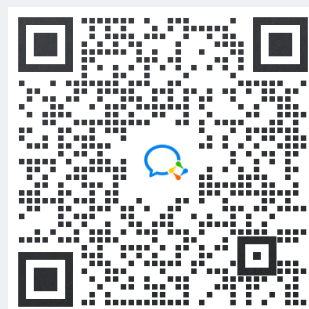


# 普通物理学 · 系统课

## 14小时精通

### 课程讲义

干货福利, 互助答疑



蜂考独家编辑, 版权所有



# 江苏博事达律师事务所

J I A N G S U   B O O M S T A R   L A W   O F F I C E

中国 南京 奥体大街 68 号国际研发总部园 4A 栋 17 楼      邮编: 210019  
17F 4A Building NO.68 Aoti Street, Nanjing, China      P.C: 210000  
电话(Tel): (86)-25-82226685      传真(Fax): (86)-25-82226696

## 律 师 声 明

江苏博事达律师事务所接受蜂考品牌公司的委托,发表以下律师声明:

“蜂考系列课程”(含视频、讲义、音频等)内容均为蜂考原创,蜂考品牌公司对此依法享有著作权,任何单位或个人不得侵犯。

蜂考品牌公司为维护创作作品的合法权益,已与江苏博事达律师事务所开展长期法律顾问合作,凡侵犯课程版权等知识产权的,蜂考品牌公司将授权江苏博事达律师事务所依据国家法律法规提起民事诉讼。对严重的侵权盗版分子将报送公安部门采取刑事手段予以严厉打击。

感谢大家对蜂考品牌的长期支持,愿与各位携手共同维护知识产权保护。遵守国家法律法规,从自身做起,抵制盗版!

特此声明!

江苏博事达律师事务所  
二〇二一年七月十四日



# 目录

课时一 质点运动学 .....	1
1. 质点运动的描述 .....	1
2. 圆周运动和一般曲线运动 .....	7
课时一 练习题 .....	15
课时二 质点动力学 .....	17
1. 相对运动 常见力和基本力 .....	17
2. 牛顿运动定律 .....	20
3. 伽利略相对性原理 非惯性系 惯性力 .....	24
课时二 练习题 .....	26
课时三 质点系动力学 .....	29
1. 质点系的内力和外力 质心 质心运动定理 .....	29
2. 动量定理 动量守恒定律 .....	31
课时三 练习题 .....	36
课时四 功能关系 .....	39
1. 功、动能、动能定理 .....	39
2. 保守力、成对力的功、势能 .....	42
3. 质点系的功能原理、机械能守恒定律 .....	45
课时四 练习题 .....	50
课时五 碰撞和角动量 .....	55
1. 碰撞 .....	55
2. 质点的角动量和角动量守恒定律 .....	56
课时五 练习题 .....	60
课时六 刚体动力学 .....	65
1. 刚体模型及其运动 .....	65
2. 力矩 转动惯量 定轴转动定律 .....	68
课时六 练习题 .....	76
课时七 刚体的功能关系 .....	78
1. 定轴转动中的功能关系 .....	78
2. 定轴转动刚体的角动量定理和角动量守恒定律 .....	79
3. 进动 .....	82
课时七 练习题 .....	83
课时八 流体力学 .....	86
1. 理想流体模型 定常流动 伯努利方程 .....	86
2. 牛顿力学的内在随机性 混沌 .....	87

配套课程 习题答案



课时八 练习题 .....	89
课时九 库仑定律和静电场 .....	90
1. 物质的电结构 库仑定律 .....	90
2. 静电场 电场强度 .....	91
课时九 练习题 .....	99
课时十 静电场基本定理 .....	103
1. 静电场的高斯定理 .....	103
2. 静电场的环路定理-电势 .....	108
3. 电场强度与电势梯度的关系 .....	114
课时十 练习题 .....	115
课时十一 静电场中的导体 .....	119
1. 静电场中的导体 .....	119
2. 电容器的电容 .....	124
课时十一 练习题 .....	130
课时十二 静电场中的电介质 .....	134
1. 静电场中的电介质 .....	134
2. 有电介质时的高斯定理 电位移 .....	137
3. 静电场的能量 .....	138
课时十二 练习题 .....	142
课时十三 稳恒磁场基本定理 .....	147
1. 恒定电流 .....	147
2. 磁感应强度 .....	149
3. 毕奥-萨伐尔定律 .....	151
4. 稳恒磁场的高斯定理与安培环路定理 .....	156
课时十三 练习题 .....	161
课时十四 载流子在磁场中的受力 .....	168
1. 带电粒子在电场和磁场中的运动 .....	168
2. 磁场对截流导线的作用 .....	174
课时十四 练习题 .....	179
课时十五 有磁介质时的磁场 .....	183
1. 磁场中的磁介质 .....	183
2. 有磁介质时的安培环路定理 磁场强度 .....	184
3. 铁磁质 .....	189
课时十五 练习题 .....	193
课时十六 电磁感应定律 .....	195
1. 电磁感应定律 .....	195



