=1,2,\cdots,n$，$n\in\mathbf{N}\}$，则 $E_0\subset C$，且可列，下面证明 E_0 在 C 中稠密.

任取 $x=(x_i)\in C$，则$\lim\limits_{i\to\infty}x_i=\xi$有限，故存在 N 及有理数 r，使 $i>N$ 时

$$|x_i-r|<\varepsilon.$$

对 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 必存在有理数 $r_1,r_2,\cdots,r_N$，使

$$|x_i-r_i|<\varepsilon \qquad (i=1,2,\cdots,N),$$

令 $y=(r_1,r_2,\cdots,r_N,r,r,\cdots)$，则 $y\in E_0$，且

$$\rho(x,y)=\|x-y\|<\varepsilon,$$

故 E_0 在 C 中稠密，C 可分.

7. 设 X 为赋范线性空间，$X\neq\{0\}$，试证明 X 完备的充要条件是单位球面 $S_1=\{x\in X:\|x\|=1\}$完备.

证　必要性：设$\{x_n\}\subset S_1$ 为基本列，因为 X 完备，则

$$x_n\to x\in X,$$

$$\|x\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=1,$$

故 $x\in S_1$，S_1 完备.

充分性：设 S_1 完备，任取 X 中基本列$\{x_n\}$，因为

$$\big|\|x_n\|-\|x_m\|\big|\leqslant\|x_n-x_m\|\to 0 \qquad (n,m\to\infty),$$

所以$\{\|x_n\|\}$为收敛数列，可设$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\alpha>0$，则 n 充分大时 $\|x_n\|\geqslant\dfrac{\alpha}{2}>0$，令 $x'_n=\dfrac{x_n}{\|x_n\|}$，则 $x'_n\in S_1$

$$\|x'_n-x'_m\|=\left\|\frac{\|x_m\|x_n-\|x_n\|x_m}{\|x_n\|\cdot\|x_m\|}\right\|\leqslant\frac{\|x_n-x_m\|}{\|x_n\|}+\frac{\big|\|x_m\|-\|x_n\|\big|}{\|x_n\|}$$

$$\leqslant\frac{2}{\alpha}\big(\|x_n-x_m\|+\big|\|x_m\|-\|x_n\|\big|\big) \qquad (n \text{ 充分大}),$$

故 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|x'_n-x'_m\|=0$，$\{x'_n\}$为 S_1 中的基本列，S_1 完备，必存在 $x'\in S_1$，使 $x'_n\to x'$ $(n\to\infty)$，$x_n=\|x_n\|x'_n\to\alpha x'\in X$，$X$ 完备.

§5.3　紧　　性

1. 证明紧集的闭子集也是紧集.

证法 1　设 A 为紧集，$B\subset A$ 为闭集，因为 A 是紧集$\Leftrightarrow A$ 自列紧，从而 B 是列紧闭集，即 B 为自列紧集，故 B 也是紧集．

证法 2　设$\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$是 B 的任一开覆盖，$\mathscr{C}B$ 是开集，则$\{G_\alpha\}\cup\mathscr{C}B$ 为 A 的一个开覆盖，A 紧，必存在有限开覆盖，不妨设$\left(\bigcup_{i=1}^{n}G_{\alpha_i}\right)\cup\mathscr{C}B\supset A$，则$\bigcup_{i=1}^{n}G_{\alpha_i}\supset B$，所以 B 也是紧集．

2．设 F_1,F_2 是距离空间 X 中的两个紧集，试证明存在 $x_0\in F_1,y_0\in F_2$，使 $\rho(F_1,F_2)=\rho(x_0,y_0)$，其中 $\rho(F_1,F_2)=\inf\{\rho(x,y):x\in F_1,y\in F_2\}$．

证　按照 inf 的定义，必存在 $x_n\in F_1,y_n\in F_2$，使

$$\rho(F_1,F_2)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n).$$

因为 F_1,F_2 为 X 中的紧集，故存在子序列$\{x_{n_k}\}$和$\{y_{n_k}\}$，使

$$x_{n_k}\to x_0\in F_1,\qquad y_{n_k}\to y_0\in F_2,$$

再由 $\rho(x,y)$的连续性，立即得

$$\rho(F_1,F_2)=\rho(x_0,y_0).$$

3．设$\{F_n\}$是紧空间 X 中的一列非空闭集，且

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots,$$

则$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$．

证　设$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\varnothing$，则$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}F_n=X$，$\{G_n\}=\{\mathscr{C}F_n\}$是 X 的一个开覆盖，由 X 的紧性知存在 N，使

$$\bigcup_{i=1}^{N}G_i=X.$$

又因为 $G_n\subset G_{n+1}(\forall n\in N)$，所以 $G_N=X$，这就推出 $F_N=\varnothing$，矛盾，故

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing.$$

注　也可取 $x_n\in F_n-F_{n+1}(\forall n)$，然后证明$\{x_n\}$的一个聚点属于$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$．

4．设 F_1,F_2 是距离空间 X 的两个子集，F_1 是紧集，F_2 是闭集，如果 $\rho(F_1,F_2)=0$，则存在 $x_0\in F_1\cap F_2$．

证　因为 $0=\rho(F_1,F_2)=\inf\{\rho(x,y):x\in F_1,y\in F_2\}$，所以存在 $x_n\in F_1$，$y_n\in F_2$，使

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0.$$

F_1 紧，$\{x_n\}\subset F_1$，则存在子序列 $x_{n_k}\to x_0\in F_1$，又因为

$$\rho(y_{n_k},x_0)\leqslant\rho(y_{n_k},x_{n_k})+\rho(x_{n_k},x_0),$$

则 $y_{n_k}\to x_0\in F_2$，即 $x_0\in F_1\cap F_2$．

5. 设 X 是可分的距离空间，$\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 X 的一个开覆盖，则从 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 中可取出可列个集组成 X 的一个覆盖.

证 设 $\{x_k\}$ 为 X 的一个可数稠密子集，$\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha\supset X$，$\forall\, x\in X$，必存在某个 G_α，使 $x\in G_\alpha$，G_α 为开集，则存在 $\varepsilon>0$，使 $S(x,\varepsilon)\subset G_\alpha$，又 $\overline{\{x_k\}}=X$，则存在 x_k 使

$$\rho(x,x_k)<\frac{\varepsilon}{4}.$$

取有理数 r，满足 $\frac{\varepsilon}{4}<r<\frac{\varepsilon}{2}$，易知

$$x\in S(x_k,r)\subset S(x,\varepsilon)\subset G_\alpha.$$

因为 $\{S(x_k,r):k=1,2,3,\cdots,r$ 为有理数$\}$ 至多可列，$x\in X$ 是任取的，故可取出至多可列个开球 $\{S(x_k,r)\}$ 覆盖 X，其中 $S(x_k,r)\subset$ 某个 G_{α_k}，从而 $\bigcup_{k=1}^{\infty}G_{\alpha_k}\supset X$.

6. 试证明定义在紧空间上的连续函数必是一致连续的.

证 设 X 为紧空间，$f(x)$ 定义在 X 上连续，任取 $\varepsilon>0$，对某个 $x\in X$，存在 $\delta_x>0$，使得当 $y\in S(x,\delta_x)$ 时，有

$$|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

显然 $\bigcup_{x\in X}S\left(x,\frac{\delta_x}{2}\right)=X$，$X$ 紧，必存在有限个点 $x_1,x_2,\cdots,x_{n_0}$，使

$$\bigcup_{i=1}^{n_0}S\left(x_i,\frac{\delta_{x_i}}{2}\right)=X.$$

令 $\delta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n_0}\frac{\delta_{x_i}}{2}$，则当 $\rho(x',x'')<\delta$ 时 $\left(\text{不妨设 } x''\in S\left(x_{i_0},\frac{\delta_{x_{i_0}}}{2}\right)\right)$，有

$$\rho(x',x_{i_0})\leqslant\rho(x',x'')+\rho(x'',x_{i_0})<\delta_{x_{i_0}},$$

故

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant\left|f(x')-f(x_{i_0})\right|+\left|f(x_{i_0})-f(x'')\right|<\varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 是一致连续的.

7. 证明全有界集一致连续映射下的像是全有界的.

证 设 A 全有界，$f:A\to Y$ 一致连续，我们证明 $f(A)$ 全有界. $\forall\,\varepsilon>0$，取 $\delta>0$，使 $x,y\in A$，$\rho(x,y)<\delta$ 时，有

$$\rho(f(y),f(x))<\varepsilon.$$

设 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是 A 的有穷 δ-网，易知 $\{f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)\}$ 是 $f(A)$ 的有穷 ε-网，故 $f(A)$ 是全有界的.

8. 证明 s 空间中的子集 A 列紧的充要条件是对每个自然数 n，存在 $C_n>0$，使得对一切 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in A$，有

$$|\xi_n| \leqslant C_n \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

证　必要性：

证法 1　设 $A \subset s$ 列紧，则 A 必全有界，对任一 $n \in \mathbf{N}$，存在 A 的 $\frac{1}{2^{n+1}}$-网 $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n_0)}\}$，其中

$$x^{(i)} = (\xi_n^{(i)}) \qquad (i=1,2,\cdots,n_0),$$

令 $M_n = \max\{|\xi_n^{(1)}|, |\xi_n^{(2)}|, \cdots, |\xi_n^{(n_0)}|\}$，$C_n = 1 + M_n$，则 $\forall x \in A$，$\exists x^{(i)} (1 \leqslant i \leqslant n_0)$，使 $\rho(x, x^{(i)}) < \frac{1}{2^{n+1}}$

$$\frac{1}{2^n}\frac{|\xi_n - \xi_n^{(i)}|}{1 + |\xi_n - \xi_n^{(i)}|} \leqslant \rho(x, x^{(i)}) < \frac{1}{2^{n+1}},$$

所以 $|\xi_n - \xi_n^{(i)}| < \frac{1}{2}(1 + |\xi_n - \xi_n^{(i)}|)$，$|\xi_n - \xi_n^{(i)}| < 1$，于是

$$|\xi_n| \leqslant |\xi_n - \xi_n^{(i)}| + |\xi_n^{(i)}| < 1 + M_n = C_n.$$

证法 2　定义映射 $\varphi_n: s \to \mathbf{R}$，$x = (\xi_n) \in s$，$\varphi_n(x) = \xi_n$，显然 φ_n 是 s 上的连续映射，A 列紧，则 $\varphi_n(A)$ 必列紧，从而 $\varphi_n(A)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的有界集．于是对每一个 $n \in \mathbf{N}$，必存在 $C_n > 0$，使 $|\xi_n| \leqslant C_n \quad (\forall (\xi_n) \in A)$．

充分性：

证法 1　设条件成立．任取 $\{x^{(k)}\} \subset A$，其中 $x^{(k)} = (\xi_n^{(k)})$．则

$$|\xi_n^{(k)}| \leqslant C_n \qquad (\forall k).$$

按对角线手法，必可取出子序列 $\{n_k\}$，使

$$\xi_n^{(n_k)} \to \xi_n \quad (n_k \to \infty) \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

则 $x^{(n_k)} \to x = (\xi_n) \in s$，列紧得证．

证法 2　因 s 完备，故只须证明对任给的 $\varepsilon > 0$，A 存在列紧 ε-网．$\forall \varepsilon > 0$，存在 N，使 $m > N$ 时，有

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

令

$$B = \{(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N, 0, 0, \cdots) : (\xi_n) \in A\},$$

显然 B 是 A 的 ε-网．又 B 中之点只有前面 N 个坐标不为 0，且

$$|\xi_n| \leqslant C_n \qquad (n=1,2,\cdots,N),$$

则容易证明 B 是列紧集．

9. 设 X 为全有界的距离空间，$M \subset X$ 为无穷子集，证明对任给的 $\varepsilon > 0$，M 中必存在一个无穷子集 M_0，使 M_0 的直径小于 ε．

证 $\forall \varepsilon>0$，X 必存在有穷 $\frac{\varepsilon}{2}$-网 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{n_0}\}$，$M\subset X$，则

$$\bigcup_{i=1}^{n_0} S\left(x_i,\frac{\varepsilon}{2}\right)\supset M.$$

因为 M 为无穷子集，故必存在一个 $i_0(1\leqslant i_0\leqslant x_0)$，使

$$M_0 = M\cap S\left(x_{i_0},\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

为无穷子集，易知 M_0 的直径 $d(M_0)=\sup\{\rho(x,y):x,y\in M_0\}<\varepsilon$.

10. 设 X 为赋范线性空间，A 是 X 中的有界集，证明 A 是全有界的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$，必有 X 的有限维子空间 X_ε，使 A 中每点与 X_ε 的距离都小于 ε.

证 必要性：设 A 为全有界集，则 $\forall \varepsilon>0$，存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in A$，使

$$\bigcup_{i=1}^{n} S(x_i,\varepsilon)\supset A.$$

记

$$X_\varepsilon = \operatorname{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},$$

则 X_ε 是有穷维空间，且 $x\in A$ 时

$$\rho(x,X_\varepsilon)\leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n}\rho(x,x_i)<\varepsilon.$$

充分性：设对任何 $\varepsilon>0$，存在有限维子空间 $X_{\frac{\varepsilon}{2}}$，使得 $x\in A$ 时

$$\rho(x,X_{\frac{\varepsilon}{2}})<\frac{\varepsilon}{2}.$$

记

$$B=\left\{y:y\in X_{\frac{\varepsilon}{2}},\text{存在 } x\in A,\text{使 } \rho(x,y)<\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

因为 A 有界，所以 B 是 $X_{\frac{\varepsilon}{2}}$ 中的有界集，从而列紧. 设 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}\subset B$ 是 B 的 $\frac{\varepsilon}{2}$-网，今证它是 A 的 ε-网. 事实上，$\forall x\in A$，存在 $y\in X_{\frac{\varepsilon}{2}}$，使

$$\rho(x,y)<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而 $y\in B$，于是存在 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，使

$$\rho(y,y_i)<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$\rho(x,y_i)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,y_i)<\varepsilon.$$

§5.4 压缩映射原理及其应用

1. 用迭代法求方程 $x^3+x-1=0$ 在 $[0,1]$ 中的实根，并估计近似解的误差.

$\left(\text{提示:原方程等价于方程 } x=\frac{1}{4}(1+3x-x^3)\right)$.

解 令 $g(x)=\frac{1}{4}(1+3x-x^3)$, $x\in[0,1]$,易知 g 是$[0,1]\to[0,1]$的映射,且 $0\leqslant g'(x)=\frac{3}{4}(1-x^2)\leqslant\frac{3}{4}$, $x\in[0,1]$,故 g 是$[0,1]\to[0,1]$的压缩映射,因此存在惟一的 $\xi\in[0,1]$,使 $g(\xi)=\xi$,即

$$\xi^3+\xi-1=0.$$

取 $x_0=0$, $x_1=g(x_0)=\frac{1}{4}$, $\cdots$, $x_{n+1}=\frac{1}{4}(1+3x_n-x_n^3)$, $\cdots$,则 $x_n\to\xi$,且

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}|x_1-x_0|=\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

2. 如果 $X=\mathbf{R}^n$, X 中的距离是欧几里得距离 ρ_2

$$\rho_2(x,z)=\left(\sum_{i=1}^n|x_i-z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

试证明例 2 中的线性方程 $x=Cx+b\cdots(4.11)$在条件

$$\sum_{i,j=1}^n|C_{ij}|^2<1\qquad(\text{其中矩阵 } C=(c_{ij})_{n\times n})$$

之下,迭代序列 $x^{(m+1)}=Cx^{(m)}+b\quad(m=0,1,2,\cdots)$收敛于方程(4.11)的惟一解.

证 令 $T:X\to X$ 如下:$y=Tx=Cx+b$,其中

$$y_i=\sum_{j=1}^n C_{ij}x_j+b_i\qquad(i=1,2,\cdots,n),$$

$$\begin{aligned}\rho(Tx,Tz)&=\left(\sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=1}^n C_{ij}(x_j-z_j)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n|C_{ij}|^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^n|x_j-z_j|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\sum_{i,j=1}^n|C_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\rho(x,z).\end{aligned}$$

因此,当 $\theta=\sum_{i,j=1}^n|C_{ij}|^2<1$ 时,T 是压缩映射,迭代序列

$$x^{(m+1)}=Tx^{(m)}=Cx^{(m)}+b$$

必收敛于方程(4.11)的惟一解.

3. 如果条件$\sup_j\sum_{i=1}^\infty|a_{ij}|<1$ 成立,试证明无穷代数方程组

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i \qquad (i = 1,2,3,\cdots)$$

对任意的序列 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots)\in l^1$,必有惟一解 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^1$.

证 令 $X=l^1$,$T:X\to X$,$y=Tx$,其中

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i \qquad (i = 1,2,3,\cdots).$$

因为

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|\cdot|x_j|\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|\right)\cdot|x_j|$$
$$\leqslant \sup_j\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|\right)\cdot\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|,$$

所以 $(y_i)\in l^1$,即 $T:X\to X$ 的映射,且易证

$$\rho(Tx,Tz) \leqslant \left(\sup_j\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|\right)\cdot\sum_{j=1}^{\infty}|x_j - z_j|.$$

因此,当 $\theta=\sup\limits_j\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|<1$ 时,T 是 $l^1\to l^1$ 的压缩映射,必有惟一不动点 $x=(x_i)\in l^1$,即无穷方程

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i \qquad (i = 1,2,3,\cdots)$$

对任一 $b=(b_i)\in l^1$,有惟一解 $x=(x_i)\in l^1$.

4. 设 T 为完备距离空间 X 到 X 的映射,如果

$$\alpha_0 = \inf_n\sup_{x\neq y}\frac{\rho(T^nx,T^ny)}{\rho(x,y)} < 1,$$

证明 T 必有惟一不动点.

证 令 $\alpha_n=\sup\limits_{x\neq y}\dfrac{\rho(T^nx,T^ny)}{\rho(x,y)}$,则

$$\alpha_0 = \inf_n\alpha_n < 1.$$

故存在 n_0,使 $0\leqslant\alpha_{n_0}<1$,令 $\theta=\alpha_{n_0}$,就有

$$\rho(T^{n_0}x,T^{n_0}y)\leqslant\theta\rho(x,y)(\forall x,y\in X),$$

按照定理 4.2,T 必存在惟一的不动点.

5. 设

$$K(t,s) = \begin{cases} t, & 0\leqslant t\leqslant s, \\ s, & s\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

试证明积分方程

$$x(t)=1+\frac{1}{10}\int_0^1 K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

在 $C[0,1]$中有惟一解，并求出使其误差不超过 10^{-3}的近似解.

证 $K(t,s)$在正方形区域$[0,1]\times[0,1]$上连续，作映射 $T:C[0,1]\to C[0,1]$如下

$$T\varphi(t)=1+\frac{1}{10}\int_0^1 K(t,s)\varphi(s)\mathrm{d}s,\qquad \varphi(s)\in C[0,1].$$

则

$$\begin{aligned}\|T\varphi_1-T\varphi_2\|&=\max_{t\in[0,1]}\frac{1}{10}\left|\int_0^1 K(t,s)(\varphi_1(s)-\varphi_2(s))\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant\frac{1}{10}\max_t\left|\int_0^1 K(t,s)\mathrm{d}s\right|\cdot\|\varphi_1-\varphi_2\|.\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}0\leqslant\int_0^1 K(t,s)\mathrm{d}s&=\int_0^t s\mathrm{d}s+\int_t^1 t\mathrm{d}s=t-\frac{t^2}{2}\\&\leqslant\frac{1}{2},\qquad t\in[0,1].\end{aligned}$$

所以

$$\|T\varphi_1-T\varphi_2\|\leqslant\frac{1}{20}\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

故 T 在$C[0,1]$中必有惟一不动点 φ，取 $\varphi_0=0,\varphi_n=T^n\varphi_0$，则

$$\|\varphi_n-\varphi\|\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|\varphi_1-\varphi_0\|,$$

其中 $\alpha=\frac{1}{20}$. 因为 $\varphi_1=1$，故 $\|\varphi_1-\varphi_0\|=1$，于是，为了使 $\|\varphi_n-\varphi\|<10^{-3}$，只要 $\frac{\alpha^n}{1-\alpha}<10^{-3}$即可. 为此，取 $n=3,\varphi_0=0,\varphi_1=1$

$$\begin{aligned}\varphi_2(t)&=T\varphi_1=1+\frac{1}{10}\int_0^1 K(t,s)\mathrm{d}s=1+\frac{1}{10}\left(t-\frac{t^2}{2}\right),\\ \varphi_3(t)&=T\varphi_2(t)=1+\frac{1}{10}\int_0^1 K(t,s)\left[1+\frac{1}{10}\left(s-\frac{s^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}s\\&=1+\frac{1}{10}\left(t-\frac{t^2}{2}\right)+\frac{1}{10^2}\left(\frac{t}{3}-\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}\right).\end{aligned}$$

6. 设 T 是完备距离空间 $X\to X$ 的映射，如果存 x_0 的某一个开球 $S(x_0,r)$，使 T 在 $S(x_0,r)$上是压缩映射，即对一切 $x,y\in S(x_0,r)$

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant\theta\rho(x,y),\qquad 0\leqslant\theta<1.$$

试证明在条件 $\rho(x_0,Tx_0)<(1-\theta)r$ 之下，T 在 $S(x_0,r)$中存在惟一不动点.

证 令 $x_1=Tx_0$，因为 $\rho(x_0,x_1)<(1-\theta)r$，则存在 $0<r_1<r$，使

$$\rho(x_0,x_1)=(1-\theta)r_1.$$

$x_1\in S(x_0,r)$，现设 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 都在球 $S(x_0,r)$ 内，由于

$$\rho(x_2,x_1)\leqslant\theta\rho(x_1,x_0)\leqslant\theta(1-\theta)r_1,$$

$$\rho(x_3,x_2)\leqslant\theta\rho(x_2,x_1)\leqslant\theta^2(1-\theta)r_1,$$

$$\vdots$$

$$\rho(x_n,x_{n-1})=\rho(Tx_{n-1},Tx_{n-2})\leqslant\cdots\leqslant\theta^{n-1}(1-\theta)r_1,$$

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x_0)&\leqslant\rho(Tx_{n-1},Tx_{n-2})+\rho(Tx_{n-2},Tx_{n-3})+\cdots+\rho(x_1,x_0)\\&\leqslant(\theta^{n-1}+\theta^{n-2}+\cdots+\theta+1)(1-\theta)r_1\\&=(1-\theta^n)r_1\leqslant r_1.\end{aligned}$$

即 $x_n\in\bar S(x_0,r_1)$，其中 $\bar S(x_0,r_1)=\{x:\rho(x,x_0)\leqslant r_1\}$. 因此对一切 n，$x_n=T^nx_0\in\bar S(x_0,r_1)\subset S(x_0,r)$.