2. 动生电动势 .....	198
3. 感生电动势 感生电场 .....	204
课时十六 练习题 .....	209
课时十七 电磁场理论 .....	218
1. 自感应和互感应 .....	218
2. 磁场的能量 .....	224
3. 位移电流 电磁场理论 .....	226
4. 电磁场的统一性和电磁场量的相对性 .....	230
课时十七 练习题 .....	232
课时十八 谐振动 .....	236
1. 谐振动 .....	236
2. 阻尼振动 .....	247
3. 受迫振动 共振 .....	248
课时十八 练习题 .....	250
课时十九 谐振动的合成 .....	253
1. 电磁振荡 .....	253
2. 一维谐振动的合成 .....	258
3. 二维谐振动的合成 .....	261
4. 振动的分解、频谱 .....	263
5. 非线性振动与混沌 .....	264
课时十九 练习题 .....	265
课时二十 机械波 .....	267
1. 机械波的产生和传播 .....	267
2. 平面简谐波的波函数 .....	268
3. 波动方程 波速 .....	270
课时二十 练习题 .....	273
课时二十一 波的能量 .....	281
1. 波的能量 波的强度 .....	281
2. 声波 超声波 次声波 .....	283
3. 电磁波 .....	285
课时二十一 练习题 .....	288
课时二十二 波的性质 .....	291
1. 惠更斯原理、波的衍射、反射和折射 .....	291
2. 波的叠加原理、波的干涉、驻波 .....	292
3. 多普勒效应 .....	298
课时二十二 练习题 .....	301



课时二十三 几何光学 .....	305
1. 几何光学简介 .....	305
课时二十三 练习题 .....	319
课时二十四 光的干涉 .....	320
1. 光源 单色光 相干光 .....	320
2. 双缝干涉 .....	322
3. 光程与光程差 .....	326
4. 薄膜干涉 .....	328
5. 迈克耳孙干涉仪 .....	334
课时二十四 练习题 .....	336
课时二十五 光的衍射 .....	342
1. 光的衍射现象 惠更斯-菲涅耳原理 .....	342
2. 单缝的夫琅禾费衍射 .....	345
3. 圆孔的夫琅禾费衍射 光学仪器的分辨本领 .....	349
4. 光栅衍射 .....	352
5. X射线的衍射 .....	356
课时二十五 练习题 .....	357
课时二十六 光的偏振 .....	360
1. 光的偏振状态 .....	360
2. 起偏与检偏 马吕斯定律 .....	362
3. 反射和折射时光的偏振 .....	364
课时二十六 练习题 .....	367
课时二十七 光的双折射 现代光学 .....	370
1. 光的双折射 .....	370
2. 偏振光的干涉 人为双折射 .....	374
3. 旋光性 .....	377
4. 现代光学简介 .....	377
第二十七课时 练习题 .....	380



## 课时一 质点运动学

知识点	重要程度	题型
1. 质点运动的描述	★★★★	选填、简答、计算
2. 圆周运动和一般曲线运动	★★★★	选填、简答、计算

### 1. 质点运动的描述

机械运动是指一个物体相对于另一个物体的位置，或者一个物体的某些部分相对于其他部分的位置，随着时间而变化的过程。

#### 1) 质点

- (1) 质点是指具有一定质量且在研究问题中大小和形状可以忽略的理想物体；
- (2) 质点的简化具有相对性。

**例 1.** 以下那种情况不可以把研究对象看作质点 ( )。

- A. 地球自转
- B. 地球绕太阳公转
- C. 平动的物体
- D. 物体的形状和线度对研究问题的性质影响很小

答案：A

解析：研究自转时，物体的形状和大小在研究问题中不可以忽略。

**例 2.** 分子很小，可将其看作质点，地球很大，不能看作质点。 ( )

答案：x

解析：物体是否可以看成质点，与所研究的问题有关。同一个物体在不同的研究问题中，有的可以看作质点，有的则不能。

#### 2) 参考系和坐标系

##### (1) 参考系

- ①参考系是指在描述物体运动时，被选作参考的物体或物体系；

配套课程 习题答案



②参考系的选择具有任意性.