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x_{n+p})&\leqslant(\theta^n+\theta^{n+1}+\cdots+\theta^{n+p-1})\rho(x_0,x_1)\\&=\frac{\theta^n(1-\theta^p)}{1-\theta}(1-\theta)r_1=\theta^n(1-\theta^p)r_1.\end{aligned}$$

这就证明了 $\{x_n\}\subset\bar S(x_0,r_1)$ 是一基本列，故 $x_n\to x^*\in\bar S(x_0,r_1)$. 再利用 T 在 $S(x_0,r)$ 内是连续的，则可得 $x^*=Tx^*$.

T 在 $S(x_0,r)$ 内不动点的惟一性. 设 $y^*\in S(x_0,r)$，$Ty^*=y^*$，则

$$\rho(x^*,y^*)=\rho(Tx^*,Ty^*)\leqslant\theta\rho(x^*,y^*),$$

所以 $\rho(x^*,y^*)=0$，$x^*=y^*$.

§5.5 内积空间

1. 设 X 为内积空间，$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 X 中的元素，而且满足

$$(e_i,e_j)=\begin{cases}0,&\text{当 } i\neq j,\\1,&\text{当 } i=j.\end{cases}$$

试证 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关.

证 设 $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n=0$，则对每个 j $(1\leqslant j\leqslant n)$ 有

$$\alpha_j=(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n,e_j)=0,$$

所以 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 必线性无关.

2. 设 $\{x_n\}$ 是内积空间 X 中的一列点，且对一切 $y\in X$ 有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y)=(x,y),$$

试证明若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

证 因为

$$\|x_n - x\|^2 = (x_n - x, x_n - x)$$
$$= \|x_n\|^2 - (x_n, x) - (x, x_n) + \|x\|^2,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 = 0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

3. 设 X 是实内积空间，x, y 为 X 中的非零元素，试证明 $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ 的充要条件是存在 $\lambda>0$，使 $y=\lambda x$.

证 充分性：设存在 $\lambda>0$，使 $y=\lambda x$，则

$$\|x+y\| = \|(1+\lambda)x\| = (1+\lambda)\|x\| = \|x\| + \|y\|.$$

必要性：设 $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$，则

$$\|x+y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\|.$$

另一方面

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y).$$

所以

$$(x,y) = \|x\| \cdot \|y\|.$$

又因为

$$(y-\lambda x, y-\lambda x) = \lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2,$$

上式右端是关于 λ 的二次三项式，其中 $\Delta = 4\|x\|^2\|y\|^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 = 0$. 因此

$$(y-\lambda x, y-\lambda x) = 0$$

有解 $\lambda = \dfrac{\|y\|}{\|x\|} > 0$，即存在 $\lambda = \dfrac{\|y\|}{\|x\|} > 0$，使 $y=\lambda x$.

4. 设 $H_1, H_2, \cdots, H_n, \cdots$ 是一列内积空间，令

$$H = \left\{\{x_n\} : x_n \in H_n, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty\right\},$$

当 $\{x_n\}, \{y_n\} \in H$ 时，规定 $\alpha\{x_n\} + \beta\{y_n\} = \{\alpha x_n + \beta y_n\}$，其中 $\alpha, \beta \in K$，内积定义如下

$$(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n).$$

证明 H 是一内积空间，又当每个 H_n 都是希尔伯特空间时，H 也是希尔伯特空间.

证 对 $\{x_n\}, \{y_n\} \in H$，有

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| \cdot \|y_n\| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

所以 $(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)$ 是有意义的，容易验证按这个内积的定义 H 是一

个内积空间.

现设每个 H_n 是希尔伯特空间,我们证明 H 也是希尔伯特空间.设 $\{x^{(i)}\}$ 是 H 中的基本列,其中 $x^{(i)}=\{x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_n^{(i)},\cdots\}$,则 $\forall\varepsilon>0$,存在 i_0,使 $i,j\geqslant i_0$ 时

$$\|x^{(i)}-x^{(j)}\|<\varepsilon,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^{(i)}-x_n^{(j)}\|^2<\varepsilon^2.$$

从而对每一个 n,$\{x_n^{(i)}\}$ 是 H_n 中的基本列,设 $\lim\limits_{i\to\infty}x_n^{(i)}=x_n^{(0)}\ (n=1,2,3,\cdots)$,记 $x=\{x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},\cdots\}$,证明 $x\in H$,且 $\|x^{(i)}-x\|\to 0\quad(i\to\infty)$.因为对任意的自然数 k,当 $i,j\geqslant i_0$ 时

$$\sum_{n=1}^{k}\|x_n^{(i)}-x_n^{(j)}\|^2<\varepsilon^2.$$

令 $j\to\infty$,则当 $i\geqslant i_0$ 时

$$\sum_{n=1}^{k}\|x_n^{(i)}-x_n^{(0)}\|^2\leqslant\varepsilon^2,$$

再令 $k\to\infty$,得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^{(i)}-x_n^{(0)}\|^2\leqslant\varepsilon^2\qquad(i\geqslant i_0).$$

于是 $x=x^{(i)}-(x^{(i)}-x)\in H$,且 $\lim\limits_{i\to\infty}\|x^{(i)}-x\|=0$,故 H 也是希尔伯特空间.

5. 证明内积空间中 $x\perp y$ 的充要条件是对一切数 α,都有

$$\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|.$$

证 必要性:设 $x\perp y$,则

$$\|x+\alpha y\|^2=\|x\|^2+|\alpha|^2\|y\|^2=\|x\|^2+|-\alpha|^2\cdot\|y\|^2$$
$$=\|x-\alpha y\|^2,$$

所以 $\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$.

充分性:由 $\|x+\alpha y\|^2=\|x-\alpha y\|^2$ 可得

$$\mathrm{Re}\alpha(x,y)=0.$$

取 $\alpha=(x,y)$,则得

$$|(x,y)|=0,$$

故 $x\perp y$.

6. 设 M,N 是内积空间 X 的子集,$M\subset N$,证明 $N^{\perp}\subset M^{\perp}$,$M^{\perp}=\overline{M}^{\perp}$.

证 (1) 因为 $M^{\perp}=\{x:(x,y)=0,\forall y\in M\}$,$M\subset N$,则当 $x\in N^{\perp}$ 时,对一切 $y\in N$,有 $(x,y)=0$,所以 $\forall y\in M$,$(x,y)=0$,即 $x\in M^{\perp}$

$$N^{\perp} \subset M^{\perp}.$$

(2) 因为 $M \subset \overline{M}$，所以 $\overline{M}^{\perp} \subset M^{\perp}$，反之，设 $x \in M^{\perp}$，则 $\forall\, y \in M$，有 $(x,y)=0$，任取 $z \in \overline{M}$，存在 $\{y_n\} \subset M$，使 $y_n \to z \quad (n \to \infty)$

$$(x,z) = \lim_{n\to\infty}(x,y_n) = 0,$$

所以 $x \in \overline{M}^{\perp}$，$M^{\perp} \subset \overline{M}^{\perp}$，故 $M^{\perp} = \overline{M}^{\perp}$.

7. 设 M 是完备内积空间 X 的子空间，证明 $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$.

证 首先 $\overline{M} \subset (M^{\perp})^{\perp}$ 显然成立，反之，$x \in (M^{\perp})^{\perp}$ 时，分解

$$x = y + z, \qquad 其中\ y \in \overline{M}, z \in (\overline{M})^{\perp} = M^{\perp},$$

则

$$0 = (x,z) = (z,z),$$

故 $x = y \in \overline{M}$，即 $(M^{\perp})^{\perp} \subset \overline{M}$，从而 $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$.

8. 设 L_1, L_2 是希尔伯特空间 H 的两个直交的子空间，$L = L_1 \oplus L_2$，证明 L 是闭子空间的充要条件是 L_1, L_2 均为闭子空间.

证 必要性：设 L 为闭子空间，$\{x_n\} \subset L_1$，$x_n \to x \quad (n \to \infty)$，则 $x \in L$，且对一切 $y \in L_2$，有

$$(x,y) = \lim_{n\to\infty}(x_n,y) = 0,$$

所以 $x \in L_2^{\perp}$. 因为 $L = L_1 \oplus L_2$，$x \in L$，且 $x \in L_2^{\perp}$，则

$$x = x_1 + x_2, \qquad 其中\ x_1 \in L_1, x_2 \in L_2,$$

$$0 = (x,x_2) = (x_2,x_2),$$

所以 $x = x_1 \in L_1$，L_1 为闭子空间，同理可证 L_2 为闭子空间.

充分性：设 L_1, L_2 均为闭子空间，$\{x^{(n)}\} \subset L$，$x^{(n)} \to x \ (n \to \infty)$，令 $x^{(n)} = x_1^{(n)} + x_2^{(n)}$，其中 $x_1^{(n)} \in L_1$，$x_2^{(n)} \in L_2$，$x \in L$，由直交分解定理

$$x = x_1 + x_2, \qquad 其中\ x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_1^{\perp}.$$

因为

$$\| x_i^{(n)} - x_i \|^2 \leqslant \| x^{(n)} - x \|^2 \qquad (i = 1,2),$$

所以 $x_1^{(n)} \to x_1$，$x_2^{(n)} \to x_2$，L_1, L_2 均闭，故 $x_1 \in L_1$，$x_2 \in L_2$，$x = x_1 + x_2 \in L$，L 闭性得证.

9. 设 M 为希尔伯特空间 H 的凸子集，试证明对任一 $x \in H$，存在 $x_0 \in M$，使 $\| x - x_0 \| = \rho(x,M) = \inf\limits_{y \in M} \| x - y \|$ 的充要条件是 M 为闭集.

证 必要性：设对任一 $x \in H$，存在 $x_0 \in M$，使

$$\| x - x_0 \| = \rho(x,M).$$

任取 $x \in \overline{M}$，则存在 $x_n \in M$，使 $x_n \to x$，则

$$\rho(x,M) \leqslant \| x - x_n \| \to 0,$$

所以 $\rho(x,M)=0$,由条件存在 $x_0\in M$,使 $\|x-x_0\|=0$,故 $x=x_0\in M$,M 是闭凸集.

充分性:设 M 为闭凸集,令 $x_n\in M$,使

$$\lim_{n\to\infty}\|x-x_n\|=\rho(x,M)=\alpha.$$

因为 M 为凸集,则 $\dfrac{x_m+x_n}{2}\in M$

$$\left\|x-\frac{x_m+x_n}{2}\right\|\geqslant\alpha.$$

应用中线公式

$$\begin{aligned}\|x_m-x_n\|^2&=\|x_m-x+x-x_n\|^2\\&=2\|x_m-x\|^2+2\|x-x_n\|^2-4\left\|x-\frac{x_m+x_n}{2}\right\|^2\\&\leqslant 2\|x_m-x\|^2+2\|x_n-x\|^2-4\alpha^2.\end{aligned}$$

故 $m,n\to\infty$ 时,$\|x_m-x_n\|\to0$,$\{x_n\}$为完备空间 H 中的基本列,M 闭,$\{x_n\}\subset M$,所以 $x_n\to x_0\in M$

$$\|x-x_0\|=\lim_{n\to\infty}\|x-x_n\|=\rho(x,M).$$

10. 设 $C_{[-1,1]}$是实值连续函数空间,定义内积

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x,\qquad f,g\in C_{[-1,1]}.$$

若记 M 为$C_{[-1,1]}$中奇函数全体,N 为$C_{[-1,1]}$中偶函数全体,证明

$$C_{[-1,1]}=M\oplus N.$$

证 设 $f\in M,g\in N$,则

$$\begin{aligned}(f,g)&=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(-f(-x)\cdot g(-x))\mathrm{d}x\\&=\int_{1}^{-1}f(x)g(x)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x=-(f,g),\end{aligned}$$

从而$(f,g)=0$,$M\perp N$.

任取 $f\in C_{[-1,1]}$,令

$$f_1(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x)),\ f_2(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x)),$$

则有 $f_1\in N$,$f_2\in M$,$f=f_1+f_2$,故

$$C_{[-1,1]}=M\oplus N.$$

11. 试证明可分内积空间中的标准直交系至多是可列的.

证 设$\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$H$ 中的标准直交系,则

$$(e_\alpha,e_\beta)=\begin{cases}0, & \alpha\neq\beta,\\1, & \alpha=\beta.\end{cases}$$

且 $\alpha\neq\beta$ 时，$\|e_\alpha-e_\beta\|=\sqrt{2}$，因为 H 可分，设 $\{x_n\}$ 为 H 的可数稠子集，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}S\left(x_n,\frac{1}{2}\right)\supset H,$$

其中 $S\left(x_n,\frac{1}{2}\right)=\{x:\|x_n-x\|<\frac{1}{2}\}$. 若 $\{e_\alpha\}$ 不可数，则至少有两个不同的元素 e_α,e_β 同属于一个开球 $S\left(x_n,\frac{1}{2}\right)$，于是

$$\sqrt{2}=\|e_\alpha-e_\beta\|\leqslant\|e_\alpha-x_n\|+\|x_n-e_\beta\|<1,$$

矛盾，故 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 至多可列.

12. 设 $\{\varphi_n\}$ 为实 $L^2[a,b]$ 中的完备标准直交系，$\{w_n\}$ 为 $L^2[a,b]$ 中的一个标准直交系，试证明 $\{w_n\}$ 完备的充要条件是对每一个 φ_i $(i=1,2,\cdots)$ 均有

$$\|\varphi_i\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_i,w_n)^2.$$

证　必要性显然.

充分性：令 L 为 $\{\varphi_i\}$ 张成的子空间，因为 $\{\varphi_i\}$ 是 $L^2[a,b]$ 中的完备系，所以 $\overline{L}=L^2[a,b]$，$x\in L$ 时，$x=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi_i$，由条件

$$\|\varphi_i\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_i,w_n)^2$$

知

$$\varphi_i=\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_i,w_n)w_n,$$

则

$$\begin{aligned}x=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi_i&=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_i\varphi_i,w_n)w_n\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i\varphi_i,w_n)\right)w_n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(x,w_n)w_n,\end{aligned}$$

所以

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,w_n)|^2.$$

$\overline{L}=L^2[a,b]$，按照本节定理 5.6 立即知 $\{w_n\}$ 是完备的.

第五章 复习题与解答

1. 设 X 为距离空间，F_1,F_2 为 X 中不相交的闭集，证明存在开集 G_1,G_2，使 $G_1\cap G_2=\varnothing$，$G_1\supset F_1$，$G_2\supset F_2$.

证法 1 利用§5.1 习题 13，令

$$f(x)=\frac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)},$$

则 $f(x)$连续，且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，$x\in F_1$ 时，$f(x)=0$，$x\in F_2$ 时，$f(x)=1$. 再令

$$G_1=\left\{x\in X:f(x)<\frac{1}{2}\right\},\quad G_2=\left\{x\in X:f(x)>\frac{1}{2}\right\},$$

则 G_1,G_2 均为开集，$G_1\cap G_2=\varnothing$，$G_1\supset F_1$，$G_2\supset F_2$ 显然成立.

证法 2 任取 $x\in F_1$，则 $d(x)=\rho(x,F_2)>0$，作开集

$$G_1=\bigcup_{x\in F_1}S\left(x,\frac{1}{2}d(x)\right).$$

同理可作开集 $G_2=\bigcup\limits_{y\in F_2}S\left(y,\frac{1}{2}d(y)\right)$. 显然 $G_1\supset F_1$，$G_2\supset F_2$，下面证明 $G_1\cap G_2=\varnothing$. 设不然，若存在一点 $a\in G_1\cap G_2$，则必存在 $x_0\in F_1$，$y_0\in F_2$，使

$$a\in S\left(x_0,\frac{1}{2}d(x_0)\right)\cap S\left(y_0,\frac{1}{2}d(y_0)\right).$$

不妨设 $d(x_0)\geqslant d(y_0)$

$$\begin{aligned}d(x_0)&=\rho(x_0,F_2)\leqslant\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_0,a)+\rho(a,y_0)\\&<\frac{1}{2}d(x_0)+\frac{1}{2}d(y_0)\leqslant d(x_0),\end{aligned}$$

矛盾，故 $G_1\cap G_2=\varnothing$.

2. 设 X 是完备的距离空间，$\{F_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$为 X 中的一列闭集，满足条件 $F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$，且 $F_n\neq\varnothing$ $(n=1,2,3,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}d(F_n)=0$ （$d(F_n)$ 表示 F_n 的直径，即 F_n 中任意两点距离的上确界），则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$.

证 不妨设 $F_n\supsetneqq F_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，则可取 $x_n\in F_n-F_{n+1}$，$(n=1,2,3,\cdots)$，因为当 $n>m$ 时，$x_n,x_m\in F_m$，所以 $n>m$ 时

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant d(F_m),$$

据条件 $d(F_m)\to 0$ $(m\to\infty)$，知$\{x_n\}$为完备空间 X 中的基本列，故存在 $x\in X$，使 $x_n\to x$. 我们证明 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$. 事实上，对任一自然数 m，当 $n>m$ 时，$x_n\in F_m$，F_m 为闭集，故 $x\in F_m$ $(\forall\, m)$，即 $x\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}F_m$.

3. 设 X 是完备的距离空间，$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，其中每个 F_n 是 X 中的闭集，证明至少有一个 F_n 包含某个开球.

证 因为 X 完备，$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，据贝尔纲定理，$X$ 是第二纲集，故存在 k，使 F_k 不是疏朗集，从而存在开球 $S(a,r)$，使 $\overline{F}_k\supset S(a,r)$，$F_k$ 闭，因此至少有一个 F_k，使 $F_k\supset S(a,r)$.

4. 设 X 为巴拿赫空间，$A\subset X$ 为闭子集，$B\subset X$ 为紧子集，试证明 $A+B=\{x+y:x\in A,y\in B\}$ 是闭的.

证 设 $x_n+y_n\in A+B$，$x_n+y_n\to z\quad(n\to\infty)$，其中 $x_n\in A$，$y_n\in B$，因为 B 紧，可设 $y_n\to y_0\in B$，则

$$x_n=(x_n+y_n)-y_n\to z-y_0\in A.$$

令 $x_0=z-y_0$，则 $z=x_0+y_0$，其中 $x_0\in A$，$y_0\in B$，所以 $A+B$ 是闭的.

5. 设 X 为完备的赋范线性空间，$\{x_n\}\subset X$，f 是 $(0,+\infty)$ 上单调减少的可积函数，且有

$$\|x_n\|\leqslant f(n),\qquad n=1,2,3,\cdots,$$

证明 $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}x_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 在 X 中收敛.

证 由 f 单调下降性

$$\sum_{n=0}^{\infty}f(n+1)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<\infty,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛，再据条件 $\|x_n\|\leqslant f(n)$，$n=1,2,3,\cdots$ 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ 收敛，因为

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+p}x_k-\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\|x_k\|,$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ 收敛，所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ 为 X 中的基本列，X 完备，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.

6. 设 (X_1,ρ_1) 是距离空间，(X_2,ρ_2) 是紧距离空间，在 $X_1\times X_2$ 上规定

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\max(\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2)).$$

又设 f 是 X_1 到 X_2 的映射，试证明 f 是连续映射的充要条件是

$$G(f)=\{(x,f(x)):x\in X_1\}$$

是 $(X_1\times X_2,\rho)$ 中的闭子集.

证 必要性：设 $f:X_1\to X_2$ 连续，对任何 $(x_0,y_0)\in\overline{G(f)}$，取 $(x_n,f(x_n))\in G(f)$，使

$$\rho((x_n,f(x_n)),(x_0,y_0))\to 0\qquad(n\to\infty)$$

因为$\{f(x_n)\}$是紧空间 X_2 中的一列点，从而有收敛子序列，设

$$f(x_{n_k}) \to y_1.$$

注意到

$$(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \to (x_0, y_0) \Leftrightarrow x_{n_k} \to x_0,\ f(x_{n_k}) \to y_0,$$

所以 $x_{n_k} \to x_0$，$y_1 = y_0$，f 连续，则

$$y_0 = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0),$$

因此$(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0)) \in G(f)$，$G(f)$是 $X_1 \times X_2$ 中的闭集.

充分性：设 $G(f)$是 $X_1 \times X_2$ 中的闭集，任取$\{x_n\} \subset X_1$，$x_n \to x_0 \in X_1$，由 X_2 的紧性，$\{f(x_n)\}$有收敛子序列$\{f(x_{n_k})\}$，设

$$f(x_{n_k}) \to y_0,$$

则$(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \to (x_0, y_0)$，$G(f)$闭，故$(x_0, y_0) \in G(f)$，即 $y_0 = f(x_0)$. 因此，$\{f(x_n)\}$的任一收敛子序列$\{f(x_{n_k})\}$均收敛于 $f(x_0)$，从而

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

即 $f(x)$在 x_0 处连续.

7. 设 X 为 n 维赋范线性空间，E_0 是 X 的真闭子空间，试证明存在 $x_0 \in X$，使 $\|x_0\| = 1$ 以及

$$\rho(x_0, E_0) = \inf_{x\in E_0} \|x_0 - x\| = 1.$$

证 取 $\varepsilon_n = \dfrac{1}{2^n}$，据本章§3.5 中的里斯引理，对每个 n，存在 $x_n \in X$，使 $\|x_n\| = 1$以及

$$\rho(x_n, E_0) \geqslant 1 - \frac{1}{2^n}.$$

因为$\{\|x_n\|\}$有界，X 为有穷维，可设 $x_n \to x_0$，则 $\|x_0\| = 1$

$$1 \geqslant \rho(x_0, E_0) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, E_0) \geqslant 1,$$

故 $\rho(x_0, E_0) = 1$.