例 3. 以下参考系的选取正确的是 ( )。

- A. 我们说“太阳东升西落”，是以地球为参考系的
- B. 我们说“地球围绕太阳转”是以地球为参考系的
- C. 我们说“同步卫星在高空静止不动”，是以太阳为参考系的
- D. 坐在行驶的汽车上的乘客，以地面为参考系，路旁的树木迎面向他奔来

答案：A

解析：B. 是以太阳为参考系；C. 是以地球为参考系；D. 是以汽车或者乘客为参考系。

## (2) 坐标系

### ①选取

在参考系上选定一点作为坐标系的原点  $O$ ，取通过原点并标有长度的线作为坐标轴.

### ②常用坐标系

笛卡尔坐标系、平面极坐标系和球坐标系等.

## (3) 参考系和坐标系的关系

坐标系用来定量地描述一个物体在各时刻相对于参考系的位置.

## 3) 空间和时间

- (1) 空间反映物质的广延性，与物体的体积和物体位置的变化相联系；
- (2) 时间反映物理事件的顺序性和持续性.

## 4) 运动学方程

在选定的参考系中，运动质点的位置  $P(x,y,z)$  是  $t$  的函数，即

$$x = x(t) , y = y(t) , z = z(t)$$

## 5) 位矢

配套课程 习题答案





(1) 位矢是用来确定某时刻质点位置的矢量，用  $\vec{r}$  表示.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

(2) 特点

- ① 矢量性;
- ② 瞬时性;
- ③ 相对性.

6) 位移

位移表示质点在一段时间内位置改变的矢量，用  $\Delta\vec{r}$  表示

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \Delta\vec{r}$$

例 4. 在直线运动中，质点的位移、大小和路程是相等的。 ( )

答案:  $\times$

解析: 只有在单向直线运动位移大小和路程相等，如果是有往返的直线运动，路程比位移大。

例 5. 一质点沿  $x$  轴运动的规律是  $x = t^2 - 4t + 5$ ，其中  $x$  以  $m$  计， $t$  以  $s$  计，求前三秒内它的位移和路程。

解:  $\Delta x = x(3) - x(0) = -3m$ ,

$$S = |x(2) - x(0)| + |x(3) - x(2)| = 5m。$$

7) 速度

(1) 平均速度:  $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ 。

(2) 瞬时速度 (速度):  $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ 。



例 6. 瞬时速度就是很短时间内的平均速度。 ( )

答案:  $\times$

解析: 瞬时速度对应的是时刻, 平均速度对应的是时间。

例 7. 一质点沿  $x$  轴运动, 其速度与时间的关系为  $v = 4 + t^2 (m/s)$ , 当  $t = 3s$  时, 质点位于  $x = 9m$  处, 则质点的运动方程为 ( )。

A.  $x = 4t + \frac{1}{3}t^3 - 12$

B.  $x = 4t + \frac{1}{2}t^3$

C.  $x = 2t + 3$

D.  $x = 4t + \frac{1}{3}t^3 + 12$

答案: A

解析:  $x = \int v dt = 4t + \frac{1}{3}t^3 + C,$

$$\therefore x(3) = 9,$$

$$\therefore C = -12,$$

$$\therefore x = 4t + \frac{1}{3}t^3 - 12$$

例 8. 一质点沿  $x$  轴作直线运动, 它的运动学方程为  $x = 3 + 5t + 6t^2 - t^3$ , 则

(1) 质点在  $t = 0$  时刻的速度  $v_0 =$  \_\_\_\_\_;

(2) 加速度为零时, 该质点的速度  $c$  \_\_\_\_\_。

答案:  $5m/s$ , 正方向;  $17m/s$

解析:  $v = \frac{dx}{dt} = 5 + 12t - 3t^2,$



$$\therefore v_0 = 5m/s, \text{ 正方向,}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t,$$

$$\therefore a = 0, \quad t = 2,$$

$$v(2) = 17m/s$$

例 9. 某物体的运动规律为  $\frac{dv}{dt} = -kv^2t$ , 式中的  $k$  为大于零的常量, 当  $t = 0$  时,

初速度为  $v_0$ , 则速度  $v$  与时间  $t$  的关系是 ( )。

A.  $v = \frac{1}{2}kt^2 + v_0$

B.  $\frac{1}{v} = \frac{k}{2}t^2 + \frac{1}{v_0}$

C.  $\frac{1}{v} = -\frac{k}{2}t^2 + \frac{1}{v_0}$

D.  $v = -\frac{1}{2}kt^2 + v_0$

答案: B

解析:  $dv = -kv^2tdt \implies \frac{dv}{v^2} = -ktdt$

$$\therefore -\frac{1}{v} = -\frac{1}{2}kt^2 + C,$$

$$t = 0, \quad C = -\frac{1}{v_0},$$

$$\therefore \frac{1}{v} = \frac{kt^2}{2} + \frac{1}{v_0}$$

## 8) 加速度

### (1) 质点的平均加速度

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

### (2) 瞬时加速度

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

加速度是矢量:

配套课程 习题答案



$\vec{a}$  与  $\vec{v}$  成锐角，速率增加；

$\vec{a}$  与  $\vec{v}$  成钝角，速率减小；

$\vec{a}$  与  $\vec{v}$  成直角，速率不变。

例 10. 若质点在某时刻速度为零，则该时刻质点的加速度为零。 ( )

答案：×

解析：加速度为速度的一阶导数，速度为0，其导数(变化率)不一定为0。

例 11. 某质点作直线运动的运动学方程为  $x = 3t - 5t^3 + 6(SI)$ ，则该质点作( )。

A. 匀加速直线运动，加速度沿  $x$  轴正方向

B. 匀加速直线运动，加速度沿  $x$  轴负方向

C. 变加速直线运动，加速度沿  $x$  轴正方向

D. 变加速直线运动，加速度沿  $x$  轴负方向

答案：D

解析：  $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -30t$ ，

所以加速度随时间变化，为变加速直线运动，方向沿  $x$  轴负方向。

例 12. 一质点沿  $x$  轴方向作直线运动，其速度与时间的关系是  $v = 20t - 20$ ，在  $t = 0$  时， $x = 0$ 。求：加速度与时间的关系，位置与时间的关系。

解：  $a = \frac{dv}{dt} = 20 \text{ m/s}^2$ ，

$$x = \int v dt = 10t^2 - 20t + C,$$

$$x(0) = 0 = C,$$

$$\therefore x = 10t^2 - 20t$$

例 13. 一质点沿  $x$  轴运动，其加速度  $a$  与位置坐标  $x$  的关系为  $a = 2 + 6x^2(SI)$ ，

如果质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度。

配套课程 习题答案



$$\text{解: } a = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx},$$

$$\therefore v dv = a dx,$$

$$\frac{1}{2} v^2 = 2x + 2x^3 + C,$$

$$\because v(0) = 0,$$

$$\therefore C = 0,$$

$$\therefore v^2 = 4x(x^2 + 1)$$

## 2. 圆周运动和一般曲线运动

### 1) 切向加速度和法向加速度

自然坐标系下的加速度

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n$$

式中，切向加速度和法向加速度分别为：

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t, \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{e}_n$$

**题 1.** 一质点在  $xOy$  平面上运动，运动方程为  $\vec{r} = t^3 \vec{i} + 2t^2 \vec{j}$ ，求  $t = 2s$  时的位置矢量和加速度矢量。

$$\text{解: } \vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 6t \vec{i} + 4 \vec{j},$$

$$\vec{a}(2) = 12 \vec{i} + 4 \vec{j}.$$

**题 2.** 一质点沿半径为  $R$  的圆周运动，其路程  $S$  随时间  $t$  的变化规律为

$S = bt - \frac{1}{2} ct^2$  ( $S$  为路程)，式中  $b$ 、 $c$  为大于零的常量，且  $b^2 > Rc$ ，则此质点运动的切

向加速度  $a_t =$  \_\_\_\_\_。

答案：  $-c$

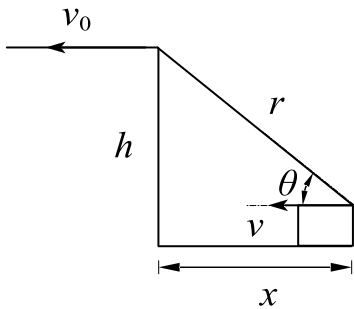
配套课程 习题答案



解析：  $a_t = \frac{d^2 S}{dt^2} = -c$

题 3. 在离水面高度为  $h$  的岸边，有人用绳子拉船靠岸，船在离岸边距离  $l$  处。当人以速率  $v_0$  收绳时，试求船的速率与加速度各有多大。

解：



由几何关系：

$$r^2 = h^2 + x^2,$$

两侧对  $t$  求导，有

$$2r \frac{dr}{dt} = 2x \frac{dx}{dt},$$

其中  $\frac{dr}{dt} = -v_0$ ，  $\frac{dx}{dt} = -v$ ，

$$\therefore v = \frac{r}{x} v_0 = \frac{v_0}{\cos\theta},$$

当  $x = l$  时，  $v = \frac{\sqrt{h^2 + l^2}}{l} v_0$ ，

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{x \frac{dr}{dt} - r \frac{dx}{dt}}{x^2} v_0 \\ &= \frac{rv - xv_0}{x^2} v_0 = \frac{\frac{r^2}{x} - x}{x^2} v_0^2 \\ &= \frac{h^2 v_0^2}{x^2} \end{aligned}$$