8. 设 H 为希尔伯特空间，G 是H 的真闭子空间，证明存在 $y \in H$，使 $\|y\| = 1$ 以及

$$\rho(y, G) = \inf_{z\in G} \|y - z\| = 1.$$

证 因为 $G = \overline{G} \subsetneqq H$，则存在 $y \in G^{\perp}$，$\|y\| = 1$. 则对一切 $z \in G$，有

$$\|y - z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \geqslant \|y\|^2 = 1.$$

所以

$$1 \geqslant \rho(y, G) \geqslant 1,$$

即存在 $y\in G$，使 $\|y\|=1$ 以及

$$\rho(y,G)=1.$$

9. 设 f 是 $[a,b]$ 上二阶连续可微的实函数，$x^*\in(a,b)$

$$f(x^*)=0,\qquad f'(x^*)\neq 0.$$

又设序列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

试证明当 $|x_0-x^*|$ 充分小时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$.

证 令 $F(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，由条件 $f(x^*)=0$ 得 $F(x^*)=x^*$. 又因为

$$F'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)},$$

所以 $F'(x^*)=0$, $\lim\limits_{x\to x^*}F'(x)=F'(x^*)=0$.

故存在 $\delta>0$，使 $[x^*-\delta,x^*+\delta]\subset[a,b]$，且当 $x\in[x^*-\delta,x^*+\delta]$ 时

$$|F'(x)|\leqslant\frac{1}{2},$$

$$F(x)-x^*=F(x)-F(x^*)=F'(\xi)(x-x^*),$$

其中 ξ 位于 x 和 x^* 之间，所以 $x\in[x^*-\delta,x^*+\delta]$ 时

$$|F(x)-x^*|<\delta,$$

这就证明了 F 是 $[x^*-\delta,x^*+\delta]\to[x^*-\delta,x^*+\delta]$ 的压缩映射，故当 $x_0\in[x^*-\delta,x^*+\delta]$ 时，迭代序列 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 必收敛于 x^*.

10. 设 $f(t)\in C_{[0,1]}$，求出方程

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_0^t x(s)\mathrm{d}s\qquad(t\in[0,1])$$

的连续解.

解法 1 令 $Tx(t)=f(t)+\lambda\displaystyle\int_0^t x(s)\mathrm{d}s$, $\quad x(t)\in C_{[0,1]}$. 根据文献[13]p303 例 5 知方程对一切 λ 存在惟一解 $x(t)\in C_{[0,1]}$，且由定理 4.2 知，对任意的 $x_0(t)\in C_{[0,1]}$，点列 $x_n(t)=T^nx_0(t)$ 收敛于 T 的惟一不动点.

记

$$K(t,s)=\begin{cases}0, & t<s,\\ 1, & t\geqslant s,\end{cases}$$

则

$$Tx(t)=f(t)+\lambda\int_0^1 K(t,s)x(s)\mathrm{d}s.$$

现取 $x_0(t)\equiv 0$,得

$$x_1(t)=f(t),x_2(t)=f(t)+\lambda\int_0^1 K(t,s)f(s)\mathrm{d}s,\cdots,$$

$$x_{n+1}(t)=f(t)+\sum_{k=1}^{n}\lambda^k\int_0^1 K_k(t,s)f(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $K_1(t,s)=K(t,s)$,$n\geqslant 2$ 时

$$K_n(t,s)=\int_0^1 K(t,u)K_{n-1}(u,s)\mathrm{d}u.$$

从而

$$K_n(t,s)=\begin{cases}0, & t<s,\\ \dfrac{1}{(n-1)!}(t-s)^{n-1}, & t\geqslant s.\end{cases}$$

$$x_{n+1}(t)=f(t)+\lambda\int_0^t\Big[1+\lambda(t-s)+\frac{\lambda^2(t-s)^2}{2!}+\cdots+\frac{\lambda^{n-1}(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\Big]f(s)\mathrm{d}s,$$

故

$$x(t)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}(t)=f(t)+\lambda\int_0^t e^{\lambda(t-s)}f(s)\mathrm{d}s.$$

解法 2 令 $y(t)=\int_0^t x(s)\mathrm{d}s$,若 $x(t)$ 是原方程解,则 $y(t)$ 满足方程

$$\begin{cases}y'(t)=f(t)+\lambda y(t)\\ y(0)=0\end{cases}\qquad (*)$$

反之,若 $y(t)$ 是上方程之解,则 $x(t)=y'(t)$ 必满足方程

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_0^t x(s)\mathrm{d}s.$$

易知方程(*)(一阶线性方程)之解为

$$y(t)=\int_0^t e^{\lambda(t-s)}f(s)\mathrm{d}s.$$

故原方程之解为

$$x(t)=y'(t)=f(t)+\lambda\int_0^t e^{\lambda(t-s)}f(s)\mathrm{d}s.$$

11. 设 X 为内积空间,$M,N\subset X$,L 是由 M 和 N 张成的子空间,证明 $L^\perp=M^\perp\cap N^\perp$.

证 $x\in L$,$x=\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_i x_i+\sum_{j=1}^{n_2}\beta_j x_j'$,$x_i\in M$,$x_j'\in N$,$i=1,2,\cdots,n_1$,$j=1,2,\cdots,n_2$,显然 $y\in L^\perp$ 时,必有 $y\perp M$,$y\perp N$,即 $y\in M^\perp\cap N^\perp$.所以

$$L^{\perp} \subset M^{\perp} \cap N^{\perp}.$$

反之,设 $y \in M^{\perp} \cap N^{\perp}$,则 $\forall z_1 \in M, z_2 \in N$,有 $(y, z_1) = (y, z_2) = 0$,从而对一切 $x \in L$,有 $(y, x) = 0$, $y \in L^{\perp}$, $M^{\perp} \cap N^{\perp} \subset L^{\perp}$,故

$$L^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}.$$

12. 设 $\{e_n\}$ 是希尔伯特空间 H 中的完备标准直交系,又设 $\{e_n'\}$ 是 H 中的一个标准直交系,并满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| e_k - e_k' \| < +\infty.$$

试证明 $\{e_n'\}$ 也是 H 中的完备标准直交系.

(提示:由条件,取自然数 n_0,使 $\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty} \| e_k - e_k' \|^2 < 1$,令 $M = \bigvee\limits_{k=n_0+1}^{\infty} \{e_k'\}$, $N = \bigvee\limits_{k=n_0+1}^{\infty} \{e_k\}$ 分别表示由 $\{e_k'\}_{n_0+1}^{\infty}$ 和 $\{e_k\}_{n_0+1}^{\infty}$ 张成的闭子空间,证明 $\dim M^{\perp} = n_0$,从而 $H = M \oplus M^{\perp} = \bigvee\limits_{k=1}^{\infty} \{e_k'\}$).

证 由条件,存在自然数 n_0,使

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \| e_k - e_k' \|^2 < 1.$$

令 $M = \bigvee\limits_{k=n_0+1}^{\infty} \{e_k'\}$, $N = \bigvee\limits_{k=n_0+1}^{\infty} \{e_k\}$,则

$$H = M \oplus M^{\perp} = N \oplus N^{\perp}.$$

显然 $M^{\perp}$ 的维数 $\geqslant n_0$,因此,若能证明 $\dim M^{\perp} = n_0$,则

$$M^{\perp} = \bigvee_{k=1}^{n_0} \{e_k'\}, \qquad H = \bigvee_{k=1}^{\infty} \{e_k'\},$$

从而 $\{e_k'\}$ 也完备.

任取 $f \neq 0$, $f \in M^{\perp}$,则

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |(f, e_k - e_k')|^2 < \| f \|^2.$$

由此可知 $f \overline{\in} N$,令 $f = g_1 + g_2$,其中 $g_1 \in N^{\perp}$, $g_2 \in N$,则 $g_1 \neq 0$. 记 $pf = g_1$,则 P 是 $M^{\perp} \to N^{\perp}$ 的一对一线性算子,故 $M^{\perp}$ 与 $N^{\perp}$ 的一个子集同构,但 $\dim N^{\perp} = n_0$,所以 $\dim M^{\perp} \leqslant n_0$,从而 $\dim M^{\perp} = n_0$, $\{e_k'\}$ 完备.

第六章　线性算子和线性泛函

§6.1　有界线性算子

1. 设无穷矩阵(α_{ij})　$(i,j=1,2,3,\cdots)$满足

$$\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}| < \infty,$$

若 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)$，令

$$y = Tx: \eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_j \quad (i=1,2,3,\cdots),$$

则 T 是 l^∞ 到 l^∞ 的有界线性算子，且 $\|T\| = \sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|$.

证　T 是线性算子显然，因为

$$\|y\| = \sup_i |\eta_i| = \sup_i \left|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\xi_j\right|$$

$$\leqslant \left(\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|\right) \cdot \|x\|,$$

所以

$$\|T\| \leqslant \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|.$$

另一方面，令

$$x^{(i)} = \{\mathrm{sgn}\alpha_{i1}, \mathrm{sgn}\alpha_{i2}, \cdots, \mathrm{sgn}\alpha_{in}, \cdots\},$$

则 $x^{(i)} \in l^\infty$，$\|x^{(i)}\| \leqslant 1 (i=1,2,3,\cdots)$，而

$$Tx_i = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{1j}\mathrm{sgn}\alpha_{ij}, \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{2j}\mathrm{sgn}\alpha_{ij}, \cdots\right\},$$

$$\|T\| \geqslant \|Tx^{(i)}\| = \sup_i |\eta_i| \geqslant \left|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\mathrm{sgn}\alpha_{ij}\right| = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}| \quad (i=1,2,3,\cdots).$$

故

$$\|T\| \geqslant \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|,$$

从而

$$\|T\| = \sup_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|.$$

2. 设$\sup\limits_{n\geqslant 1}|\alpha_n|<\infty$，在 l 中定义线性算子 T

$$y = Tx : \eta_n = \alpha_n\xi_n \qquad (n = 1,2,3,\cdots),$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)$，则 T 是有界线性算子，且

$$\|T\| = \sup_{n\geqslant 1}|\alpha_n|.$$

证 T 是 $l\to l$ 中的线性算子显然.因为

$$\|Tx\| = \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n\xi_n| \leqslant \sup_n|\alpha_n|\cdot\|x\|,$$

所以

$$\|T\| \leqslant \sup_n|\alpha_n|.$$

另一方面，取 $e_n=(\underbrace{0,0,\cdots,1}_{n\text{位}},0,\cdots)\in l$，$\|e_n\|=1$，则

$$\|T\| \geqslant \|Te_n\| = |\alpha_n| \qquad (n = 1,2,3,\cdots),$$

所以

$$\|T\| \geqslant \sup_n|\alpha_n|,$$

从而

$$\|T\| = \sup_n|\alpha_n|.$$

3. 设 $C(-\infty,+\infty)$ 表示定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界连续函数全体，$L(-\infty,+\infty)$ 上定义算子 T 如下

$$Tx(s) = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{ist}x(t)dt, \qquad x(t)\in L(-\infty,+\infty),\ s\in(-\infty,+\infty),$$

试证明 T 为 $L(-\infty,+\infty)$ 到 $C(-\infty,+\infty)$ 的有界线性算子.

证 $Tx(s)$ 连续以及 T 是定义在 $L(-\infty,+\infty)$ 上的线性算子显然.因为

$$\|Tx\| = \sup_s|Tx(s)| = \sup_s\left|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ist}x(t)dt\right|$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)| = \|x\|,$$

所以 $Tx(s)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，即 $Tx(s)\in C(-\infty,+\infty)$，且

$$\|T\| \leqslant 1.$$

4. 试求 $C[-1,1]$ 上的线性泛函

$$f(x) = \int_{-1}^{0}x(t)dt - \int_0^1 x(t)dt \qquad (x(t)\in C[-1,1])$$

的范数.

解 对 $x(t)\in C[-1,1]$

$$|f(x)| \leqslant \int_{-1}^{0}|x(t)|dt + \int_0^1|x(t)|dt \leqslant 2\|x\|,$$

故 f 是 $C[-1,1]$ 上的有界线性泛函，且 $\|f\|\leqslant 2$.

另一方面，令

$$x_n(t)=\begin{cases}1, & t\in\left[-1,-\dfrac{1}{n}\right],\\ -nt, & t\in\left(-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right),\\ -1, & t\in\left[\dfrac{1}{n},1\right],\end{cases}$$

则 $x_n(t)\in C[-1,1]$，且 $\|x_n\|=1$

$$f(x_n)=\int_{-1}^{-\frac{1}{n}}\mathrm{d}t-\int_{-\frac{1}{n}}^{0}nt\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{\frac{1}{n}}nt\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\mathrm{d}t=2-\frac{1}{n},$$

$$\|f\|\geqslant|f(x_n)|=2-\frac{1}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

故 $\|f\|\geqslant 2$，从而 $\|f\|=2$.

5. 设 X 为赋范线性空间，Y 为巴拿赫空间，T_0 是 $\mathscr{D}(T_0)\subset X$ 到 Y 中的有界线性算子，试证明若 $\mathscr{D}(T_0)$ 在 X 中稠密，则 T_0 可保范延拓到整个 X 上，即在 X 上惟一地存在有界线性算子 T，使 $Tx=T_0x$ 对一切 $x\in\mathscr{D}(T_0)$ 成立以及 $\|T\|=\|T_0\|$.

证 因为 $\overline{\mathscr{D}(T_0)}=X$，则 $\forall x\in X$，存在 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T_0)$，使 $x_n\to x$. 由于 T_0 有界以及 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本列，则 $\{T_0x_n\}$ 必是完备空间 Y 中的基本列，故 $\lim\limits_{n\to\infty}T_0x_n$ 存在，令

$$Tx=\lim_{n\to\infty}T_0x_n,$$

容易证明 Tx 是惟一确定的且 T 是线性算子，$Tx=T_0x$，$\forall x\in\mathscr{D}(T_0)$. 显然 $\|T\|\geqslant\|T_0\|$，又对 $x\in X$，取 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T_0)$，使 $x_n\to x$，则

$$\|Tx\|=\lim_{n\to\infty}\|T_0x_n\|\leqslant\|T_0\|\cdot\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|T_0\|\cdot\|x\|,$$

所以 $\|T\|\leqslant\|T_0\|$，从而 $\|T\|=\|T_0\|$.

6. 设 T 是由赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的线性算子，令 $N(T)=\{x\in X: Tx=0\}$ 为 T 的零空间，证明当 T 有界时，$N(T)$ 是 X 的闭子空间，如果 $N(T)$ 是 X 的闭子空间，问 T 是否有界？

解 设 T 有界，任取 $\{x_n\}\subset N(T)$，$x_n\to x$，则 $Tx=\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n=0$，故 $x\in N(T)$，$N(T)$ 是闭子空间.

反之不一定成立，例如取 $X=C[a,b]$，$T:\mathscr{D}(T)=C^1[a,b]\to X$

$$Tx=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t),$$

则

$$N(T) = \{x_c(t): x_c(t) = c, c \text{ 为常数}\},$$

易见 $N(T)$ 在 $C[a,b]$ 中是闭的，但 T 却是无界的.

7. 设 H 为可分希尔伯特空间，$\{e_i\}$ 是 H 的完备标准直交系，$T \in \mathscr{B}(H)$，试求出 T 的一般形式.

解 $x \in H$，$x = \sum_{j=1}^{\infty}(x, e_j)e_j = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$，其中 $c_j = (x, e_j)(j = 1,2,3,\cdots)$. 令

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} d_i e_i, \qquad Te_j = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij} e_i,$$

则

$$\alpha_{ij} = (Te_j, e_i) \qquad (i, j = 1,2,3,\cdots),$$

再令

$$Tx_n = T\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij} c_j e_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} c_j\right) e_i.$$

利用 $\| Tx - T_n x \|^2 \to 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\left| d_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} c_j \right|^2 \to 0\ (n \to \infty)$，所以 $d_i = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} c_j (i = 1,2,3,\cdots)$，即

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} c_j\right) e_i.$$

因为对每一个 j，$\| Te_j \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 \leqslant \| T \|^2$，所以

$$\sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 \leqslant \| T \|^2 < \infty.$$

$T \leftrightarrow$ 无穷矩阵 (α_{ij})，满足 $\sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 < \infty$

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} c_j\right) e_i.$$

*8. 设 $k(s) \in L(-\infty, +\infty)$，在 $L^p(-\infty, +\infty)$ $(p > 1)$ 上定义算子

$$Tx(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(s) x(t-s) \mathrm{d}s \qquad (x \in L^p(-\infty, +\infty)).$$

试证明 T 是 $L^p(-\infty, +\infty) \to L^p(-\infty, +\infty)$ 中的有界线性算子，并且

$$\| T \| \leqslant \| k \|.$$

其中 $\| k \| = \int_{-\infty}^{+\infty} |k(s)| \mathrm{d}s$.

(提示：利用富比尼定理，证明对几乎所有的 t，积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|k(s)|\cdot|x(t-s)|^p\mathrm{d}s$ 存在).

证 对固定的 s，当 $x\in L^p(-\infty,+\infty)$时

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|k(s)|\cdot|x(t-s)|^p\mathrm{d}t=|k(s)|\int_{-\infty}^{+\infty}|x(s)|^p\mathrm{d}u=|k(s)|\cdot\|x\|^p.$$

由于 $k\in L^1(-\infty,+\infty)$，所以二次积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|k(s)|\cdot|x(t-s)|^p\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$$

存在. 根据富比尼定理，对几乎所有的 t

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|k(s)|\cdot|x(t-s)|^p\mathrm{d}s$$

存在.

当 $p>1$ 时，取 $q>1$，使 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$|k(s)x(t-s)|=|k(s)|^{\frac{1}{q}}(|k(s)|^{\frac{1}{p}}|x(t-s)|).$$

$|k(s)|^{\frac{1}{q}}\in L^q(-\infty,+\infty)$，$|k(s)|^{\frac{1}{p}}\cdot|x(t-s)|$ 对几乎所有的 t 属于 $L^p(-\infty,+\infty)$，故

$$\begin{aligned}|Tx(t)|&\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|k(s)x(t-s)|\mathrm{d}s\\&\leqslant\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|k(s)|\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|k(s)|\cdot|x(t-s)|^p\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\|k\|^{\frac{1}{q}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|k(s)|\cdot|x(t-s)|^p\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}|Tx(t)|^p\mathrm{d}t&\leqslant\|k\|^{\frac{p}{q}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|k(s)|\cdot|x(t-s)|^p\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\\&=\|k\|^{\frac{p}{q}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|k(s)|\cdot\|x\|^p\mathrm{d}s\\&=\|k\|^p\cdot\|x\|^p.\end{aligned}$$

即 $\|Tx\|\leqslant\|k\|\cdot\|x\|$，故 T 是 $L^p(-\infty,+\infty)\to L^p(-\infty,+\infty)$的有界线性算子，并且 $\|T\|\leqslant\|k\|$.

当 $p=1$ 时

$$|Tx(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|k(s)|\cdot|x(t-s)|\mathrm{d}s,$$

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \int_{-\infty}^{+\infty}|Tx(t)|\,dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|k(s)|\cdot|x(t-s)|\,ds\right)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|k(s)|\cdot|x(t-s)|\,dt\right)ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}|k(s)|\cdot\|x\|\,ds = \|k\|\cdot\|x\|.\end{aligned}$$

§6.2 哈恩-巴拿赫延拓定理

1. 证明若赋范线性空间 X 含有 n 个线性无关的元素，则 X^* 也必含有 n 个线性无关的元素.

证 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关. 记 $X_{n-1}=\mathrm{span}\{x_2,x_3,\cdots,x_n\}$，则 $x_1\overline{\in} X_{n-1}$，按哈恩-巴拿赫定理推论 2，存在 $f_1\in X^*$，使

$$f_1(x_1)=1,\qquad f_1(x)=0,\qquad \forall x\in X_{n-1}.$$

按照这一方法，我们可构造 n 个有界线性泛函 $f_i\in X^*(i=1,2,\cdots,n)$，使

$$f_i(x_j)=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

下面证明 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 必线性无关. 事实上，若

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i=0,$$

则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\right)(x_j)=0,\qquad \forall j=1,2,\cdots,n.$$

从而可得 $\alpha_j=0(j=1,2,\cdots,n)$，故 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性无关.

2. 设 X_n 为 n 维线性空间，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是它的一组基底，对 $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in X_n$，令

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

试证明 $X_n^*=X_n$(等距同构).

证 设 $f\in X_n^*$，令 $\alpha_i=f(e_i)$，$x\in X_n$，$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$，$f(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$. 记 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\in X_n$，反之，若 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i$，令 $f_\alpha(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i$，则 $f_\alpha\in X_n^*$，故 $f\leftrightarrow\alpha$. 令

$T:X_n^* \to X_n, Tf = \alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$,显然 T 是 $X_n^* \to X_n$ 上的一对一线性映射.因为

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i\right| \leqslant \|\alpha\| \cdot \|x\|,$$

所以 $\|f\| \leqslant \|\alpha\|$.另一方面,取 $x_0 = \frac{1}{\|\alpha\|}(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \cdots, \alpha_n)$,则 $\|x_0\| = 1$,且

$$f(x_0) = \frac{1}{\|\alpha\|} f\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i e_i\right) = \|\alpha\|,$$

所以 $\|f\| \geqslant \|\alpha\|$,故 $\|f\| = \|\alpha\|$,于是

$$\|Tf\| = \|\alpha\| = \|f\|,$$

即 T 是 $X_n^* \to X_n$ 上的等距同构映射,$X_n^* = X_n$.

3. 设 $C_0 = \{(x_n): \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$,$x \in C_0$,规定 $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$,试求出 C_0 上有界线性泛函的一般形式.

解 任取 $f \in C_0^*$,令 $c_k = f(e_k)$,因为 $x = (\xi_k) \in C_0$ 时,有 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$,所以 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k$.下面证明 $(c_k) \in l$.事实上,$\forall$ 自然数 N,我们取

$$x_N = (\mathrm{sgn} c_1, \mathrm{sgn} c_2, \cdots, \mathrm{sgn} c_N, 0, \cdots) \in C_0,$$

则 $\|x_N\| \leqslant 1$

$$f(x_N) = \sum_{k=1}^{N} |c_k|,$$

故

$$\|f\| \geqslant \sum_{k=1}^{N} |c_k| \qquad (\forall N).$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \leqslant \|f\|, \qquad (c_k) \in l.$$

另一方面,任取 $(c_k) \in l$,令

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k, \qquad \forall x = (\xi_k) \in C_0,$$

则 $f \in C_0^*$,且 $\|f\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$,从而 $\|f\| = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$,$C_0^* = l$.