$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } a = \frac{h^2 v_0^2}{l^2}。$$

题 4. 一质点在  $xOy$  平面上运动，运动方程为  $x = 3t + 5$ ， $y = \frac{1}{2}t^2 + 3t - 4$ ，式

中  $t$  以  $s$  计， $y$  以  $m$  计。

(1) 以时间  $t$  为变量，写出质点位置矢量的表示式；

(2) 求出质点速度矢量表示式，计算  $t = 4s$  时质点的速度；

(3) 求出质点加速度矢量的表示式，计算  $t = 4s$  时质点的加速度。

解：(1)  $\vec{r} = (3t + 5)\vec{i} + \left(\frac{1}{2}t^2 + 3t - 4\right)\vec{j}$ ；

$$(2) \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 3\vec{i} + (t + 3)\vec{j},$$

$$\vec{v}(4) = 3\vec{i} + 7\vec{j}；$$

$$(3) \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{j},$$

$$\vec{a}(4) = \vec{j}。$$

## 2) 圆周运动的角量描述

(1) 瞬时角速度

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

式中， $\Delta\theta$  为角位移，单位为  $rad$ ； $\omega$  的单位为  $1/s$  或  $rad/s$ 。

(2) 瞬时角加速度(角加速度)

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

式中， $\alpha$  的单位为  $1/s^2$  或  $rad/s^2$ 。

(3) 角量和线量的关系

配套课程 习题答案



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

题 5. 某转轮上一点的角位置和时间的关系为  $\theta = 4t - 3t^2 + t^3 (SI)$ ，则在 2 秒末到 4 秒末这段时间内，平均角速度大小为\_\_\_\_\_，2 秒末的角加速度大小为\_\_\_\_\_。

答案：  $12rad/s$  ，  $6rad/s^2$

解析：  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4 - 6t + 3t^2$ ，

$$\bar{\omega} = \frac{\omega(4) - \omega(2)}{4 - 2} = 12rad/s，$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = -6 + 6t，$$

$$\therefore \beta(2) = 6rad/s^2。$$

题 6. 一个质点在作圆周运动时，则有（ ）。

- A. 切向加速度一定改变，法向加速度也改变
- B. 切向加速度可能改变，法向加速度一定改变
- C. 切向加速度可能改变，法向加速度不变
- D. 切向加速度一定改变，法向加速度不变

答案： B

解析：法向加速度方向时刻在改变，如果是匀速率圆周运动，切向加速度始终为 0，因此切向加速度不一定改变。

题 7. 一质点从静止出发沿半径  $R = 1m$  的圆周运动，其角加速度随时间  $t$  的变化

配套课程 习题答案





规律是  $\beta = 12t^2 - 6t$  (SI)，切向加速度  $a_t = \underline{\hspace{2cm}}$ ，法向加速度为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案：  $12t^2 - 6t$ ；  $(4t - 3)^2 t^4$

解析：  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4 - 6t + 3t^2$

$$\omega = \int \beta dt = 4t^3 - 3t^2 + c_1$$

$t = 0$  时  $\omega = 0$  得  $c_1 = 0$

$$a_n = \omega^2 R = (4t - 3)^2 t^4$$

$$a_t = \beta R = 12t^2 - 6t$$

题 8. 质点沿半径为  $R$  的圆周运动，运动学方程为  $\theta = 3 + 2t^2$  (SI)，则  $t$  时刻质点的法向加速度大小为  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ ，切向加速度为  $a_t = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案：  $4R$ ；  $16Rt^2$

解析：  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4t$ ，

$$a_n = \omega^2 R = 16Rt^2$$
，

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = 4$$
，

$$a_t = \beta R = 4R$$

题 9. 一汽车发动机的曲轴，在  $12s$  内，其转速由  $n_0 = 1.2 \times 10^3 r/min$  均匀增加到  $n = 2.7 \times 10^3 r/min$ ，求：

(1) 此曲轴转动角加速度  $\beta$ ；

(2) 在此时间内，曲轴共转动了多少圈？

解：(1)  $\because \omega = 2\pi n$ ，

$$\beta = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{25\pi}{6} rad/s^2。$$

$$(2) n = n_0 + \frac{\beta}{2\pi} t$$



$$T = \int_0^{12} n dt = 390r。$$

题 10. 一质点在半径为  $0.10m$  的圆周上运动，其角位置变化关系为

$$\theta = 2 + 4t^3 (rad)，试求：$$

(1) 在  $t = 2s$  时，质点的法向加速度和切向加速度各为多少？

(2) 当切向加速度大小恰好等于总加速度大小的一半时， $\theta$  的值为多少？

解：(1)  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 12t^2，$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = 24t，$$

$$\therefore t = 2 \text{ 时， } \omega(2) = 48 \text{ rad/s，}$$

$$\beta(2) = 48 \text{ rad/s，}$$

$$\therefore a_n = \omega^2 R = 230.4 \text{ m/s}^2，$$

$$a_t = \beta R = 4.8 \text{ m/s}^2。$$

(2)  $a_t = \frac{1}{2} \sqrt{\omega^4 + \beta^2 R}$  时有：

$$\sqrt{3} \beta = \omega^2 \Rightarrow t^3 = \frac{\sqrt{3}}{6}，$$

$$\therefore \theta = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ rad.}$$