4. 设 X 为赋范线性空间,$X_0 \subset X$ 为闭子空间,如果对任一 $f \in X^*$,当 $f(y) = 0$ $(\forall y \in X_0)$就有 $f = 0$,试证明 $X = X_0$.

证 若 $X \neq X_0$,则存在 $x_0 \in X - X_0$,由 X_0 的闭性知

$$\rho(x_0, X_0) > 0,$$

则据哈恩-巴拿赫定理推论 2,存在 $f\in X^*$,使 $f(X_0)=0, f(x_0)=\rho(x_0,X_0)$,且 $\|f\|=1$,这与题设矛盾,故 $X=X_0$.

5. 设 X 是自反巴拿赫空间,试证明对任一 $f\in X^*$,泛函数 $|f(x)|$ 在 X 的单位球面上可取到最大值.

证 本题即证明存在 $x\in X$,使 $\|x\|=1$ 以及 $|f(x)|=\sup\limits_{\|x\|=1}|f(x)|=\|f\|$.

任取 $f\in X^*$,由哈恩-巴拿赫定理,存在 $x^{**}\in X^{**}$,使 $\|x^{**}\|=1$,且 $x^{**}(f)=\|f\|$,因为 X 自反,则存在 $x\in X$,使 $Jx=x^{**}$,$\|x\|=\|x^{**}\|=1$

$$x^{**}(f)=f(x)=\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|.$$

6. 设 X 为复的赋范线性空间,$f\in X^*$,已知 f 可表为

$$f(x)=\varphi(x)-\mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x),$$

其中 φ 为实齐性、可加实泛函,证明 $\|f\|=\|\varphi\|$.

证 不妨设 $f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|f(x)|$,因为 φ 为实泛函,则

$$|f(x)|=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f(x)=f(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)=\varphi(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x).$$

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|=\sup_{\|x\|=1}|\varphi(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)|$$

$$=\sup_{\|y\|=1}|\varphi(y)|=\|\varphi\|.$$

7. 设由赋范线性空间 $X\to Y$ 的有界线性算子 T 定义如下

$$Tx=\sum_{i=1}^n f_i(x)z_i,\qquad x\in X,$$

其中 $f_i\in X^*$, $z_i\in Y$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 试证明

$$T^*g=\sum_{i=1}^n g(z_i)f_i,\qquad g\in Y^*.$$

证 因为 $Tx=\sum\limits_{i=1}^n f_i(x)z_i$,所以对任何 $g\in Y^*$,有

$$g(Tx)=\Big(\sum_{i=1}^n g(z_i)f_i\Big)(x),\qquad \forall x\in X.$$

但 $g(Tx)=T^*g(x)$,故

$$T^*g(x)=\Big(\sum_{i=1}^n g(z_i)f_i\Big)(x),\qquad \forall x\in X.$$

故

$$T^*g=\sum_{i=1}^n g(z_i)f_i.$$

8. 设 X_1,X_2 为赋范线性空间,在乘积空间 $X_1\times X_2$ 中取范数

$$\|(x_1,x_2)\|=\|x_1\|+\|x_2\|,$$

试证明$(X_1\times X_2)^*=X_1^*\times X_2^*$,这里$X_1^*\times X_2^*$的范数规定为

$$\|(f_1,f_2)\| = \max(\|f_1\|,\|f_2\|).$$

证 对$(f_1,f_2)\in X_1^*\times X_2^*$,定义泛函$f(x_1,x_2)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$

$$\begin{aligned}|f(x_1,x_2)| &\leqslant \|f_1\|\cdot\|x_1\| + \|f_2\|\cdot\|x_2\| \\ &\leqslant \max(\|f_1\|,\|f_2\|)(\|x_1\|+\|x_2\|).\end{aligned}$$

故$f\in(X_1\times X_2)^*$,且$\|f\|\leqslant\max(\|f_1\|,\|f_2\|)$.作映射$T:X_1^*\times X_2^*\to(X_1\times X_2)^*$,$T(f_1,f_2)=f$.

反之,对任何$f\in(X_1\times X_2)^*$.记$f_1(x_1)=f((x_1,0))$,$f_2(x_2)=f((0,x_2))$$(x_1\in X_1,x_2\in X_2)$,则显然有$f_1\in X_1^*$,$f_2\in X_2^*$,易知

$$f = T(f_1,f_2),$$

$$\|f\| = \|T(f_1,f_2)\| \leqslant \max(\|f_1\|,\|f_2\|) = \|(f_1,f_2)\|.$$

下面再证明$\max(\|f_1\|,\|f_2\|)\leqslant\|f\|$.事实上,若$\max(\|f_1\|,\|f_2\|)=\|f_1\|$,我们取$\{x_1^{(n)}\}\subset X_1$,$\|x_1^{(n)}\|=1$,使得

$$f_1(x_1^{(n)})\to\|f_1\| \qquad (n\to\infty).$$

于是$\|(x_1^{(n)},0)\|=1$,且

$$T(f_1,f_2)(x_1^{(n)},0) = f((x_1^{(n)},0)) = f_1(x_1^{(n)})\to\|f_1\|.$$

故

$$\|f\| = \|T(f_1,f_2)\| \geqslant |T(f_1,f_2)(x_1^{(n)},0)| = |f_1(x_1^{(n)})|,$$

令$n\to\infty$得

$$\|f\| \geqslant \|f_1\| = \max(\|f_1\|,\|f_2\|).$$

同理,当$\max(\|f_1\|,\|f_2\|)=\|f_2\|$时,也有

$$\|f\| \geqslant \max(\|f_1\|,\|f_2\|).$$

故

$$\|T(f_1,f_2)\| = \max(\|f_1\|,\|f_2\|) = \|(f_1,f_2)\|.$$

即$X_1^*\times X_2^*$与$(X_1\times X_2)^*$等距同构.

9. 证明任何有限维赋范线性空间都是自反的.

证 设X_n为n维赋范线性空间,$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$为X_n一组基底,则存在f_1,$f_2,\cdots,f_n\in X_n^*$,使

$$f_i(e_j) = \begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

$x\in X_n$,$x=\sum_{i=1}^n\xi_ie_i$,则$f_1,f_2,\cdots,f_n$必线性无关,且

$$f_i(x) = \xi_i.$$

从而容易证明$\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$是 X_n^* 的一组基底,故 X_n^* 是n 维的,X_n^{**} 也是n 维的. $J(X_n)$与 X_n 维数相同,故 $JX_n=X_n^{**}$,X_n 自反.

10. 证明无穷维赋范线性空间的共轭空间是无穷维的.

证 设 $\dim X^*<\infty$,则 $\dim X^{**}=\dim X^*<\infty$,$JX\subset X^{**}$,故 $\dim JX<\infty$,这与 $\dim X=\infty$矛盾. 因此 $\dim X^*=\infty$.

§6.3 巴拿赫逆算子定理·闭图像定理·共鸣定理

1. 设 X,Y 是赋范线性空间,$T:X\to Y$ 为闭线性算子,如果 $T^{-1}:\mathscr{R}(T)\to X$ 存在,试证明 T^{-1}也是闭线性算子.

证 任取 $y_n\in\mathscr{D}(T^{-1})=\mathscr{R}(T)$,$y_n\to y$,且 $T^{-1}y_n\to x$,令 $y_n=Tx_n$,则 $x_n=T^{-1}y_n$,由此可得 $x_n\in\mathscr{D}(T)$,$x_n\to x$,且 $Tx_n\to y$. 因为 T 闭,所以 $x\in\mathscr{D}(T)$,$y=Tx$,即

$$y\in\mathscr{D}(T^{-1}),\qquad x=T^{-1}y.$$

故 T^{-1}是闭线性算子.

2. 设 X,Y 都是巴拿赫空间,T 是 $X\to Y$ 的一对一有界线性算子,试证明 $T^{-1}:\mathscr{R}(T)\to X$ 有界的充要条件是 $\mathscr{R}(T)$为 Y 中的闭集.

证 必要性:设 $T^{-1}:\mathscr{R}(T)\to X$ 有界. $y\in\overline{\mathscr{R}(T)}$,则存在 $y_n=Tx_n\in\mathscr{R}(T)$,使 $y_n\to y$,$x_n=T^{-1}y_n$ 必收敛于$x\in X$,从而 $y_n=Tx_n\to Tx$,故 $y=Tx$,$y\in\mathscr{R}(T)$. 即 $\mathscr{R}(T)$是闭集.

充分性:设 $\mathscr{R}(T)$闭,因为 $T^{-1}:\mathscr{R}(T)\to X$ 也是闭线性算子,按照闭图像定理,T^{-1}必有界.

3. 设 X,Y 是赋范线性空间,$T:X\to Y$ 为闭线性算子,试证明

(1) 设 C 为X 中的紧集,则像 TC 是 Y 中的闭集;

(2) 设 K 为 Y 中的紧集,则原像 $T^{-1}K$ 是X 中的闭集.

证 (1) 设$\{x_n\}\subset C$,$Tx_n\to y\in Y$,因为 C 为紧集,则存在子序列 $x_{n_k}\to x\in C$. 又因为 $Tx_{n_k}\to y$,T 是闭算子,则必有 $y=Tx$,即 $y\in TC$,故 TC 是 Y 中的闭集.

(2) 任取$\{x_n\}\subset T^{-1}K$,$x_n\to x$,我们要证明 $x\in T^{-1}K$,因为 $x_n\in T^{-1}K$,则 $Tx_n=y_n\in K$,K 紧,存在子序列 $y_{n_k}\to y\in K$,则

$$x_{n_k}\to x,\qquad Tx_{n_k}\to y.$$

由 T 的闭性,得 $y=Tx$,故 $x\in T^{-1}K$,$T^{-1}K$ 为X 中的闭集.

4. 设 X 为赋范线性空间,$S\subset X$,如果对任一 $f\in X^*$

$$\sup_{x\in S}|f(x)|<\infty,$$

则

$$\sup_{x\in S}\|x\|<\infty.$$

证 记 $x^{**}=Jx$，则 $x^{**}(f)=f(x)$. $JS=\tilde{S}\subset X^{**}$，$\|x\|=\|Jx\|=\|x^{**}\|$. 由条件，对每个 $f\in X^*$

$$\sup_{x^{**}\in\tilde{S}}|x^{**}(f)|=\sup_{x\in S}|f(x)|<+\infty,$$

则由共鸣定理得

$$\sup_{x^{**}\in\tilde{S}}\|x^{**}\|=\sup_{x\in S}\|x\|<+\infty.$$

5. 设 (η_n) 为一数列，如果对一切 $x=(\xi_n)\in l^q\quad(q>1)$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n$ 收敛，则 $(\eta_n)\in l^p$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证 $q=+\infty$ 时，显然有 $(\eta_n)\in l^1$. 现设 $1<q<+\infty$，令 $F_n\in(l^q)^*$

$$F_n\leftrightarrow(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,0,\cdots)\in l^p.$$

由条件，对一切 $x=(\xi_k)\in l^q$，有

$$\lim_{n\to\infty}|F_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k\right|<\infty,$$

按共鸣定理立即得

$$\|F_n\|=\left\{\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant M\qquad(n=1,2,3,\cdots).$$

从而 $(\eta_k)\in l^p$.

6. 设 $\{x_n\}$ 是巴拿赫空间 X 中的一个点列，如果对于每个 $f\in X^*$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<\infty,$$

则必存在正数 M，使对一切 $f\in X^*$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|\leqslant M\cdot\|f\|.$$

证法 1 作算子序列 $T_n\in\mathscr{B}(X^*,l)$ 如下

$$T_nf=(f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n),0,\cdots),\qquad f\in X^*,$$

$$\sup_{n\geqslant1}\|T_nf\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<+\infty,\qquad f\in X^*,$$

故存在 $M>0$，使

$$\sup_n\|T_n\|\leqslant M,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)| = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|f(x_n)| = \lim_{N\to\infty}\|T_N f\|$$
$$\leqslant M\cdot\|f\| \quad (\forall f\in X^*).$$

证法 2 令 $I=\{\alpha:\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m),m\in\mathbf{N},\varepsilon_i=\pm1,i=1,2,\cdots,m\}$，对 $f\in X^*$，令

$$g_\alpha(f)=f\Big(\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\Big),$$

即 $g_\alpha=\Big(\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\Big)^{**}$. 因为 $\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|<\infty$，$g_\alpha\in X^{**}$，且

$$\sup_{\alpha\in I}|g_\alpha(f)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|<+\infty \qquad (\forall f\in X^*).$$

则据共鸣定理，必存在 $M>0$，使

$$\sup_{\alpha\in I}\|g_\alpha\|\leqslant M.$$

$f\in X^*$，不妨设 f 为实泛函，取 $\varepsilon_i=\operatorname{sgn}f(x_i)(f(x_i)\neq0)$，并约定 $f(x_i)=0$ 时，$\varepsilon_i=1$，则对任一自然数 m

$$g_\alpha(f)=\sum_{i=1}^{m}|f(x_i)|\leqslant M\cdot\|f\|,$$

故

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f(x_i)|\leqslant M\cdot\|f\|.$$

7. $\{x_n\}$ 同第 6 题，则对每个 $f\in X^*$，$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|$ 收敛的充要条件是：存在正数 M，使对一切自然数 m 以及任意的 $\varepsilon_n=\pm1$，有

$$\Big\|\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n x_n\Big\|\leqslant M.$$

证 必要性：同上题，令

$$g_\alpha(f)=f\Big(\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\Big) \qquad (\varepsilon_i=\pm1,i=1,2,\cdots,m),$$

则

$$g_\alpha\in X^{**}，且\ \|g_\alpha\|\leqslant\Big\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\Big\|.$$

另一方面，据哈恩-巴拿赫定理，存在 $f\in X^*$，使

$$f\Big(\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\Big)=\Big\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\Big\|，且\ \|f\|=1.$$

所以

$$\| g_\alpha \| = \left\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i x_i \right\|.$$

于是由第 6 题知，对一切自然数以及 $\varepsilon_i = \pm 1 (i=1,2,\cdots,m)$，有

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i x_i \right\| \leqslant M.$$

充分性：设条件成立，$f \in X^*$，取 $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} f(x_i)$，并规定，$f(x_i)=0$ 时，$\varepsilon_i = 1$（不妨设 f 为实泛函），则

$$\sum_{i=1}^{m} |f(x_i)| = f\left(\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i x_i\right) \leqslant M \cdot \|f\| \qquad (\forall m),$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < +\infty.$$

8. 设 $\{f_n\}$ 是巴拿赫空间 X 的共轭空间 X^* 中的点列，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 对每个 $x \in X$ 收敛的充要条件是对每个 $F \in X^{**}$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F(f_n)|$$

收敛.

证 充分性：设对每个 $F \in X^{**}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |F(f_n)| < \infty$，因为 $X \subset X^{**}$，对 $\forall x \in X$，$Jx = x^{**} \in X^{**}$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} |x^{**}(f_n)| < \infty \qquad (\forall x \in X).$$

必要性：设对每个 $x \in X$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f_i(x)| < \infty$，令

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i f_i(x),$$

其中 $m \in \mathbf{N}$，$\varepsilon_i = \pm 1$，$i=1,2,\cdots,m$，则 $\varphi_\alpha \in X^*$，且

$$\sup_\alpha |\varphi_\alpha(x)| < +\infty \qquad (\text{对每个 } x \in X).$$

按照共鸣定理，得

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i f_i \right\| = \|\varphi_\alpha\| \leqslant M < \infty.$$

任取 $F \in X^{**}$，不妨设 F 为实泛函，令 $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} F(f_i)$，并规定 $F(f_i)=0$ 时，$\varepsilon_i = 1$，则

$$\sum_{i=1}^{m} |F(f_i)| = \left| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i F(f_i) \right| = \left| F\left(\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i f_i \right) \right|$$

$$\leqslant M\cdot\|F\| \qquad (\forall m\in\mathbf{N}).$$

故

$$\sum_{i=1}^{\infty}|F(f_i)|<\infty.$$

9. 设 M 为赋范线性空间 X 的闭子空间，x_0 为 M 中某个弱收敛点列的极限，则 $x_0\in M$.

证 设 $x_0\notin M$，则 $d=\rho(x_0,M)>0$，由哈恩-巴拿赫定理，必存在 $f\in X^*$，使 $f(x_0)=d$，$f(x)=0(\forall x\in M)$. 但由条件，存在 $x_n\in M$，使 $x_n\xrightarrow{w}x_0$，故 $f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$，矛盾，因此 $x_0\in M$.

10. 设 X 为巴拿赫空间，试证明

(1) 若 $\{x_n\}\subset X$，$x_n\xrightarrow{w}x$，则 $\|x\|\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$；

(2) 若 $\{f_n\}\subset X^*$，$f_n\xrightarrow{w^*}f$，则 $\|f\|\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\|f_n\|$.

证 (1) **证法 1** 设 $x_n\xrightarrow{w}x$，可视 x_n 为 X^{**} 中的元素，故 $x_n\xrightarrow{w^*}x$ 可看作 X^* 上有界线性泛函序列 $\{x_n\}$ * 弱收敛于 x，即

$$x_n^{**}(f)\to x^{**}(f) \qquad (\forall f\in X^*),$$

$$|x^{**}(f)|=\lim_{n\to\infty}|x_n^{**}(f)|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|x_n\|\cdot\|f\|,$$

所以 $\|x\|=\|x^{**}\|\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$.

证法 2 设 $x_n\xrightarrow{w}x$，存在 $f\in X^*$，使 $\|f\|=1$，$f(x)=\|x\|$，因为 $x_n\xrightarrow{w}x$，则

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_n)|=|f(x)|=\|x\|.$$

又

$$|f(x_n)|\leqslant\|x_n\|\cdot\|f\|=\|x_n\|,$$

所以 $\|x\|\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$.

(2) 设 $f_n\xrightarrow{w^*}f$，则 $\forall x\in X$，有

$$f_n(x)\to f(x) \qquad (n\to\infty),$$

$$|f(x)|=\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|f_n\|\cdot\|x\|,$$

故 $\|f\|\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\|f_n\|$.

11. 设 $e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n\text{位}},0,\cdots)\in l^1(n=1,2,3,\cdots)$，证明 $e_n\xrightarrow{w^*}0$，但 e_n 不弱收敛于 0.

证 因为 $l^1=c_0^*$,对任何 $x=(\xi_n)\in c_0$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$,所以

$$e_n(x)=\xi_n\to 0\qquad(n\to\infty)\qquad(\forall x\in c_0).$$

故 $e_n\xrightarrow{w^*}0$.

$(l^1)^*=l^\infty$,取 $f=(1,1,\cdots,1,\cdots)\in l^\infty$,则

$$f(e_n)=1,\qquad n=1,2,3,\cdots,$$

所以 $f(e_n)\not\to 0\quad(n\to\infty)$,故 $e_n\stackrel{w}{\not\to}0$.

12. 设 X 是巴拿赫空间,T 是 X 中的线性算子,试证明 T 为有界线性算子的充要条件是对任何 $x_n\xrightarrow{w}x$ 有 $Tx_n\xrightarrow{w}Tx$.

证 必要性:设 T 有界,任取 $f\in X^*$,令 $g(x)=f(Tx)$,$x\in X$,则 $g\in X^*$,$x_n\xrightarrow{w}x$,必有 $g(x_n)\to g(x)(n\to\infty)$,即 $f(Tx_n)\to f(Tx)(n\to\infty)$,故 $Tx_n\xrightarrow{w}Tx$.

充分性:设条件成立,我们证明 T 是闭线性算子.设

$$x_n\xrightarrow{s}x,\qquad Tx_n\xrightarrow{s}y,$$

则 $x_n\xrightarrow{w}x$,由假设 $Tx_n\xrightarrow{w}Tx$,但 $Tx_n\xrightarrow{w}y$,按照弱极限惟一性,得 $y=Tx$,故 T 为闭算子,再由闭图像定理,T 必有界.

13. 证明有穷维线性空间 X_n 中弱收敛等价于强收敛.

证 设 $x_m\xrightarrow{w}x$,$x_m=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^{(m)}e_i\in X_n$,$x=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_ie_i$,则 $\forall f\in X_n^*=X_n$,$f=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$,$f(x_m)\to f(x)\ (m\to\infty)$.取 $f\leftrightarrow e_i$,立即得 $\xi_i^{(m)}\to\xi_i\quad(m\to\infty$,$i=1,2,\cdots,n)$,故 $x_m\xrightarrow{s}x$.因此 X_n 中弱收敛等价于强收敛.

14. 设 $p>1$,$x^{(n)}=(\xi_k^{(n)})\in l^p\quad(n=1,2,3,\cdots)$,则 $\{x^{(n)}\}$ 弱收敛于 $x=(\xi_k)\in l^p$ 的充要条件是 $\sup\limits_n\|x^{(n)}\|<\infty$,且对每个 k,$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k$;如果 $p=1$,试问结论成立否?

证 必要性:$x^{(n)}=(\xi_k^{(n)})\in l^p$,$x_n\xrightarrow{w}x=(\xi_k)\in l^p$,则显然有 $\sup\limits_n\|x^{(n)}\|<\infty$ 以及对任一 $f\in(l^p)^*=l^q\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$,有

$$f(x_n)\to f(x)\qquad(n\to\infty).$$

特别地取 $f\leftrightarrow(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{k位},\cdots,)\in l^q$,则 $f(x^{(n)})=\xi_k^{(n)}$,$f(x)=\xi_k$,所以

$$\xi_k^{(n)}\to\xi_k\qquad(n\to\infty),\qquad k=1,2,3,\cdots.$$

充分性:设 $p>1$,$x=(\xi_k)$,$x^{(n)}=(\xi_k^{(n)})\in l^p$,$y=\sum\limits_{k=1}^{m}\eta_ke_k\in l^q=(l^p)^*$,

$y \leftrightarrow f$，由条件 $\xi_k^{(n)} \to \xi_k \quad (n \to \infty), k = 1,2,3,\cdots$，则

$$f(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^{m} \xi_k^{(n)} \eta_k \to f(x) = \sum_{k=1}^{m} \xi_k \eta_k \qquad (n \to \infty).$$

由于集合 $G = \{y : y = \sum_{k=1}^{m} \eta_k e_k, m \in \mathbf{N}, \eta_k$ 任意$, k = 1,2,\cdots,m\}$ 在 l^q 中稠密，$\{\|x^{(n)}\|\}$ 有界，则对 l^q 中一切元素 f，有

$$f(x^{(n)}) \to f(x) \qquad (n \to \infty),$$

故 $x^{(n)} \xrightarrow{w} x$.

当 $p=1$ 时，结论不一定成立，例如取 $e_n \in l^1$，$\|e_n\| = 1$，$x^{(n)} = e_n = (\xi_k^{(n)})$，因为 $n > k$ 时，$\xi_k^{(n)} = 0$ 显然，对每个 k，有 $\xi_k^{(n)} \to 0 \ (n \to \infty)$，$\|x^{(n)}\| = 1$ 一致有界，但对 $f \in (l^1)^* = l^\infty$，$f \leftrightarrow (a_i) \in l^\infty$，只要 $\lim\limits_{i\to\infty} a_i \neq 0$，必有 $f(e_n) = a_n \not\to 0 \ (n \to \infty)$. 所以在 l^1 中 $e_n \overset{w}{\not\to} 0$.

15. 设 X 为巴拿赫空间，p 是 X 上的泛函，满足条件：

(i) $p(x) \geqslant 0$；

(ii) $\alpha \geqslant 0$ 时，$p(\alpha x) = \alpha p(x)$；

(iii) $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2) (x_1, x_2 \in X)$；

(iv) 当 $x_n, x \in X, x_n \to x$ 时，$\varliminf\limits_{n\to\infty} p(x_n) \geqslant p(x)$.

试证明必存在正数 M，使得对一切 $x \in X$，$p(x) \leqslant M \cdot \|x\|$.

证 令 $M_k = \{x \in X : p(x) \leqslant k\}$，利用条件(iv)易证 M_k 为闭集，且显然有 $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k$. 因为 X 完备，按照 Baire 纲定理，必存在某个 M_{k_0} 在某一个闭球 $\tilde{S}(x_0, r_0)$ 中稠密，于是

$$M_{k_0} \supset \tilde{S}(x_0, r_0).$$

任取 $x \in X, x \neq 0$，则 $x_0 + \frac{r_0 x}{\|x\|} \in \tilde{S}(x_0, r_0) \subset M_{k_0}$，所以

$$p\left(x_0 + \frac{r_0 x}{\|x\|}\right) \leqslant k_0,$$

$$p\left(\frac{r_0 x}{\|x\|}\right) = p\left(x_0 + \frac{r_0 x}{\|x\|} - x_0\right) \leqslant p(-x_0) + p\left(x_0 + \frac{r_0 x}{\|x\|}\right)$$
$$\leqslant k_0 + p(-x_0).$$

因为 $p(0) = 0$，所以

$$p(x) \leqslant M \cdot \|x\| \qquad (\forall x \in X),$$

其中 $M = \dfrac{k_0 + p(-x_0)}{r_0}$.

§6.4 全连续算子及其初等性质

1. 设 X,Y 是赋范线性空间，$S,T\in\mathscr{B}(X,Y)$，且 S、T 全连续，则 $\alpha S+\beta T$ 也是全连续的，这里 α,β 是数.

本题直接根据全连续算子定义即可得到.

2. 设数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛于 0，在 l 中定义算子 $T:y=Tx$，其中 $x=(\xi_n)\in l$，$y=(\alpha_n\xi_n)$，证明 T 是全连续算子.

证 令 $T_n x=(\alpha_1\xi_1,\alpha_2\xi_2,\cdots,\alpha_n\xi_n,0,\cdots)$，$x=(\xi_n)\in l$，则易知 T_n 是 l 中的有穷秩算子，$\forall\varepsilon>0$，存在 N，使 $n>N$ 时

$$|\alpha_n|<\varepsilon.$$

则 $n>N$ 时，有

$$\|(T_n-T)x\|<\varepsilon\|x\|,$$

故 $\|T_n-T\|\to 0\ (n\to\infty)$，$T$ 为全连续算子.

3. 设无穷阵 (α_{ij}) 满足

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^2<\infty,$$

在 l^2 中定义算子 $T:y=Tx$，其中 $x=(\xi_k)\in l^2$，$y=(\eta_k)$

$$\eta_k=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{kj}\xi_j\qquad(k=1,2,3,\cdots),$$

证明 T 是 $l^2\to l^2$ 的全连续算子.

证 设 $Tx=(\eta_k)$，令

$$T_n x=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,0,\cdots),$$

则 T_n 是 l^2 中的有穷秩算子，且

$$\|(T_n-T)x\|^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}|\eta_k|^2\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{kj}|^2\Big)\cdot\|x\|^2.$$

因为 $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^2<\infty$，所以 $\forall\varepsilon>0$，存在 N，使 $n>N$ 时

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{kj}|^2\Big)<\varepsilon^2,$$

则 $n>N$ 时，$\|T_n-T\|<\varepsilon$，故 T 全连续.

4. 设 X,Y 是赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，如果 Y 完备，T^* 全连续，则 T 也是全连续的.

证 任取 X 中一有界点列 $\{x_n\}$，则 $\{x_n^{**}\}$ 为 X^{**} 中的有界点列，因为 T^* 全连续，则 $T^{**}\in\mathscr{B}(X^{**},Y^{**})$ 也全连续

$$T^{**}x_n^{**} = (Tx_n)^{**},$$

$\{T^{**}x_n^{**}\}$必有收敛子序列，不妨设

$$(Tx_n)^{**} = T^{**}x_n^{**} \to z = y^{**} \in Y^{**},$$

于是$(Tx_n)^{**}$是 Y^{**}中的基本列，但

$$\| Tx_n - Tx_m \| = \| (Tx_n)^{**} - (Tx_m)^{**} \|,$$

故$\{Tx_n\}$也是 Y 中的基本列，Y 完备，故 $Tx_n \to y \in Y$，即 T 全连续.

5. 试证明按公式 $Jx = x$ 作用的嵌入算子 $J: C^1[0,1] \to C[0,1]$是全连续算子，这里 $C^1[0,1]$中的范数 $\| x \| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$.

证 设 $A \subset C^1[0,1]$为有界集，则存在常数 K，使 $x \in A$ 时，有

$$\max_{t\in[0,1]} |x(t)| \leqslant K, \qquad \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| \leqslant K.$$

则 JA 是$C[0,1]$中有界集，且等度连续，故 JA 是$C[0,1]$中的列紧集，于是嵌入算子 J 是全连续算子.

6. 设 $X = l^\infty$，是否存在全连续算子 $T \in \mathscr{B}(X)$，使 $\mathscr{R}(T) = l^\infty$?

解 不存在全连续算子 T，使$\mathscr{R}(T) = l^\infty$. 因为若 T 全连续，且 $\mathscr{R}(T) = l^\infty$，则$\mathscr{R}(T)$可分，但 l^∞是不可分的，矛盾.

§6.5 希尔伯特空间上的线性泛函和线性算子

1. 设 f 是希尔伯特空间 H 的子空间 G 上的有界线性泛函，则 f 在 H 上存在惟一的延拓 F，适合 $\| F \| = \| f \|_G$.

证 因为 f 是 G 上的有界线性泛函，我们可不妨设 G 为闭子空间，则 G 本身为一完备内积空间，$f \in G^*$，必存在 $y \in G$，使

$$f(x) = (x,y) \qquad (\forall x \in G),$$

且 $\| f \|_G = \| y \|$. 现在令

$$F(x) = (x,y) \qquad (\forall x \in H),$$

则 F 是 f 的一个延拓，且 $\| F \| = \| y \| = \| f \|_G$. 下面证明惟一性. 若另有 $\tilde{F}(x) = (x,y')(\forall x \in H)$，满足

$$\tilde{F}(x) = f(x) = F(x) \qquad (\forall x \in G),$$

$$\| \tilde{F} \| = \| f \|_G, \quad 即 \quad \| y' \| = \| y \|,$$

则 $x \in G$ 时

$$(x, y' - y) = \tilde{F}(x) - F(x) = 0,$$

故 $y' - y \in G^\perp$. 显然有

$$y' = y + (y' - y),$$

$$\| y' \|^2 = \| y \|^2 + \| y' - y \|^2.$$

于是 $\|y'-y\|=0$，$y=y'$，惟一性得证.

2. 设 H 是希尔伯特空间，M 是 H 的闭子空间，$x_0\in H$，试证明

$$\min\{\|x-x_0\|:x\in M\}=\max\{|(x_0,y)|:y\in M^{\perp},\|y\|=1\}.$$

证 令 $x_0=x_0^{(1)}+x_0^{(2)}$，其中 $x_0^{(1)}\in M$，$x_0^{(2)}\in M^{\perp}$，则 $x\in M$ 时，有

$$\|x-x_0\|^2=\|x-x_0^{(1)}\|^2+\|x_0^{(2)}\|^2,$$

故

$$\min\{\|x-x_0\|:x\in M\}=\|x_0^{(2)}\|.$$

作 $M^{\perp}$ 上的有界线性泛函 f 如下

$$f(y)=(y,x_0^{(2)})\qquad(\forall\, y\in M^{\perp}),$$

则 f 作为希尔伯特空间 $M^{\perp}$ 上的有界线性泛函有

$$\begin{aligned}\|f\|=\|x_0^{(2)}\|&=\sup\{|f(y)|:y\in M^{\perp},\|y\|=1\}\\&=\max\{|(x_0,y)|:y\in M^{\perp},\|y\|=1\},\end{aligned}$$

（这里，不妨设 $x_0^{(2)}\neq 0$，取 $y_0=\dfrac{x_0^{(2)}}{\|x_0^{(2)}\|}\in M^{\perp}$，则可取到上确界）. 故

$$\min\{\|x-x_0\|:x\in M\}=\max\{|(x_0,y)|:y\in M^{\perp},\|y\|=1\}.$$

3. 设 T 为希尔伯特空间 H 上的有界自伴算子，试证明对一切 $x,y\in H$，成立

$$\mathrm{Re}(Tx,y)=\frac{1}{4}[(T(x+y),x+y)-(T(x-y),x-y)].$$

证 因为 T 自伴，则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}[(T(x+y),x+y)-(T(x-y),x-y)]\\&=\frac{1}{4}[(Tx,y)+(Ty,x)+(Tx,y)+(Ty,x)]\\&=\mathrm{Re}(Tx,y).\end{aligned}$$

4. 设 A 是复希尔伯特空间 H 上的有界线性算子，如果对每个 $x\in H$，$(Ax,x)=0$，则 $A=0$，若 A 为自伴算子，则不论 H 是实的还是复的希尔伯特空间，只要 $(Ax,x)=0(\forall\, x\in H)$，就有 $A=0$.

证 (1) 利用等式

$$\begin{aligned}(Ax,y)=\frac{1}{4}[&(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)\\&+\mathrm{i}(A(x+\mathrm{i}y),x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}(A(x-\mathrm{i}y),x-\mathrm{i}y)],\end{aligned}$$

由条件知对一切 $x,y\in H$ 成立

$$(Ax,y)=0,$$

从而 $A=0$.

(2) 若 A 为自伴算子，当 H 为实空间时

$$(Ax,y)=\mathrm{Re}(Ax,y)=\frac{1}{4}[(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)],$$

故亦有

$$(Ax,y)=0\qquad(\forall x,y\in H),$$

从而 $A=0$. 当 H 为复空间时,由(1)可知 $A=0$.

5. 设 H 为复希尔伯特空间,$T\in\mathscr{B}(H)$,证明 $T=-T^*$ 的充要条件是对一切 $x\in H$,$\mathrm{Re}(Tx,x)=0$.

证　必要性:令 $B=T+T^*$,则 $B=B^*$,即 B 为自伴算子. 若 $T=-T^*$,则 $B=0$,于是

$$(Tx,x)+(x,Tx)=0,\qquad\forall x\in H,$$

即

$$\mathrm{Re}(Tx,x)=0,\qquad\forall x\in H.$$

充分性:若 $\mathrm{Re}(Tx,x)=0$, $\forall x\in H$,则

$$(Bx,x)=0,\qquad\forall x\in H.$$

B 自伴,由第 4 题知,$B=0$,即 $T=-T^*$.

6. 设$\{e_n\}$是可分希尔伯特空间 H 中的完备标准直交系,定义右移算子 $T:H\to H$ 如下

$$Te_n=e_{n+1}\qquad(n=1,2,3,\cdots).$$

求 T 的值域,零空间,范数 $\|T\|$ 以及共轭算子 T^*.

解　任取 $x=(\xi_n)\in H$,$x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_ne_n$,则 $Tx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_ne_{n+1}$,即

$$Tx=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots),$$

故 $\mathscr{R}(T)=\bigvee\limits_{k=2}^{\infty}\{e_k\}$,$N(T)=\{0\}$. 因为 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$,所以 $\|T\|\leqslant1$. 另一方面 $\|Te_n\|=\|e_{n+1}\|=1$,所以 $\|T\|\geqslant1$,因此 $\|T\|=1$.

设 $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\eta_ne_n$,则 $Ty=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\eta_ne_{n+1}$

$$(T^*e_n,y)=(e_n,Ty)=\begin{cases}\eta_{n-1}, & n\geqslant2,\\ 0, & n=1.\end{cases}$$

故

$$T^*e_n=\begin{cases}0, & n=1,\\ e_{n-1}, & n\geqslant2.\end{cases}$$

即 $T^*x=(\xi_2,\xi_3,\xi_4,\cdots)$.

7. 设 T 为l^2 上的有界线性算子,对 $x=(\xi_k)\in l^2$,$Tx=(\eta_k)$,其中

$$\eta_k=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{kj}\xi_j\qquad(k=1,2,3,\cdots),$$

再设 $T^* x = y^* = (y_k^*)$，而

$$y_k^* = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{kj}^* \xi_j \qquad (k = 1,2,3,\cdots).$$

证明 $\alpha_{kj}^* = \bar{\alpha}_{kj} \quad (j,k = 1,2,3,\cdots)$.

证 由 T 的定义知

$$\alpha_{kj} = (Te_j, e_k) \qquad (k = 1,2,3,\cdots),$$

其中 $e_k = (\underbrace{0,\cdots,0,1}_{k\text{位}},0,\cdots)$. 现在

$$T^* x = (y_k^*), \qquad y_k^* = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{kj}^* \xi_j,$$

则易知

$$\alpha_{kj}^* = (T^* e_j, e_k) = (e_j, Te_k) = \overline{(Te_k, e_j)} = \bar{\alpha}_{jk}, \qquad j,k = 1,2,3,\cdots.$$

8. 设 T 为希尔伯特空间 H 中的有界线性算子，且 $\|T\| \leqslant 1$，证明

$$\{x : Tx = x\} = \{x : T^* x = x\}.$$

证 记 $M = \{x : Tx = x\}$，$N = \{x : T^* x = x\}$. 任取 $x \in M$，则

$$0 \leqslant (T^* x - x, T^* x - x) = \|T^* x\|^2 - \|x\|^2$$
$$\leqslant \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0,$$

故 $T^* x = x$，$M \subset N$. 同理可证 $N \subset M$，因此 $M = N$.

9. 设 T 是复的 l^2 空间中的线性算子，$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots)$，$Tx = (0, 0, \xi_3, \xi_4, \cdots)$，试问 T 是有界自伴算子吗？是正算子吗？

解 因为 $(Tx, x) = \sum_{n=3}^{\infty} |\xi_n|^2 \geqslant 0$，$\|Tx\| \leqslant \|x\|$，故 T 是复 l^2 空间中的有界自伴算子，且是正算子.

10. 设 T 为希尔伯特空间 H 上的有界线性算子，$\{e_n\}$ 为 H 中的完备标准直交系，若对任何 m, n 有 $(Te_n, e_m) = \overline{(Te_m, e_n)}$，则 T 自伴.

证 任取 $x, y \in H$，$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$，$y = \sum_{k=1}^{\infty} (y, e_k) e_k$，令

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k, \qquad y_n = \sum_{k=1}^{n} (y, e_k) e_k,$$

据条件 $(Te_n, e_m) = \overline{(Te_m, e_n)} = (e_n, Te_m)$ 可得

$$(Tx_n, y_n) = (x_n, Ty_n).$$

故

$$(Tx, y) = (x, Ty), \qquad \forall x, y \in H,$$

T 是自伴算子.

11. 设 $\{e_k\}$ $(k = 1,2,3,\cdots)$ 是希尔伯特空间 H 中的标准直交系，L 是 $\{e_k\}$ 张

成的线性子空间,证明 $\bar{L}$ 上的投影算子 P 可表成

$$Px = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k, \qquad x \in H.$$

证 $x\in H, Px\in \bar{L}$,由于 $\bar{L}$ 本身可视为完备内积空间,故 $\{e_k\}$ 是 $\bar{L}$ 中的完备标准直交系,从而

$$Px = \sum_{k=1}^{\infty}(Px,e_k)e_k = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k, \qquad x \in H.$$

12. 设 $\{e_k\}$ 是希尔伯特空间 H 中的标准直交系,$\lambda_n \to 0\ (n\to\infty)$,且每个 λ_n 是实数,令

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)e_n.$$

则 T 是全连续自伴算子.

证 令 $T_n x = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x,e_k)e_k$,容易证明 T_n 是定义在 H 上的有界自伴算子,$\|T_n\| = \max\limits_{1\le k\le n}|\lambda_k|$,且 T_n 是有穷秩算子.因为

$$\begin{aligned}\|(T_n - T)x\|^2 &= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k(x,e_k)e_k, \sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k(x,e_k)e_k\right)\\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k^2|(x,e_k)|^2\\ &\le \max_{n+1\le k<\infty}\lambda_k^2\cdot\|x\|^2,\end{aligned}$$

所以 $\|T_n - T\|\to 0(n\to\infty)$,故 T 全连续.又因为

$$\begin{aligned}(Tx,y) &= \lim_{n\to\infty}(T_n x,y) = \lim_{n\to\infty}(x,T_n y)\\ &= (x,Ty), \qquad \forall x,y \in H.\end{aligned}$$

故 T 是全连续自伴算子.

第六章 复习题与解答

1. 设 $X=C, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in C$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 必存在,在 C 中定义范数

$$\|x\| = \sup\{|x_{n+1}-x_n|: n=1,2,\cdots\},$$

这里规定 $x_0=0$,试证明 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 为 C 上的不连续线性泛函.

证 显然 $f(x)$ 是 C 上的线性泛函,取 $x=(1,2,\cdots,n,n,\cdots)$,则 $\|x\|=1$,而 $f(x)=n$.所以 $\|f\|\ge n\ (\forall n)$,故 f 是 C 上的不连续线性泛函.

2. 设 X 为巴拿赫空间,$L\subset X$ 为闭子空间,$x_0\in X$,且 $\rho(x_0,L)=d>0$,则 $G=\{\alpha x_0+y:\alpha\in K, y\in L\}$ 是 X 中的闭子空间.

证 设 $z_0\in G$，则存在 $z_n=\alpha_n x_0+y_n\to z_0$，其中 $\alpha_n\in K$，$y_n\in L$。因为 $\rho(x_0,L)=d>0$，故存在 $f_0\in X^*$，使 $f_0(x_0)=1$，$f_0(y)=0\ (\forall\, y\in L)$，于是

$$f_0(z_n)=\alpha_n\to f_0(z_0).$$

令 $\alpha_0=f_0(z_0)$，则 $\alpha_n\to\alpha_0$，$y_n=z_n-\alpha_n x_0\to z_0-\alpha_0x_0\quad(n\to\infty)$，又因为 L 闭，故 $y_0=z_0-\alpha_0x_0\in L$，$z_0=\alpha_0x_0+y_0\in G$，因此 G 是 X 中的闭子空间。

3. 试证明 $C[0,1]$ 中的算子序列 $A_nx(t)=x(t^{1+\frac{1}{n}})$ 强收敛于恒同算子 I，但不是依算子范数收敛。

证 任取 $x(t)\in C[0,1]$，$\forall\,\varepsilon>0$，存在 $\delta>0\quad(\delta<1)$，使 $t_1,t_2\in[0,1]$，$|t_1-t_2|<\delta$ 时，有

$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon.$$

令 $0<\delta_0<\frac{\delta}{2}$，则 $t\in[0,\delta_0]$ 时

$$|t^{1+\frac{1}{n}}-t|<2t<\delta\qquad(n=1,2,3,\cdots),$$

从而当 $t\in[0,\delta_0]$ 时，对一切自然数 n，有

$$|A_nx(t)-x(t)|=|x(t^{1+\frac{1}{n}})-x(t)|<\varepsilon.$$

当 $t\geqslant\delta_0$ 时，存在 N，使得 $n>N$ 时，有

$$|t^{1+\frac{1}{n}}-t|<\delta.$$

因此，$n>N$ 时对一切 $t\in[0,1]$，有

$$|x(t^{1+\frac{1}{n}})-x(t)|<\varepsilon.$$

故 $A_n\xrightarrow{s}I$。下面证明 $\|A_n-I\|\not\to 0$，取定 $t_0\in(0,1)$，对每个 n，作 $C[0,1]$ 中的函数 $x_n(t)$ 如下

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,t_0^{1+\frac{1}{n}}],\\ 1, & t\in[t_0,1],\\ \text{线性}, & t\in[t_0^{1+\frac{1}{n}},t_0],\end{cases}$$

则 $\|x_n\|=1$，而

$$\|A_n-I\|\geqslant\|(A_n-I)x_n\|\geqslant|x_n(t_0^{1+\frac{1}{n}})-x_n(t_0)|=1.$$

故 $\|A_n-I\|\not\to 0$。

4. 设 X 为巴拿赫空间，E_1,E_2 为 X 的闭子空间，且 $X=E_1\dot{+}E_2$（$E_1\dot{+}E_2$ 表示直接和）。试证明存在 $M>0$，使得对一切 $x\in X$，有

$$\|x_1\|\leqslant M\cdot\|x\|,\qquad\|x_2\|\leqslant M\cdot\|x\|.$$

其中 $x=x_1+x_2$，$x_i\in E_i\quad(i=1,2)$.