3) 抛体运动的矢量描述

速度分量：

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta，v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

速度矢量：

$$\vec{v} = (v_0 \cos\theta) \vec{i} + (v_0 \sin\theta - gt) \vec{j}$$

加速度：

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j}$$

配套课程 习题答案



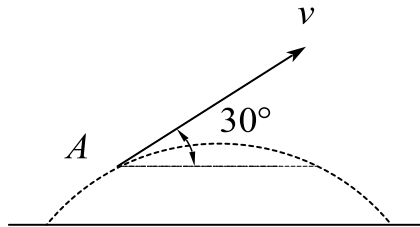
位矢：

$$\vec{r} = (v_0 \cos \theta \vec{i} + v_0 \sin \theta \vec{j})t - \frac{1}{2}gt^2 \vec{j}$$

轨迹方程：

$$y = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$$

题 11. 一物体作如图所示的斜抛运动，测得在轨道  $A$  点处速度的大小为  $v$ ，其方向与水平方向的夹角成  $30^\circ$ 。则物体在  $A$  点的切向加速度  $a_t = \underline{\hspace{2cm}}$ ，轨道的曲率半径  $\rho = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



答案：  $0.5g$ ;  $\frac{2\sqrt{3}}{3g}v^2$

解析：  $a_t = g \sin 30^\circ = \frac{1}{2}g$ ，

$$\therefore a_n = g \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}g = \frac{v^2}{\rho}，$$

$$\therefore \rho = \frac{2\sqrt{3}}{3g}v^2$$

题 12. 一物体从某一确定高度以  $\vec{v}_0$  的速度水平抛出，已知它落地时的速度为  $\vec{v}_t$ ，那么它运动的时间为 ( )。

A.  $\frac{v_t - v_0}{g}$

B.  $\frac{v_t - v_0}{2g}$

C.  $\frac{(v_t^2 - v_0^2)^{\frac{1}{2}}}{g}$

D.  $\frac{(v_t^2 - v_0^2)^{\frac{1}{2}}}{2g}$

配套课程 习题答案



答案：C

解析：∵  $v_y = gt = \sqrt{v_t^2 - v_0^2}$ ，

$$\therefore t = \frac{(v_t^2 - v_0^2)^{\frac{1}{2}}}{g}。$$



## 课时一 练习题

1. 一质点作直线运动，某时刻的瞬时速度  $v = 2m/s^2$ ，则一秒后质点的速度为 ( )。

- A. 等于零  
B. 等于  $-2m/s$   
C. 等于  $2m/s$   
D. 不能确定

2. 质点沿  $x$  轴正向运动，加速度  $a = -kv$ ， $k$  为常数，设从原点出发时速度为  $v_0$ ，求运动方程  $x = x(t)$ 。

3. 已知质点位矢随时间变化的函数形式为  $\vec{r} = \left(t - \frac{t^2}{2}\right)\vec{i} + \left(5 - 3t + \frac{t^3}{3}\right)\vec{j}(SI)$ ，则  $t = 3s$  时，其加速度  $\vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 一质点沿  $x$  轴方向运动，其加速度随时间变化关系为  $a = 3 + 2t(SI)$ ，如果初始时质点的速度  $v_0$  为  $5m/s$ ，则当  $t = 3s$  时，质点的速度  $v = \underline{\hspace{2cm}} m/s$ 。

5. 一运动质点在某瞬时位于位矢  $\vec{r}(x,y)$  的端点处，则此时其速率等于 ( )。

- A.  $\frac{dr}{dt}$   
B.  $\frac{d\vec{r}}{dt}$   
C.  $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$   
D.  $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

6. 一质点在  $xOy$  平面内运动，其位置矢量随时间变化的函数形式为

$$\vec{r} = 4t^2\vec{i} + (3 + 2t)\vec{j}$$

式中  $\vec{r}$  的单位为  $m$ ，而  $t$  的单位为  $s$ 。求：

- (1) 质点的轨道；
- (2) 从  $t = 0$  到  $t = 1$  的位移；
- (3)  $t = 0$  和  $t = 1$  两时刻的速度。