证法 1 在 $X=E_1\dot{+}E_2$ 中定义新范数

$$|||x|||=\|x_1\|+\|x_2\|\qquad(x=x_1+x_2\in X).$$

容易证明$(X,|||x|||)$完备，且

$$\|x\|=\|x_1+x_2\|\leqslant|||x|||.$$

据巴拿赫逆算子定理的推论，必存在 $K>0$，使

$$K\cdot|||x|||\leqslant\|x\|,$$

于是

$$\|x_i\|\leqslant\frac{1}{K}\|x\|\qquad(i=1,2).$$

证法 2 定义映射 $T_i:X\to E_i\quad(i=1,2)$如下：$x=x_1+x_2\in X$

$$T_i(x_1+x_2)=x_i\qquad(i=1,2).$$

则可以证明 T_i 是 X 到 E_i 的闭线性算子，由闭图像定理，$T_i\quad(i=1,2)$有界，令 $M=\max(\|T_1\|,\|T_2\|)$，则

$$\|x_i\|\leqslant M\cdot\|x\|\qquad(i=1,2).$$

5. 设 $C[0,1]$按范数 $\|\cdot\|_1$ 为巴拿赫空间，且 $\|x_n-x\|_1\to0\quad(n\to\infty)$时，对一切 $t\in[0,1]$，$|x_n(t)-x(t)|\to0\ (n\to\infty)$，试证明 $\|\cdot\|_1$ 必与范数 $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$等价.

证 考察恒同算子 $I:(C[0,1],\|\cdot\|)\to(C[0,1],\|\cdot\|_1)$，显然 I 是一对一的，且满射. 设$\{x_n\}\subset C[0,1]$，$x,y\in C[0,1]$，使

$$\|x_n-x\|\to0,\qquad\|x_n-y\|_1\to0\qquad(n\to\infty).$$

由条件可知，对一切 $t\in[0,1]$

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)|&\leqslant|x(t)-x_n(t)|+|x_n(t)-y(t)|\\&\leqslant\|x_n-x\|+|x_n(t)-y(t)|\to0\ (n\to\infty),\end{aligned}$$

所以 $x=y$，即 $Ix=y$，这说明 I 是闭算子，从而是有界线性算子，再由巴拿赫逆算子定理知 I^{-1}也是有界的，故

$$\|x\|_1\leqslant\|I\|\cdot\|x\|,$$

$$\|x\|\leqslant\|I^{-1}\|\cdot\|x\|_1,\qquad\forall x\in C[0,1].$$

即 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1$ 是等价的.

6. 设 X 为巴拿赫空间，E_1,E_2 为 X 的闭子空间，且 $X=E_1\dot{+}E_2$，如果 $x=x_1+x_2\in X$时$(x_1\in E_1,x_2\in E_2)$，我们令 $Px=x_1$，则 P 是X 到E_1 上的有界线性算子，且满足 $P^2=P$.

证 因为 $X=E_1+E_2$，$Px=x_1(\forall x=x_1+x_2\in X)$，则

$$P^2 x = Px_1 = x_1 = Px \qquad (\forall x \in X),$$

所以 $P^2 = P$. 为了证明 P 是有界算子,只须证明 P 是闭线性算子. 设 $x_n = x_n^{(1)} + x_n^{(2)} \to x(x_n^{(1)} \in E_1, x_n^{(2)} \in E_2)$, $Px_n = x_n^{(1)} \to y_1 \in X$, 因为 E_1 闭,所以 $y_1 \in E_1$. 由 $\{x_n\}$, $\{x_n^{(1)}\}$ 的收敛性可得

$$x_n^{(2)} \to y_2 \in E_2.$$

于是

$$x = y_1 + y_2.$$

故 $Px = y_1$, P 是闭线性算子.

7. 设 X, Y, Z 都是巴拿赫空间,如果 $A \in \mathscr{B}(X, Z)$, $B \in \mathscr{B}(Y, Z)$. 且对任何 $x \in X$, 方程 $Ax = By$ 都有惟一的解 y, 令 $Tx = y$, 则 $T \in \mathscr{B}(X, Y)$.

证 只要证明 T 是闭算子,设 $\{x_n\} \subset X$, $x_n \to x$, $Tx_n \to y \in Y$. 由 T 的定义, $Ax_n = BTx_n$. 因为 A, B 都是连续的,所以

$$Ax = By,$$

再由 T 的定义得

$$Tx = y.$$

因此, T 是闭算子, T 是线性算子显然,则据闭图像定理, $T \in \mathscr{B}(X, Y)$.

8. 设 X 为巴拿赫空间, $A_n, T \in \mathscr{B}(X)$, $n = 1, 2, \cdots$, T 为紧算子,且 A_n 强收敛于 0, 试证明 $\{A_n T\}$ 一致收敛于 0.

证 任取 X 中的一有界集 M, 因为 T 紧,则 $T(M)$ 是列紧集, $\forall \varepsilon > 0$, 必存在 $T(M)$ 的有穷 ε-网 $\{Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_k\}$. 对 $Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_k$, 由条件,存在 N, 使 $n > N$ 时,有

$$\| A_n T x_i \| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

任取 $x \in M$, 存在 $x_{i_0} (1 \leqslant i_0 \leqslant k)$, 使

$$\| Tx - Tx_{i_0} \| < \varepsilon.$$

因为 $A_n \xrightarrow{s} 0$, 所以 $\| A_n \| \leqslant K \quad (\forall n)$. 于是 $n > N$ 时,有

$$\begin{aligned} \| A_n T x \| &\leqslant \| A_n T x_{i_0} \| + \| A_n T x - A_n T x_{i_0} \| \\ &\leqslant \varepsilon + K\varepsilon. \end{aligned}$$

故 $\{A_n T\}$ 一致收敛于 0.

9. 设 X 为巴拿赫空间, G 为 X 的闭子空间, T 是由 G 到有界数列空间 l^∞ 的有界线性算子,则 T 一定可以延拓为 X 到 l^∞ 的有界线性算子 $\tilde{T}$, 且满足 $\| \tilde{T} \| = \| T \|$.

(提示:设 $Tx = (\xi_i)$, $x \in G$, 作 G 上的有界线性泛函

$$f_i(x) = \xi_i \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots),$$

并应用哈恩-巴拿赫定理).

证 设 $Tx=(\xi_i)$,$x\in G$,$(\xi_i)\in l^\infty$.作 G 上的有界线性泛函

$$f_i(x)=\xi_i \qquad (i=1,2,3,\cdots),$$

应用哈恩-巴拿赫定理将 f_i 保范延拓到 X 上,记作 $\tilde{f}_i$,$\tilde{f}_i\in X^*$.$x\in X$ 时,记 $\tilde{f}_i(x)=\tilde{\xi}_i$ $(i=1,2,3,\cdots)$,每个 $\|\tilde{f}_i\|=\|f_i\|\leqslant\|T\|$,所以$(\tilde{\xi}_i)\in l^\infty$.再令 $\tilde{T}x=(\tilde{\xi}_i)(x\in X)$.显然 $\|\tilde{T}\|\geqslant\|T\|$.又因为

$$\|\tilde{T}x\|=\sup_i|\tilde{\xi}_i|=\sup_i|\tilde{f}_i(x)|\leqslant\|T\|\cdot\|x\|,$$

所以

$$\|\tilde{T}\|\leqslant\|T\|.$$

从而 $\|\tilde{T}\|=\|T\|$.

10. 设 f 是赋范线性空间 X 上的线性泛函,则 f 连续的充要条件是:f 的零空间 $N(f)$为 X 的闭子空间.

(提示:充分性.不妨设 $f\neq0$,任给 $\varepsilon>0$,取 $x_0\in X$,使 $f(x_0)=\varepsilon$,考察集合 $N(f)+x_0=\{x_0+x:x\in N(f)\}$,利用 $0\overline{\in}N(f)+x_0$,证明 $f(x)$在 $x=0$ 点连续).

证 必要性显然.

充分性:设 $N(f)$闭,我们证明 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使 $\|x\|<\delta$ 时,有 $|f(x)|<\varepsilon$.不妨设 $f\neq0$,取 $x_0\neq0$,使 $f(x_0)=\varepsilon$.考察集合

$$N(f)+x_0=\{x_0+x:x\in N(f)\}.$$

因为 $N(f)$闭,则 $N(f)+x_0$ 也闭,且 $0\overline{\in}N(f)+x_0$,从而存在 $\delta>0$,使 $S(0,\delta)\cap(N(f)+x_0)=\varnothing$,于是可以证明当 $x\in S(0,\delta)$时,$|f(x)|<\varepsilon$.

事实上,设不然,即存在 $x\in S(0,\delta)$,使 $|f(x)|\geqslant\varepsilon$.令 $y=\frac{\varepsilon x}{f(x)}$,则 $\|y\|\leqslant\|x\|<\delta$,且 $f(y-x_0)=\varepsilon-f(x_0)=0$,故 $y\in S(0,\delta)\cap(N(f)+x_0)$,矛盾.证毕.

11. 设 H 为希尔伯特空间,A,B 是定义在 H 上的线性算子,且满足

$$(Ax,y)=(x,By) \qquad (\forall x,y\in H).$$

试证明 A 是有界的.

证 为了证明 A 的有界性,我们只要证明 A 为闭算子.设

$$x_n\to x, \qquad Ax_n\to z,$$

则对一切 $y\in H$,有

$$\begin{aligned}(z,y)&=\lim_{n\to\infty}(Ax_n,y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,By)\\&=(x,By)=(Ax,y),\end{aligned}$$

所以 $Ax=z$,A 是闭线性算子.

*12. 设 X 为巴拿赫空间,G,M 为 X 的闭子空间,$G\cap M=\{0\}$,则$G+M=$

$\{x+y: x\in G, y\in M\}$是闭子空间的充要条件是：存在 $\alpha>0$，使得对一切 $x\in G$，$y\in M$，有

$$\|x\| \leqslant \alpha\|x+y\|.$$

证　必要性：设 $G+M$ 是 X 中的闭子空间，定义映射 $T: G+M\to G$ 如下

$$T(x+y)=x.$$

下面证明 T 是闭算子，设 $u_n=x_n+y_n\to u_0$，$Tu_n=x_n\to x_0$，其中 $x_n\in G$，$y_n\in M$。则 $y_n\to u_0-x_0$，令 $y_0=u_0-x_0$，因为 $G, M, G+M$ 均闭，所以 $x_0\in G$，$y_0\in M$，$u_0\in G+M$，且 $u_0=x_0+y_0$，故 $Tu_0=x_0$，即 T 闭，则由闭图像定理，T 必有界，所以

$$\|x\| = \|T(x+y)\| \leqslant \|T\|\cdot\|x+y\|.$$

充分性：设存在 $\alpha>0$，使 $\|x\|\leqslant\alpha\cdot\|x+y\|$ $(\forall x\in G, y\in M)$。任取 $x_n+y_n\in G+M$，$x_n+y_n\to z\in\overline{G+M}$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使 $n,m>N$ 时，有

$$\begin{aligned}\|x_n-x_m\| &\leqslant \alpha\|x_n-x_m+y_n-y_m\|\\ &= \alpha\|(x_n+y_n)-(x_m+y_m)\|\\ &< \alpha\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $x_n\to x_0\in G$，从而 $y_n\to y_0\in M$，$z=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=x_0+y_0\in G+M$，$G+M$ 闭性得证。

*13. 设 $X, X_\alpha(\alpha\in\mathscr{A})$是一族巴拿赫空间，记

$$Y=\{(y_\alpha): y_\alpha\in X_\alpha, \sup_\alpha\|y_\alpha\|<\infty\},$$

在 Y 中规定线性运算同 $\mathbf{R}^n$，范数

$$\|(y_\alpha)\| = \sup_\alpha\|y_\alpha\|.$$

试证明

(1) Y 是一个巴拿赫空间；

(2) 设 $T_\alpha\in\mathscr{B}(X, X_\alpha)$ $(\alpha\in\mathscr{A})$，若对一切 $x\in X$，$\sup\limits_\alpha\|T_\alpha x\|<\infty$，令 $Tx=(T_\alpha x)$，则 T 是 $X\to Y$ 中的有界线性算子。

(提示：(2) 作算子 $\widetilde{T}_\alpha\in\mathscr{B}(X, Y)$ $(\alpha\in\mathscr{A})$如下：$\widetilde{T}_\alpha x=(y_\beta)$，其中

$$y_\beta=\begin{cases}T_\alpha x, & \beta=\alpha \text{ 时},\\ 0, & \beta\neq\alpha \text{ 时}.\end{cases}$$

并应用共鸣定理)。

证　(1) $\|(y_\alpha)\|=\sup\limits_\alpha\|y_\alpha\|$ 显然满足范数的三个条件。我们仅证明 Y 的完备性。设$(y_\alpha^{(n)})\subset Y$ 是基本列，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使 $n,m>N$ 时，有

$$\sup_\alpha\|y_\alpha^{(n)}-y_\alpha^{(m)}\|<\varepsilon,$$

故对每个 $\alpha\in\mathscr{A}$，$\{y_\alpha^{(n)}\}$是巴拿赫空间 X_α 中的基本列，令

$$\lim_{n\to\infty} y_\alpha^{(n)} = y_\alpha, \qquad \alpha \in \mathscr{A}.$$

记 $y=(y_\alpha)$，下证 $(y_\alpha)\in Y$，且 $\|(y_\alpha^{(n)})-(y_\alpha)\|\to 0\ (n\to\infty)$. 因为 $n,m>N$ 时

$$\|y_\alpha^{(n)} - y_\alpha^{(m)}\| < \varepsilon \qquad (\forall \alpha \in \mathscr{A}),$$

所以 $n>N$ 时

$$\|y_\alpha^{(n)} - y_\alpha\| \leqslant \varepsilon \qquad (\forall \alpha \in \mathscr{A}).$$

从而 $(y_\alpha)\in Y$，且

$$\|(y_\alpha^{(n)}) - (y_\alpha)\| \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

(2) 作 $\widetilde{T}_\alpha \in \mathscr{B}(X,Y)\quad (\alpha\in\mathscr{A})$

$$\widetilde{T}_\alpha x = (y_\beta) = \begin{cases} T_\alpha x, & \beta = \alpha \text{ 时}, \\ 0, & \beta \neq \alpha \text{ 时}, \end{cases}$$

则 $\|\widetilde{T}_\alpha x\|_Y = \|T_\alpha x\|_{X_\alpha}$，所以 $\|\widetilde{T}_\alpha\| = \|T_\alpha\|$. 由条件，对每个 $x\in X$，$\sup\limits_\alpha \|\widetilde{T}_\alpha x\|_Y<\infty$，则由共鸣定理得 $\{\|\widetilde{T}_\alpha\|\}$ 一致有界，即 $\{\|T_\alpha\|\}$ 一致有界，故 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$.

14. 设 X 为赋范线性空间，$T, T_n\in\mathscr{B}(X)\quad (n=1,2,3,\cdots)$，证明

(1) 当 $\|T_n - T\|\to 0$ 时，$\|T_n^* - T^*\|\to 0$；

(2) 当 $\{T_n\}$ 强收敛于 T 时，$\{T_n^*\}$ 未必强收敛于 T^*；

(3) 当对任何 $x\in X$，$\{T_n x\}$ 弱收敛于 Tx 时，对任何 $f\in X^*$，$\{T_n^* f\}$ * 弱收敛于 $T^* f$.

证 (1) 因为 $\|T_n^* - T^*\| = \|(T_n - T)^*\| = \|T_n - T\|$，所以当 $\|T_n - T\|\to 0$ 时，必有 $\|T_n^* - T^*\|\to 0$.

(2) 在 l^2 中考察算子 $T:(x_1,x_2,\cdots)\to(x_2,x_3,\cdots)$，则 $T^*: l^2\to l^2$，$(x_1,x_2,\cdots)\to(0,x_1,x_2,\cdots)$，于是对 $(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$ 有

$$\|T^n x\| = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

故 $T^n \xrightarrow{s} 0$. 但

$$\|(T^n)^* x\| = \|(T^*)^n x\| = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|x\|,$$

故 $(T^n)^* \not\to 0$.

(3) 设 $\forall x\in X$，$\{T_n x\}$ 弱收敛于 Tx. $T_n^*\in\mathscr{B}(X^*)$，$\forall f\in X^*$，$x\in X$，$T_n^* f(x) = f(T_n x)\to f(Tx) = T^* f(x)$，所以

$$T_n^* f \xrightarrow{w^*} T^* f.$$

15. 设 $\{x_n\}$ 为希尔伯特空间 H 的直交系，证明下列三个条件等价：

(i) $\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$强收敛;

(ii) $\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$弱收敛;

(iii) $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$.

证 (i)⇒(ii)显然.

(ii)⇒(iii) 设$\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$弱收敛,则存在 $M>0$,使

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 \leqslant M \qquad (\forall n \in \mathbf{N}).$$

由于$\{x_i\}$是 H 中的直交系,故

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 \leqslant M \qquad (\forall n \in \mathbf{N}),$$

从而 $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 \leqslant M < \infty$.

(iii)⇒(i) $m>n$ 时,由

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{m} x_i\right\|^2 = \left\|\sum_{i=n+1}^{m} x_i\right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} \|x_i\|^2$$

可知$\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$是$H$ 中的基本列,故必强收敛.

16. 设 H 是实希尔伯特空间,$T\in\mathscr{B}(H)$,如果对一切 $x\in H$,有

$$(Tx,x) \geqslant a(x,x) \qquad (a>0 \text{ 为常数}).$$

则 $T^{-1}\in\mathscr{B}(H)$,且 $\|T^{-1}\| \leqslant a^{-1}$.

证 由条件易知 T 是一对一的.下证 $R(T)=H$ 及 $\|T^{-1}\| \leqslant \frac{1}{a}$.任取 $z\in H$,$z\perp R(T)$,则对一切 $x\in H$

$$(Tx,z) = 0,$$

故

$$a(z,z) \leqslant (Tz,z) = 0, \qquad z = 0.$$

从而$\overline{R(T)}=H$.另一方面,由条件$(Tx,x)\geqslant a(x,x)$可得

$$\|Tx\| \geqslant a\|x\|,$$

所以$\|T^{-1}\| \leqslant \frac{1}{a}$.再由 T^{-1}有界性,易知 $R(T)$闭,故 $R(T)=H$,即 $T^{-1}\in\mathscr{B}(H)$.

*17. 设 H 为希尔伯特空间,$T\in\mathscr{B}(H)$,则 $R(T)=H$ 的充要条件是存在 $\alpha>0$,使

$$\| T^* x \| \geqslant \alpha \| x \|, \qquad \forall x \in H.$$

证 必要性：设 $R(T)=H$，则 $N(T^*)=R(T)^{\perp}=\{0\}$，$T^*$ 一对一．令 $\mathscr{F}=\{x\in H: \|T^* x\|\leqslant 1\}$，$x\in\mathscr{F}$ 时，令

$$f_x(y) = (y, x), \qquad \forall y \in H,$$

则 f_x 为 H 上的有界线性泛函，且 $\|f_x\| = \|x\|$．对每个 $y\in H$，存在 $z\in H$，使 $y=Tz$

$$|f_x(y)| = |(y,x)| = |(Tz,x)| = |(z,T^* x)|,$$

所以

$$\sup_{x\in\mathscr{F}} |f_x(y)| \leqslant \|z\| < \infty, \qquad y \in H.$$

则据共鸣定理

$$\sup_{x\in\mathscr{F}} \|f_x\| = \sup_{x\in\mathscr{F}} \|x\| \leqslant K < \infty.$$

$y\neq 0$ 时，$T^* y\neq 0$，可令 $x=\dfrac{y}{\|T^* y\|}$，则 $x\in\mathscr{F}$，所以

$$\|x\| = \frac{\|y\|}{\|T^* y\|} \leqslant K,$$

从而

$$\|T^* y\| \geqslant \frac{1}{K}\|y\|, \qquad \forall y \in H.$$

充分性：设条件成立，$x\in H$，令

$$f(y) = (\overset{-1}{T^*} y, x), \qquad \forall y \in R(T^*).$$

则 f 是 $R(T^*)$ 上的有界线性泛函，据延拓定理，可得 f 延拓为 H 上的有界线性泛函，仍记为 f，设 $f\leftrightarrow z$，即

$$f(y) = (y, z), \qquad \forall y \in H,$$

$$f(T^* y) = (y, x) = (T^* y, z) = (y, Tz), \qquad \forall y \in H.$$

所以 $x=Tz$，即 $R(T)=H$．

18． 赋范线性空间 X 称为序列弱完备的，是指若对每一个 $f\in X^*$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在，则存在 $x\in X$，使 $x_n \xrightarrow{w} x$．试证明自反空间都是序列弱完备的．

证 设 $X=X^{**}$，并设对一切 $f\in X^*$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在，记

$$x_n^{**} = Jx_n,$$

其中 J 为 $X\to X^{**}$ 的自然嵌入映射，则 $x_n^{**}(f)=f(x_n)$ 对一切 $f\in X^*$ 收敛，则由共鸣定理知存在 $x^{**}\in X^{**}$，使

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{**}(f) = x^{**}(f), \qquad \forall f \in X^*.$$

再令 $x^{**}=Jx$，$x\in X$，则得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x), \qquad \forall f \in X^*.$$

故 $x_n \xrightarrow{w} x$，X 是序列弱完备的.

19. 设 X 为赋范线性空间，试证明

(1) 序列弱完备的赋范线性空间必是巴拿赫空间；

(2) 设 X 是序列弱完备的，F 是 X 的任一闭子空间，则 F 本身是序列弱完备的.

证 (1) 任取 $\{x_n\}\subset X$ 为基本列，则对一切 $f\in X^*$，$\{f(x_n)\}$ 为柯西(Cauchy)点列必收敛，因为 X 是序列弱完备的，故存在 $x_0\in X$，使

$$x_n \xrightarrow{w} x_0.$$

设 $f\in X^*$，$\|f\|=1$，则存在 N，使 $n,m>N$ 时，有

$$|f(x_n)-f(x_m)| = |f(x_n-x_m)| \leqslant \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

上式中令 $m\to\infty$，则 $n>N$ 时，对一切 $f\in X^*$，$\|f\|=1$，有

$$|f(x_n)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon,$$

$$\|x_n - x_0\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x_n - x_0)| \leqslant \varepsilon \qquad (n>N).$$

故 $x_n \xrightarrow{s} x_0$，X 为巴拿赫空间.

(2) 任取 $\{x_n\}\subset F$，$\forall f\in X^*$，$\{f(x_n)\}$ 收敛，因为 X 是序列弱完备的，则存在 $x_0\in X$，使 $x_n \xrightarrow{w} x_0$. 据§6.3 习题 9，$x_0\in F$，故 F 是序列弱完备的.

20. 赋范线性空间 X 称为一致凸的，是指对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$ ($\|x\|=\|y\|=1$)，就有 $\|x+y\|\leqslant 2-\delta$. 证明

(1) 内积空间是一致凸的；

(2) 在一致凸空间中，若 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x，且 $\|x_n\|\to\|x\|$，则 $\{x_n\}$ 强收敛于 x.

证 (1) 设 X 为内积空间，$\forall \varepsilon>0$，$\|x-y\|\geqslant\varepsilon$ ($\|x\|=\|y\|=1$)，则

$$(x-y,x-y)\geqslant\varepsilon^2,$$

从而

$$(x,y)+(y,x)\leqslant 2-\varepsilon^2,$$

$$\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) \leqslant 4-\varepsilon^2,$$

$$\|x+y\| \leqslant \sqrt{4-\varepsilon^2} = 2-\delta，其中\ \delta>0.$$

故 X 是一致凸的.

(2) **证法 1** 设 X 一致凸，$x_n \xrightarrow{w} x$，且 $\|x_n\|\to\|x\|$，而 $x_n \not\to x$，则存在 $\varepsilon_0>0$ 以及 $\{n_k\}$，使

$$\|x_{n_k} - x\| \geqslant \varepsilon_0,$$

不妨设 $x\neq 0$ 以及 $\|x_{n_k}\|=\|x\|=1$. 据一致凸性,存在 $\delta>0$,使

$$\frac{\|x_{n_k}+x\|}{2}\leqslant 1-\delta.$$

又据哈恩-巴拿赫定理,存在 $f\in X^*$,使 $\|f\|=1, f(x)=\|x\|$.

$$\left|f\left(\frac{x_{n_k}+x}{2}\right)\right|\leqslant 1-\delta,$$

但

$$\lim_{k\to\infty}f\left(\frac{x_{n_k}+x}{2}\right)=f(x)=\|x\|=1,$$

矛盾,故 $x_n\xrightarrow{s}x$.

证法 2 不妨设 $\|x\|=\|x_n\|=1, n=1,2,3,\cdots$. 先证明若 $2-\|x+x_n\|\to 0\ (n\to\infty)$,则必有 $\|x_n-x\|\to 0\ (n\to\infty)$.

设不然,则存在 $\varepsilon_0>0$ 及 $\{n_k\}$,使 $\|x_{n_k}-x\|\geqslant\varepsilon_0$. 因为 X 一致凸,则存在 $\delta>0$,使 $\|x+x_{n_k}\|\leqslant 2-\delta$,这与 $2-\|x+x_{n_k}\|\to 0\ (k\to\infty)$ 矛盾. 现在 $x_n+x\xrightarrow{w}2x$,则

$$\begin{aligned}2=2\|x\|&=\varliminf_{n\to\infty}\|x_n+x\|\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\|x_n+x\|\\&\leqslant\|x\|+\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=2,\end{aligned}$$

故 $\|x_n+x\|\to 2\quad(n\to\infty)$,从而 $x_n\xrightarrow{s}x$.

参考文献

1 郑维行,王声望.实变函数与泛函分析概要(第一册).第2版.北京:高等教育出版社,1989

2 郑维行,王声望.实变函数与泛函分析概要(第二册).第1版.北京:人民教育出版社,1980

3 夏道行等.实变函数与泛函分析(上、下册).第一版.北京:人民教育出版社,1979

4 严绍宗,童裕孙.实变函数论与泛函分析.北京:经济科学出版社,1992

5 A.Б.安托理维奇,П.Н.克尼亚泽夫,Я.В.提迪诺.泛函分析习题集(赵根榕译).北京:人民教育出版社.1981

6 关肇直.泛函分析讲义.北京:高等教育出版社,1959

7 I.J. Maddox. Elements of functional analysis. Cambridge, Cambridge University press, 1977

8 E.Kreyszig. Introductory functional analysis with applications. New York: John wiley & Sone. Inc. 1978

9 S.K, Berberian. Introduction to Hilbert space. New York: Oxford Univ, pr

10 П.Л那汤松.实变函数论(中译本).北京:高等教育出版社,1958

11 D.Cohn. Measure Theory. Poston, Birkhäuser, 1980

12 N.Dunford, J.Schwartz. Linear operators, Part Ⅰ: General theory. New York: Interscience Publishers, 1958

13 宋国柱,曹祥炎.抽象分析基础.南京:南京大学出版社.1999

附录　南京大学攻读硕士学位研究生入学考试实变函数试题选解

1981～1985 年，1995 年

试　　题

1. 设 E 为有界可测集，$mE>0$，证明对于任何 $0<q<mE$，存在 E 的可测子集 e，使 $me=q$（还可以讨论 E 为无界集的情形）.

2. 设 E 为可测集，$mE<+\infty$，则 E 上可测函数 $f(x)$ 可积的充要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|mE_n<+\infty,$$

其中 $E_n=\{x\in E: n-1\leqslant f(x)<n\}$.

3. 对于实数 A，用 $[A]$ 表示不超过 A 的最大整数，设 $f(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 上可积，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_a^b[nf(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

（$[nf(x)]$ 的可测性不必证明）.

4. 设 $f(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 上连续，$|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上囿变，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上囿变.

5. 设 A,B,C 为 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 上三个非空互不相交的有界闭集，试证存在一个于 $\mathbf{R}$ 上连续的函数 $f(x)$ 满足 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，且 $f(A)=0$，$f(B)=\frac{1}{2}$，$f(C)=1$.

6. 设 R 为实数加群，φ 为 R 上复值连续映射，满足

$$|\varphi(x)|=1\qquad(x\in R),$$

且 $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)(x,y\in R)$，试证存在 $u\in R$，使

$$\varphi(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\qquad(x\in R).$$

7. 函数 $f(x)$ 在康托尔集 P_0 的点上等于 10，而在 P_0 的具有长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的余区间上等于 $\frac{1}{2^n}$.

(1) 证明 $f(x)\in L^p[0,1]$ $(1\leqslant p<+\infty)$；

(2) 计算$(L)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

8. 试用叶果洛夫定理证明有界收敛定理,即若$\{f_n(x)\}$是 E 上的一串一致有界的可测函数,且在 E 上$f_n(x)$几乎处处收敛于 $f(x)$,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

9. 是非题与填空题

(1) 设 $1\leqslant p<q<+\infty$,则 $L^q(\mathbf{R})\subset L^p(\mathbf{R})$或 $L^p(\mathbf{R})\subset L^q(\mathbf{R})$两式必有一成立,这里 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$.(是非题).

(2) 设 $f\in L^\infty(\mathbf{R})$,$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,$a$ 为实数,则 $F(x)$ 几乎处处有有限导数(是非题).

(3) 康托尔三分集可用来说明(只须列出三件事).(填充题).

10. 设 $f(x)$是以 2π 为周期的平方可积函数且存在 $\alpha>0$ 满足

$$\| f(x+h)-f(x)\|_2 = o(h^{1+\alpha}) \qquad (h\to 0),$$

试证 $f(x)$几乎处处为常数.

11. 设 F 是 $\mathbf{R}^2$ 中闭集,则对几乎所有 $x\in F$,有

$$\rho(x+h,F) = o(|h|), \qquad h\to 0, \quad h\in\mathbf{R}^2,$$

其中 $\rho(z,F)$表示点 z 到集 F 的距离.

12. 设 $f\in L^p(\mathbf{R})$,则对任何 $p_1,p_2,p_1<p<p_2$,恒有

$$f\in L^{p_1}(\mathbf{R})+L^{p_2}(\mathbf{R}),$$

这里 $S_1+S_2=\{\varphi_1+\varphi_2:\varphi_1\in S_1,\varphi_2\in S_2\}$.并给出这种分解的一个应用(不要论证).

13. 设 $f(z)$为复平面上的解析函数,且无零点,A 为复平面上的紧集,$\{W_n\}$为收敛于 0 的点列,考虑复数集 $E_n=[f(A)]^{-1}W_n[f(A)]$,这里两集 X 与 Y 的"积"定义为 $XY=\{xy:x\in X,y\in Y\}$,xy 为复数乘积;X 的"逆"定义为 $X^{-1}=\{x^{-1}:x\in X\}$.试证,把 E 看成平面点集时,有

$$\lim_{n\to\infty} mE_n = 0.$$

14. 设 $E=(0,1)$,f,g 为 E 上非负可测函数,满足

$$f(x)g(x)\geqslant x^{-1} \qquad \text{a.e.}$$

试证

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m\int_E g(x)\mathrm{d}m\geqslant 2,$$

并问等号可否成立?

15. 令 $F(x)=\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{a-x}^{a+x} f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f\in L(-\infty,+\infty)$,且$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\mathrm{d}m\neq 0$,

$a\in(-\infty,+\infty)$，试证 $F\overline{\in}L(-\infty,+\infty)$.

16. 令 $\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，考虑集

$$E_\alpha=\{\mathbf{Z}+\alpha\mathbf{Z}\}.$$

问

(1) 当 α 为无理数时，E_α 有何性质？

(2) 要求 E_α 为闭集，α 应如何？

(3) 求 $\bigcup\limits_{\alpha\in P}E_\alpha$ 的测度，这里 P_0

表示[0,1]中的康托尔集.

17. 设 $f\overline{\in}L^p(-\infty,+\infty)$，这里 $p\geqslant1$，试作出函数列 $f_n,n=1,2,\cdots$，满足下列条件

$$\|f_n\|_{p'}=1,\qquad 这里\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f_n(x)\mathrm{d}x=\infty.$$

18. 设 $f(x)$是以 2π 为周期的实可测函数，若 f 又有周期 1，试证 $f(x)$几乎处处为常数. 这样的函数是否必为常数.

19. 设 $mE<\infty$，f_n,f 是 E 上的 a.e. 有限可测函数.

(1) 叙述 $f_n\xrightarrow{\text{mes}}f$ 和 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$ 的定义，并指出测度收敛和 a.e. 收敛之间的关系(不必举反例).

(2) 证明如果 $\{f_n\}$ 的任一子序列 $\{f_{n_k}\}$ 均有子序列 $\{f_{n_k'}\}$ a.e. 收敛于 f，则 $f_n\xrightarrow{\text{mes}}f$.

20.

(1) 设 $mE<\infty$，$f(x)$在 E 上 a.e. 有限，令 $E_n=E(|f|\geqslant n)$，试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}mE_n=0$；如果 $mE=+\infty$，$f(x)$在 E 上 a.e. 有限，试问等式 $\lim\limits_{n\to\infty}mE_n=0$ 是否成立.

(2) 设 $E=(0,+\infty)$，$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,n]\\ 0, & x\in(n,+\infty)\end{cases}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，试讨论 $\{f_n(x)\}$的几乎处处收敛性和近一致收敛性.

(3) 设 E 是可测集，$mE=1$，$\{E_n\}$是 E 中的一列可测子集，且 $mE_n=1$ $(n=1,2,3,\cdots)$，试证明 $m\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=1$.

21. 设 $mE<\infty$，$f_n(x),f(x)$在 E 上均(L)可积，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E|f_n-f|\mathrm{d}m=0$ 等价于下列两条件同时成立：

(1) $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$;

(2) 对任给的 $\varepsilon>0$,必存在 $\delta>0$,使对一切 $A\subset E$, $mA<\delta$ 时,有

$$\left|\int_A f_n(x)\mathrm{d}m\right|<\varepsilon \qquad (\forall\, n\in \mathbf{N}).$$

22.

(1) 设 f 是可测集 E 上 a.e. 大于零的可测函数,且满足 $\int_E f(x)\mathrm{d}m=0$,试证明 $mE=0$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 (L) 可积, $f(0)=0$, $f'(0)$ 存在,试证明积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}m$ 存在.

23.

(1) 设 $f(x)$, $g_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 均是可测集 E 上的 a.e. 有限可测函数, $A_n=\{x\in E: f\neq g_n\}$, $A=\varlimsup\limits_n A_n$,如果

$$mA_n<\frac{1}{2^n}, \qquad n=1,2,3,\cdots,$$

试证明 $g_n(x)$ a.e. 收敛于 $f(x)$.

(2) 设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的一列可测函数,如果 $f_n\xrightarrow{\text{mes}} f$,试证明必存在子序列 $\{f_{n_k}\}$,对任何 $\delta>0$,总存在可测子集 $E_\delta\subset E$,使 $m(E-E_\delta)<\delta$,且 $\{f_{n_k}\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 f (这里 mE 可以为 $+\infty$).

24.

(1) 设 f 是 $[0,1]$ 上处处有限可测函数,试证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1|\cos(\pi f(x))|^n\mathrm{d}x$ 存在有限,并计算这个极限值.

(2) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上非负广义可积函数, $f(0)=0$,试证明函数项级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}f(n^2x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 a.e. 收敛于一个可积函数.

25. 设 f, f_n $(n=1,2,3,\cdots)$ 都是可测集 E 上的 (L) 可积函数, $f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$,且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n(x)|\mathrm{d}m=\int_E|f(x)|\mathrm{d}m,$$

试证明对任一可测子集 $A\subset E$,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_A|f_n(x)|\mathrm{d}m=\int_A|f(x)|\mathrm{d}m.$$

解 答

1. 解 设 $a=\inf\limits_{x\in E}x$，$b=\sup\limits_{x\in E}x$，则 $E\subset[a,b]$，令

$$E_x=[a,x]\cap E,\qquad a\leqslant x\leqslant b,$$

则 $f(x)=mE_x$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数. 事实上，

$$|f(x+\Delta x)-f(x)|=|mE_{x+\Delta x}-mE_x|\leqslant|\Delta x|,$$

所以，当 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x+\Delta x)\to f(x)$.

又因为

$$f(a)=0,\qquad f(b)=mE,$$

由连续函数的介值定理，当 $0<q<mE$ 时，必有 $x_1\in[a,b]$，使

$$f(x_1)=q.$$

令 $e=[a,x_1]\cap E$，则

$$e\subset E,\qquad me=q.$$

若 E 为无界集，可作

$$f(x)=m([-x,x]\cap E)\qquad(0\leqslant x<\infty),$$

则 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的增函数，且

$$f(0)=0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=mE,$$

于是对任何 $0<q<mE$，必存在 $X>0$，使

$$q<f(X)<mE.$$

令 $E_1=[-X,X]\cap E$，E_1 为有界可测集，于是存在 $e\subset E_1\subset E$，使 $me=q$.

2. 证 本题的 $f(x)$ 是几乎处处有限的，否则充分性不成立，在这样的条件下，有

$$\int_E|f(x)|\,\mathrm{d}m=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)|\,\mathrm{d}m+\sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)|\,\mathrm{d}m.$$

当 $n\geqslant 1$ 时

$$(n-1)mE_n\leqslant\int_{E_n}|f(x)|\,\mathrm{d}m\leqslant n\cdot mE_n,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot mE_n-mE\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot mE_n-\sum_{n=1}^{\infty}mE_n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)mE_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)|\,\mathrm{d}m\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot mE_n.$$

当 $n\leqslant 0$ 时

$$|n| \cdot mE_n \leqslant \int_{E_n} |f(x)| \, \mathrm{d}m \leqslant |n-1| \cdot mE_n,$$

于是

$$\sum_{n=0}^{-\infty} |n| \cdot mE_n \leqslant \sum_{n=0}^{-\infty} \int_{E_n} |f(x)| \, \mathrm{d}m$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{-\infty} (|n|+1) mE_n \leqslant \sum_{n=0}^{-\infty} |n| \cdot mE_n + mE,$$

因此

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \cdot mE_n - mE \leqslant \int_E |f(x)| \, \mathrm{d}m$$

$$\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \cdot mE_n + mE.$$

因为 $mE < \infty$，所以 $f(x)$ 在 E 上可积的充分必要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \cdot mE_n < \infty.$$

3. 证 因为

$$\left| \frac{1}{n} [nf(x)] \right| \leqslant \frac{1}{n} (|nf(x)| + 1)$$

$$\leqslant |f(x)| + 1 \in L[a,b],$$

又

$$\left| \frac{1}{n} [nf(x)] - f(x) \right| = \frac{1}{n} |[nf(x)] - nf(x)|$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \to 0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} [nf(x)] = f(x).$$

由勒贝格控制收敛定理，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_a^b [nf(x)] \mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} [nf(x)] \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

4. 证 由题设

$$\bigvee_a^b |f| = \sup \sum_{k=1}^{n} \Big| |f(x_k)| - |f(x_{k-1})| \Big| < \infty.$$

对 $[a,b]$ 的任一分法 T

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

令 $V_T(f)=\sum\limits_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$ 表示 $f(x)$ 对应于分法 T 的变差.

若 $f(x_k)$ 与 $f(x_{k-1})$ 不是异号,则

$$||f(x_k)|-|f(x_{k-1})||=|f(x_k)-f(x_{k-1})|.$$

若 $f(x_k)$ 与 $f(x_{k-1})$ 异号,则由连续性,存在一点 $\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$,使 $f(\xi_k)=0$,于是

$$\begin{aligned}|f(x_k)-f(x_{k-1})|&\leqslant|f(x_k)-f(\xi_k)|+|f(\xi_k)-f(x_{k-1})|\\&=||f(x_k)|-|f(\xi_k)||+||f(\xi_k)|-|f(x_{k-1})||.\end{aligned}$$

对每个在端点上函数值异号的区间 (x_{k-1},x_k),加进使 $f(\xi_k)=0$ 的点 ξ_k,这样对应的分法 T 就成了一个新的分法 T',此时

$$V_T(f)=V_{T'}(|f|)\leqslant\bigvee_a^b(|f|)<\infty.$$

由于 T 是 $[a,b]$ 的任一分法,得

$$\bigvee_a^b(f)\leqslant\bigvee_a^b(|f|)<\infty.$$

注 另一方面,对任一分法 T,恒有

$$\sum_{k=1}^{n}||f(x_k)|-|f(x_{k-1})||\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|,$$

于是

$$\bigvee_a^b(|f|)\leqslant\bigvee_a^b(f),$$

由此可见,对于连续函数 $f(x)$,有 $\bigvee\limits_a^b(f)=\bigvee\limits_a^b(|f|)$ 成立.

5. **证** 令 $\rho(x,E)$ 为 x 到集 $E\subset\mathbf{R}$ 的距离,则 $\rho(x,E)$ 为 x 的非负连续函数 $(x\in\mathbf{R})$,令

$$f(x)=\frac{\rho(x,A\cup B)+\rho(x,A\cup C)}{\rho(x,A\cup B)+2\rho(x,A\cup C)+\rho(x,B\cup C)}.$$

注意到 A、B、C 是互不相交的非空有界闭集,即可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续,满足 $0\leqslant f(x)\leqslant1$,且当 $x\in A$ 时,$f(x)=0$,$x\in B$ 时,$f(x)=\frac{1}{2}$,$x\in C$ 时,$f(x)=1$.

6. **证** 在 $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$ 中,令 $x=0$ 得 $\varphi(0)=1$,又 φ 为连续函数,故必存在 $h>0$,使

$$\int_0^h\varphi(t)\mathrm{d}t=c\neq0,$$

于是

$$\varphi(x)=\frac{1}{c}\varphi(x)\int_0^h\varphi(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{c}\int_0^h\varphi(x)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{c}\int_0^h \varphi(x+t)\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\int_x^{x+h}\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

由此可见，$\varphi(x)$有连续导数 $\varphi'(x)$.

在等式 $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$两边对 y 求导，并令 $y=0$，得

$$\varphi'(x) = \varphi'(0)\varphi(x),$$

解此方程得

$$\varphi(x) = e^{iux} \qquad (u \in R).$$

7. 证 (1) 因为

$$(L)\int_0^1 |f(x)|^p \mathrm{d}x = 10^p \cdot mP_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}\left(\frac{1}{2^n}\right)^p$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{np}} < \infty,$$

所以

$$f(x) \in L^p[0,1] \qquad (1 \leqslant p < \infty).$$

(2)

$$(L)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 10 \cdot mP_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}\cdot\frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{4}.$$

8. 证 本题应有条件 $mE<\infty$，且不妨设 $mE>0$(否则结论显然成立).

设 $|f_n(x)|\leqslant M, n=1,2,\cdots, x\in E$，则 $|f(x)|\leqslant M$ 在 E 上 a.e. 成立.

任给 $\varepsilon>0$，由叶果洛夫定理，存在 $E_\varepsilon\subset E$，使

$$m(E-E_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{4M},$$

而在 E_ε 上，$f_n(x)$一致收敛于 $f(x)$. 因为

$$\left|\int_E f_n(x)\mathrm{d}x - \int_E f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \int_{E_\varepsilon}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x + \int_{E-E_\varepsilon}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x.$$

在 $E-E_\varepsilon$ 上，几乎处处有 $|f_n(x)-f(x)|\leqslant 2M$，所以

$$\int_{E-E_\varepsilon}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x \leqslant 2M\cdot m(E-E_\varepsilon)$$

$$< 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

在 E_ε 上，由 $f_n(x)$一致收敛于 $f(x)$知，存在 N，使当 $n>N$ 时，对一切 $x\in E_\varepsilon$，有 $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2mE}$，所以

$$\int_{E_\varepsilon} |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2mE}mE = \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n>N$ 时

$$\left|\int_E f_n(x)\mathrm{d}x - \int_E f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

9. 解 （1）结论不成立，例如当

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x\leqslant 1,\\ x^{-\frac{1}{3}}, & x>1,\end{cases}$$

$f\in L^4(\mathbf{R})$，但 $f\overline{\in} L^3(\mathbf{R})$；当

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x\leqslant 0 \text{ 或 } x>1,\\ x^{-\frac{1}{4}}, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

$f\in L^3(\mathbf{R})$，但 $f\overline{\in} L^4(\mathbf{R})$.