7. 一质点在平面上运动，已知质点运动方程为  $\vec{r}(t) = 3t\vec{i} + 4t\vec{j}(SI)$ ，则该质点作 ( )。



A. 匀速直线运动

B. 变速直线运动

C. 抛物线运动

D. 匀速率圆周运动

8. 质点作曲线运动， $\vec{r}$  表示位置矢量， $s$  表示路程， $\vec{v}$  表示速度， $\vec{a}$  表示加速度， $\vec{a}_t$  表示切向加速度，对下列表达式，即

$$(1) \frac{dv}{dt} = a; \quad (2) \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}; \quad (3) \frac{ds}{dt} = v; \quad (4) \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = a_t;$$

下述判断正确的是 ( )。

A. 只有 (1)、(4) 是正确的

B. 只有 (2)、(3) 是正确的

C. 只有 (2) 是正确的

D. 只有 (3) 是正确的



## 课时二 质点动力学

考点	重要程度	题型
1. 相对运动 常见力和基本力	★★★★	选填、简答、计算
2. 牛顿运动定律	★★★★★	选填、简答、计算
3. 伽利略相对性原理 非惯性系 惯性力	★★	选填、简答

### 1. 相对运动 常见力和基本力

#### 1) 相对运动

##### (1) 伽利略坐标变换

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t, t' = t$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t, t' = t$$

##### (2) 速度变换与加速度变换

质点  $P$  在  $K'$  系的速度/加速度与它在  $K$  系的速度以及加速度的关系。

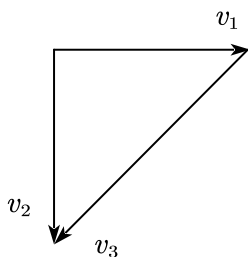
$$\vec{v}_{PK} = \vec{v}_{PK'} + \vec{v}_{K'K}$$

$$\vec{a}_{PK} = \vec{a}_{PK'} + \vec{a}_{K'K}$$

质点在两个相对作匀速直线运动的参考系中的加速度是相同的。

**例 2.** 一大巴车以  $54\text{km/h}$  的速率水平向东行驶时，相对于地面匀速竖直下落的雨滴，在大巴的窗子上形成的雨迹与竖直方向成  $45^\circ$  角，雨滴相对于地面的速率如何？相对于大巴的速率如何？

解析：根据题意可知，雨滴相对于大巴车的速度与竖直方向夹角为  $45^\circ$



根据题意  $v_1 = 54 \text{ km/h}$

$v_2$  为雨滴相对于地面的速度

配套课程 习题答案



$\vec{v}_3 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$  为雨滴相对于大巴车的速度；

根据几何关系得： $v_2 = 54 \text{ km/h}$ ， $v_3 = 54\sqrt{2} \text{ km/h}$

**例 3. 质点的位置矢量和位移都与参考系相关，即同一的质点，选不同的参考系，它的位置矢量和位移都会发生变化。**

答案：✓

解析：假设  $\vec{r}'$  为相对于参考系  $O$  的位置矢量， $\vec{r}$  为相对于地面的位置矢量， $\vec{r}_O$  是参考系  $O$  相对于地面的位置矢量，有

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_O, \Delta\vec{r}' = \Delta\vec{r} - \Delta\vec{r}_O$$