（2）结论成立．事实上，对任何包含 a 的区间 $[\alpha,\beta]$，由 $f\in L^\infty[\alpha,\beta]$ 知 $f\in L[\alpha,\beta]$．于是 $F(x)$ 为 $[\alpha,\beta]$ 上的绝对连续函数，从而 $F'(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上几乎处处存在且有限．由 $[\alpha,\beta]$ 的任意性知，$F'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上几乎处处存在且有限．

（3）康托尔三分集可用以说明：在 $\mathbf{R}$ 上势为 $\aleph$ 的集的测度不一定大于 0；完全集不一定包含任何区间；无孤立点的集合不一定有内点．

10. 证 令 $\varphi(t)=\|f(x+t)-f(x)\|_2$，任取 $l>0$，则由 $f(x)$ 的周期性得

$$\begin{aligned}\varphi(l) &= \|f(x+l)-f(x)\|_2\\ &\leqslant \left\|f(x+l)-f\left(x+\frac{l}{2}\right)\right\|_2+\left\|f\left(x+\frac{l}{2}\right)-f(x)\right\|_2\\ &= \left\|f\left(x+\frac{l}{2}\right)-f(x)\right\|_2+\left\|f\left(x+\frac{l}{2}\right)-f(x)\right\|_2\\ &= 2\varphi\left(\frac{l}{2}\right),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(l)}{l} &\leqslant \frac{2\varphi\left(\frac{l}{2}\right)}{l} = \frac{\varphi\left(\frac{l}{2}\right)}{l/2}\\ &\leqslant \frac{\varphi\left(\frac{l}{4}\right)}{\frac{l}{4}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{\varphi\left(\frac{l}{2^n}\right)}{\frac{l}{2^n}},\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，则$\frac{l}{2^n}\to 0$，由题设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi\left(\frac{l}{2^n}\right)}{l/2^n}=0,$$

因此$\frac{\varphi(l)}{l}=0$. 而 $l>0$，所以

$$\varphi(l)=\left\{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+l)-f(x)]^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}=0.$$

于是

$$f(x+l)-f(x)\sim 0,$$

由 l 的任意性，得

$$f(x)\sim 0.$$

11. 证　先设 F 为 $\mathbf{R}^2$ 中的有界集. 令

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in F,\\ 0, & x\in F,\end{cases}$$

则 $f\in L(\mathbf{R}^2)$. 因此几乎所有的 $x\in\mathbf{R}^2$ 为 $f(x)$的勒贝格点. 于是，对几乎所有的 $x\in\mathbf{R}^2$ 有

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{mB(x,r)}\int_{B(x,r)}f(y)\mathrm{d}y=f(x),$$

其中 $B(x,r)$表示 $\mathbf{R}^2$ 中以 x 为中心，r 为半径的圆. 于是对几乎所有的 $x\in F$，有

$$\lim_{r\to 0}\frac{m\{F\cap B(x,r)\}}{mB(x,r)}=1 \tag{1}$$

成立. 可以证明若 $x\in F$ 且满足(1)，则对任何 $\varepsilon>0$　($\varepsilon<1$)，当 h 充分小时，存在 $y\in F\cap B(x+h,\varepsilon|h|)$. 事实上，若此论断不对，则对任何 $\delta>0$，必有 $0<|h|<\delta$，使

$$F\cap B(x+h,\varepsilon|h|)=\varnothing,$$

从而有

$$\frac{m\{F\cap B(x,|h|+\varepsilon|h|)\}}{mB(x,|h|+\varepsilon|h|)}\leqslant\frac{mB(x,|h|+\varepsilon|h|)-mB(x+h,\varepsilon|h|)}{mB(x,|h|+\varepsilon|h|)}$$

$$=1-\frac{\pi\varepsilon^2|h|^2}{\pi(1+\varepsilon)^2|h|^2}=1-\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}<1,$$

此与(1)式相矛盾. 于是有

$$\rho(x+h,F)\leqslant\rho(x+h,y)\leqslant\varepsilon|h|.$$

由 ε 的任意性，得

$$\rho(x+h,F)=o(|h|),\qquad h\to 0,\ h\in\mathbf{R}^2.$$

若 F 为 $\mathbf{R}^2$ 中的无界闭集，则总可将 F 分成可列个有界闭集的并：$F=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$. 对任何一个 i，对几乎所有的 $x\in F_i$，有

$$\rho(x+h,F)\leqslant\rho(x+h,F_i)=o(|h|)\qquad(h\to 0),$$

于是对几乎所有的 $x\in F$，有

$$\rho(x+h,F)=o(|h|),\qquad h\to 0.$$

12. 证 对 $f\in L^p(\mathbf{R})$，令 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，其中

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当 } |f(x)|>1,\\ 0, & \text{当 } |f(x)|\leqslant 1,\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当 } |f(x)|\leqslant 1,\\ 0, & \text{当 } |f(x)|>1,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}}|f_1(x)|^{p_1}\mathrm{d}x&=\int_{\mathbf{R}}|f_1(x)|^{p}|f_1(x)|^{p_1-p}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{\mathbf{R}}|f(x)|^p\mathrm{d}x<\infty,\\\int_{\mathbf{R}}|f_2(x)|^{p_2}\mathrm{d}x&=\int_{\mathbf{R}}|f_2(x)|^{p}|f_2(x)|^{p_2-p}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{\mathbf{R}}|f(x)|^p\mathrm{d}x<\infty.\end{aligned}$$

应用这种分解，可以证明如下定理：如果 $1<r\leqslant\infty$，T 是一个从 $L^1(\mathbf{R})+L^r(\mathbf{R})$到可测函数空间上的半可加映射，且 T 是弱$(1,1)$型，弱(r,r)型的，则对任何 $1<p<r$，T 是(p,p)型的.

13. 证 由题设条件，可令

$$M=\max_{z\in A}|f(z)|,\quad m=\min_{z\in A}|f(z)|,$$

且有 $0<m\leqslant M<+\infty$，于是对任何 $w\in E_n$，有

$$|w|\leqslant\frac{M}{m}|w_n|,$$

故

$$mE_n\leqslant\pi\left(\frac{M}{m}\right)^2|w_n|^2,$$

由 $|w_n|\to 0$，得

$$\lim_{n\to\infty}mE_n=0.$$

14. 证 由赫尔德不等式

$$\int_E(x^{-1})^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\leqslant\int_E[f(x)g(x)]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_E f(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_E g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

而

$$\int_E x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = 2,$$

所以

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\int_E g(x)\mathrm{d}x \geqslant 4 > 2,$$

显然等号不会成立.

15. 证 设 $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f\mathrm{d}m\right| = l > 0$, 则存在 $N>0$,使当 $x>N$ 时

$$\left|\int_{a-x}^{a+x} f(t)\mathrm{d}m\right| > \frac{l}{2}.$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F| \mathrm{d}m \geqslant \int_N^{+\infty} \frac{1}{2x}\left|\int_{a-x}^{a+x} f(t)\mathrm{d}m\right|\mathrm{d}m$$

$$\geqslant \frac{l}{2}\int_N^{+\infty} \frac{1}{2x}\mathrm{d}m = \infty.$$

16. 解 (1) 当 α 为无理数时,则 E_α 为 $\mathbf{R}$ 上的可数稠密集. 可数性是显然的,下证稠密性. 即证,对任何 $x\in\mathbf{R}$,$\delta>0$,存在 $a,b\in\mathbf{Z}$,使

$$a + b\alpha \in (x-\delta, x+\delta).$$

对每个 $n_k\in\mathbf{N}$,存在 $m_k\in\mathbf{N}$,使 $0<n_k-m_k\alpha<\alpha$,即

$$n_k - \alpha < m_k\alpha < n_k.$$

令 $C_k = n_k - m_k\alpha\in[0,\alpha]$,设存在 $C_{k_l}\to x_0\in[0,\alpha]$,任取 $\delta>0$,必存在 L,使 $l\geqslant L$ 时有

$$\left|n_{k_l} - m_{k_l} - x_0\right| < \frac{\delta}{2}.$$

固定 L,$P>L$ 时

$$m_{k_L}\alpha + x_0 - \frac{\delta}{2} < n_{k_L} < m_{k_L}\alpha + x_0 + \frac{\delta}{2},$$

$$m_{k_p}\alpha + x_0 - \frac{\delta}{2} < n_{k_p} < m_{k_p}\alpha + x_0 + \frac{\delta}{2},$$

从而

$$(m_{k_p}\alpha - m_{k_L})\alpha - \delta < n_{k_p} - n_{k_L} < (m_{k_p} - m_{k_L})\alpha + \delta,$$

令 $N = m_{k_p} - m_{k_L}$,$-K = n_{k_p} - n_{k_L}$,则 $N\alpha - \delta < -K < N\alpha+\delta$,所以 $|N\alpha + K| < \delta$,故可取 $N,K\in\mathbf{Z}$,使 $0<N\alpha+K<\delta$. 于是对 $x\in\mathbf{R}$ 存在 $S\in\mathbf{Z}$,使

$$x-\delta< S(K+N\alpha)< x+\delta.$$

令 $a=SK, b=SN$，则

$$a+b\alpha\in(x-\delta,x+\delta).$$

(2) 当且仅当 α 为有理数时，E_α 为闭集．事实上：当 α 为无理数时，由(1) $\overline{E}_\alpha=\mathbf{R}\neq E_\alpha$，故 E_α 非闭．当 α 为有理数时，若 $\alpha=0$，则 $E_\alpha=\mathbf{Z}$，若 $\alpha\neq0$，令 $\alpha=\frac{p}{q}$，q 为正整数，$p\in\mathbf{Z}$，且 p,q 互质，则

$$E_\alpha=\bigcup_{a\in\mathbf{Z}}\left\{a+\frac{1}{q},\ a+\frac{2}{q},\cdots,a+\frac{q-1}{q}\right\},$$

可见当 α 为有理数时，E_α 无聚点．于是 $\overline{E}_\alpha=E_\alpha$，故 E_α 为闭集．

(3) 首先 $\bigcup\limits_{\alpha\in P_0}E_\alpha=\bigcup\limits_{a,b\in\mathbf{Z}}(a+bP_0)$，事实上

$$x\in\bigcup_{\alpha\in P_0}E_\alpha\Leftrightarrow \text{存在 } a,b\in\mathbf{Z},\ \alpha_0\in P_0,$$

使

$$x=a+b\alpha_0\Leftrightarrow x\in\bigcup_{a,b\in\mathbf{Z}}(a+bP_0),$$

于是

$$m\left(\bigcup_{\alpha\in P_0}E_\alpha\right)\leqslant\sum_{a,b\in\mathbf{Z}}m(a+bP_0)=0.$$

17. 解 当 $p>1$ 时，令 $a_n=\int_{-n}^{n}|f|^p\mathrm{d}x$，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_{-\infty}^{+\infty}|f|^p\mathrm{d}x=\infty.$$

又令

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{|f|^{\frac{1}{p'}+1}\operatorname{sgn}f}{a_n^{1/p'}}, & x\in(-n,n),\\ 0, & x\overline{\in}(-n,n),\end{cases}$$

则 $\|f_n\|_{p'}^{p'}=1$，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^{1/p'}}\int_{-n}^{n}|f|^p\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{n\to\infty}a_n^{1/p}=\infty.$$

当 $p=1$ 时，令

$$f_n(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}f(x), & x\in(-n,n),\\ 0, & x\overline{\in}(-n,n),\end{cases}$$

则 $\|f_n\|_\infty=1$，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$= \| f \|_1 = \infty.$$

18. 证 (i) 设 $f(x)$为$(-\infty, +\infty)$上的连续函数. 令

$$E_0 = \{2k\pi + l : k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\},$$

则 $f(x)$在 E_0 上为常数. 由本附录第 16 题知, E_0 在$(-\infty, +\infty)$上稠密. 由$f(x)$的连续性知, $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上恒为常数.

(ii) 设 $f(x)$在任一有穷区间 L 上可积, 令

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+s)\mathrm{d}s,$$

则对任何一个 $h>0$, $f_h(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续, 又因 $f(x)$以 1 为周期, 所以

$$f_h(x+1) = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+1+s)\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h f(x+s)\mathrm{d}s = f_h(x),$$

即 $f_h(x)$亦以 1 为周期. 同理, $f_h(x)$亦以 2π 为周期, 由(i)得 f_h 在$(-\infty, +\infty)$上恒为常数.

因 $f(x)$在任何有穷区间上 L 可积, 所以$\lim\limits_{h\to 0} f_h(x) = f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上几乎处处成立. 于是 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上几乎处处为常数.

(iii) 设 $f(x)$为实可测函数, 令

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leqslant n, \\ n, & |f(x)| > n, \end{cases} \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

则对每个 n, $f_n(x)$在任一有穷区间上 L 可积, 且以 1 和 2π 为周期. 由(ii)得, $f_n(x)$在$(-\infty, +\infty)$上几乎处处等于常数. 设 E_n 是使$f_n(x)$等于常数的点集, 则 $m\mathscr{C}E_n = 0$. 令 $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 $m\mathscr{C}E = 0$, 在 E 上, 每个 $f_n(x)$都为常数. 又 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 故 $f(x)$在 E 上为常数, 即 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上几乎处处为常数.

以上的 $f(x)$不一定为常数. 例如, 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_0, \\ 0, & x \overline{\in} E_0, \end{cases}$$

其中 $E_0 = \{2k\pi + l : k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$, 则 $f(x)$是以 1 和 2π 为周期的实可测函数, 但非常数.

19. 解 (1) $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f \Leftrightarrow$ 除去一个零测度集外, $f_n(x)$处处收敛于 $f(x)$. $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} mE(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) = 0$. 若 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 则 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$, 反之, 若 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$, 则存在子序列 $f_{n_k} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$.

(2) 设 $f_n \xrightarrow{\text{mes}}\!\!\!\!\!/\ f$,则存在 $\sigma>0,\varepsilon_0>0$ 以及子序列 $\{n_k\}$,使

$$mE(|f_{n_k}-f|\geqslant\sigma)\geqslant\varepsilon_0.$$

由条件 $\{f_{n_k}\}$ 必存在子序列 $f_{n_k'}\xrightarrow{\text{a.e.}}f$. 从而 $f_{n_k'}\xrightarrow{\text{mes}}f$ (因为 $mE<\infty$). 这与 $mE(|f_{n_k}-f|\geqslant\sigma)\geqslant\varepsilon_0$ 矛盾,故 $f_n\xrightarrow{\text{mes}}f$.

20. 解 (1) $E(|f|=\infty)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E(|f|\geqslant n)$,因为 $mE<\infty$,则

$$0=mE(|f|=\infty)=\lim_{n\to\infty}mE_n.$$

如果 $mE=+\infty$,则

$$mE(|f|=\infty)=\lim_{n\to\infty}mE_n$$

不一定成立,故 $\lim\limits_{n\to\infty}mE_n=0$ 不一定成立,例如 $E=(0,+\infty)$

$$f(x)=n,\qquad x\in(n,n+1],\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

$f(x)$ 处处有限, $mE_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}mE_n=+\infty$.

(2) 显然 $f_n(x)$ 在 E 上处处收敛于 1,但是对任何的 $\delta>0$ 以及任何可测子集 $E_\delta\subset E$,当 $m(E-E_\delta)<\delta$ 时,对每一个自然数 n, E_δ 不可能全部含于区间 $(0,n]$ 中,因此,必有一点 $x_n\in E_\delta\cap(n,+\infty)$,于是 $f_n(x_n)=0$,这样, $\{f_n\}$ 在 E_δ 上就不能一致收敛于 1,故 $f_n(x)$ 在 E 上不近一致收敛.

(3) $m(E-E_n)=0$, $n=1,2,3,\cdots$,因为 $E-\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E-E_n)$,所以 $m\left(E-\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0$,从而 $m\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=1$.

21. 解 必要性:

(1) $\forall\sigma>0$

$$\int_E|f_n-f|\,\mathrm{d}m\geqslant\int_{E(|f_n-f|\geqslant\sigma)}|f_n-f|\,\mathrm{d}m\geqslant\sigma\cdot mE(|f_n-f|\geqslant\sigma),$$

所以 $mE(|f_n-f|\geqslant\sigma)\to0\ (n\to\infty)$.

(2)

$$\left|\int_A f_n(x)\mathrm{d}m\right|\leqslant\int_A|f-f_n|\,\mathrm{d}m+\int_A|f|\,\mathrm{d}m.$$

$\forall\varepsilon>0$,存在 N,使 $n\geqslant N$ 时, $\int_E|f_n-f|\,\mathrm{d}m<\frac{\varepsilon}{2}$,又对 $f_1,f_2,\cdots,f_N$ 以及 $f(x)$,存在 $\delta>0$,使 $mA<\delta$ 时,有

$$\int_A|f|\,\mathrm{d}m<\frac{\varepsilon}{2},\qquad\left|\int_A f_n(x)\mathrm{d}m\right|<\varepsilon\qquad(n=1,2,\cdots,N),$$

从而当 $mA<\delta$ 时,对一切 $n\in\mathbf{N}$,有

$$\left|\int_A f_n(x)\mathrm{d}m\right| < \varepsilon.$$

充分性：$\forall \varepsilon>0$，由(b)存在 $\delta>0$，当 $mA<\delta$ 时，对一切 n，有

$$\left|\int_A (f_n - f)\mathrm{d}m\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $f_n \xrightarrow{\text{mes}} f$，故存在 N，当 $n \geqslant N$ 时，$mE\left(|f_n - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{3mE}\right)<\delta$

$$E_n = E\left(|f_n - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{3mE}\right) = E\left(f_n - f \geqslant \frac{\varepsilon}{3mE}\right) \cup E\left(f_n - f \leqslant \frac{-\varepsilon}{3mE}\right)$$
$$= A_n + B_n.$$

则 $mA_n<\delta$，$mB_n<\delta$ $(n \geqslant N)$

$$\int_E |f_n - f|\,\mathrm{d}m = \int_{E_n} |f_n - f|\,\mathrm{d}m + \int_{\complement E_n} |f_n - f|\,\mathrm{d}m$$
$$= \int_{A_n} (f_n - f)\mathrm{d}m + \int_{B_n} (f - f_n)\mathrm{d}m + \int_{\complement E_n} |f_n - f|\,\mathrm{d}m$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3mE} \cdot m\complement E_n \leqslant \varepsilon \qquad (n \geqslant N).$$

22. 解(1) 设 $mE>0$，因为 $E = E(f \leqslant 0) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E(f \geqslant n)\right)$，则存在 n，使 $mE(f \geqslant n)>0$

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m \geqslant \int_{E_n} f(x)\mathrm{d}m \geqslant n \cdot mE(f \geqslant n) > 0,$$

矛盾，故 $mE = 0$.

(2) 因 $f'(0)$存在，故可取 $M>0$，$\delta>0$，使 $0<|x| \leqslant \delta$ 时

$$\frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} \leqslant M.$$

又当 $|x|>\delta$ 时，$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{\delta}|f(x)|$，令

$$g(x) = \begin{cases} M, & |x| \leqslant \delta, \\ \frac{1}{\delta}|f(x)|, & |x| > \delta, \end{cases}$$

则 $0 \leqslant \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant g(x)$，且 $g(x)$在$(-\infty, +\infty)$上必可积，故$\frac{f(x)}{x}$$(L)$可积.

23. 解

(1) $A = \overline{\lim_n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$，$B_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ 是渐缩序列，$mB_n \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{n-1}}$，故 $mA = \lim_{n\to\infty} mB_n = 0$. $x \in E - A$ 时，$\exists N$，使 $n > N$ 时，$x \overline{\in} A_n$，即 $f(x) =$

$g_n(x)$ $(n > N)$,故 $x \in E - A$ 时,$g_n(x) \to f(x)$,$g_n(x) \xrightarrow{a.e.} f(x)$.

(2) 对任给的 $\delta>0$,由于 $f_n \xrightarrow{mes} f$,对每个自然数 k,存在 n_k(不妨设 $n_1 < n_2 < \cdots$)使

$$mE\left(|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{2^k}\right) < \frac{\delta}{2^{k+1}},$$

令

$$E_k = E\left(|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{2^k}\right),$$

则 $mE_k < \frac{\delta}{2^{k+1}}$,记

$$E_\delta = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{C}E_k.$$

则

$$E - E_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

$$m(E - E_\delta) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^{k+1}} = \frac{\delta}{2}.$$

$x \in E_\delta$,$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{C}E_k$,即 $k \geqslant 1$ 时,$x \overline{\in} E_k$,故

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^k} \qquad (\forall x \in E_\delta).$$

即 $f_{n_k}(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in E_\delta$.

24. 解 (1) 令 $E = \{x \in [0,1]: f(x)\text{为整数}\}$,$x \in E$ 时,$|\cos(\pi f(x))|^n \to 1$,$x \in \mathscr{C}E$ 时,$|\cos(\pi f(x))|^n \to 0$, $\int_0^1 |\cos(\pi f(x))|^n dx = \int_E + \int_{\mathscr{C}E}$,据有界 L.D.C 定理

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\cos(\pi f(x))|^n dx = mE.$$

(2) 因为

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} f(n^2 x)\right) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} f(n^2 x) dx = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\int_{\mathbf{R}} f(t)dt}{n^2} < \infty,$$

所以 $\sum_{-\infty}^{\infty} f(n^2 x)$a.e.有限,即 a.e.收敛于一个可积函数.

25. 解 $(|f(x)| - |f_n(x)|)_+ \leqslant |f|$,因为 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$,则 $(|f(x)| - |f_n(x)|)_+ \xrightarrow{a.e.} 0$.由 L.D.C

$$\lim_{n\to\infty}\int_E (|f(x)|-|f_n(x)|)_+ \mathrm{d}m = 0.$$

又已知

$$\lim_{n\to\infty}\int_E (|f(x)|-|f_n(x)|)\mathrm{d}m = 0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_E (|f(x)|-|f_n(x)|)_- \mathrm{d}m = 0,$$

$$\int_A (|f(x)|-|f_n(x)|)_\pm \mathrm{d}m \leqslant \int_E (|f(x)|-|f_n(x)|)_\pm \mathrm{d}m.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_A (|f(x)|-|f_n(x)|)\mathrm{d}m = 0.$$