所以位置矢量以及位移矢量和参考系  $O$  的选取有关

## 2) 常见力

### (1) 重力

重力是指地球表面附近的物体受到地球的吸引作用而使物体受到的力。

### (2) 弹力

弹力是指形变物体恢复原状时与它接触的物体产生的力。

弹力的三种表现形式：

#### ① 两物体间的相互挤压

两物体间相互挤压所产生的弹力又称正压力或支承力。该力大小取决于相互挤压的程度，方向总是垂直于接触面并指向对方。

#### ② 绳线对物体的拉力

该力大小取决于绳线收紧的程度，方向总是沿着绳线并指向绳线收紧的方向。

#### ③ 弹簧的弹力

弹簧的弹力总是力图使弹簧恢复原状，又称恢复力。

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

配套课程 习题答案





式中， $k$ 为弹簧的劲度系数或劲度，负号表示弹力和位移方向相反。

### (3) 摩擦力

摩擦力是指两个相互接触的物体在沿接触面相对运动或有相对运动的趋势时，在接触面间产生的一对阻止相对运动的力。

**例 4. 物体受到的摩擦力的方向总是与物体的运动方向相反：该说法是\_\_\_\_\_。(正确；不正确的)**

答案：不正确的

解析：摩擦力阻碍的是物体间的相对运动，和物体本身的运动方向无关。举例：传送带上的物体受到的摩擦力和物体运动方向相同。

### (4) 万有引力

万有引力是存在于任何两个物体之间的吸引力，方向沿着物体连线

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

式中， $G$ 为引力常量， $G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ 。

## 3) 基本力

### (1) 电磁力

电磁力是指存在于静止电荷之间的电性力以及存在于运动电荷之间的电性力和磁性力。

### (2) 强力

强力是指存在于核子、介子和超子之间的强相互作用。

### (3) 弱力

弱力是指在亚原子领域中存在的短程相互作用。



## 2. 牛顿运动定律

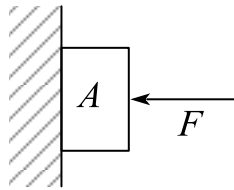
### 1) 牛顿第一定律

任何物体都保持静止或匀速直线运动状态，直到作用在它上面的力迫使它改变这种状态为止，又称惯性定律。

相关说明：

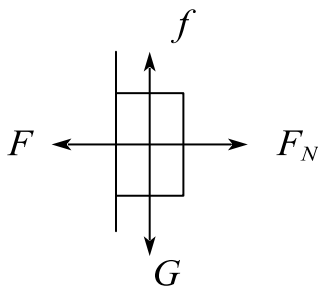
- (1) 惯性是物体所具有的保持其原有运动状态不变的特性。
- (2) 力是引起运动状态改变的原因。
- (3) 牛顿定律只适用于惯性系。

例 1. 如图，沿水平方向的外力  $F$  将物体  $A$  压在竖直墙上，使其保持静止，此时物体所受静摩擦力的大小为  $f$ 。若外力变为  $2F$ ，则此时物体所受静摩擦力的大小为\_\_\_\_\_。



答案：  $f$

解析：由于受力平衡，在竖直方向上只有摩擦力和重力，因此摩擦力总等于重力，故摩擦力不变。受力分析，列方程如下：



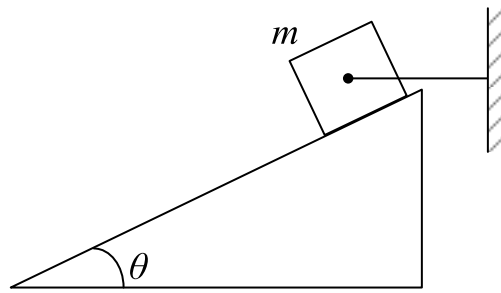
$$f = G$$

$$F_N = F$$

例 3. 如图所示质量为  $m$  的物体用细绳水平拉住，静止在倾角为  $\theta$  的固定的光滑斜面上，则斜面给物体的支持力为 ( )

配套课程 习题答案

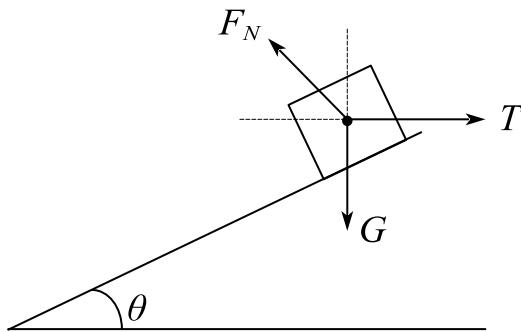




- A.  $mg \cos \theta$       B.  $mg \sin \theta$       C.  $\frac{mg}{\cos \theta}$       D.  $\frac{mg}{\sin \theta}$

答案：D

解析：受力分析，列方程，如下



$$F_N = \frac{G}{\sin \theta}$$

## 2) 牛顿第二定律

物体受到外力作用时，它所获得的加速度的大小与外力的大小成正比，并与物体的质量成反比，加速度方向与外力方向相同。

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = mv \frac{dv}{dx} \hat{a}$$

物体产生加速度的原因，并非物体有速度的原因。

例 6. 质量为  $m$  的粒子沿  $xoy$  平面内的一条轨道运动，运动方程为  $x = A(ct - \sin ct)$ 、 $y = A(1 - \cos ct)$ ， $c$ 、 $A$  均为常数，则粒子在  $x$  方向上所受的分子力  $F_x =$  \_\_\_\_\_，在  $y$  方向上所受的分子力  $F_y =$  \_\_\_\_\_。

配套课程 习题答案



解析：  $mAc^2 \sin ct$ ；  $mAc^2 \cos ct$

$$F_x = ma_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = mAc^2 \sin ct$$

$$F_y = ma_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} = mAc^2 \cos ct$$

例 7. 质量为  $m$  的子弹以速度  $v$  水平射入沙土中，设子弹所受阻力与速度反向，大小与速度成正比，比例系数为  $k$  忽略子弹的重力，求：

(1) 子弹射入沙土后，速度随时间变化的函数关系；

(2) 子弹进入沙土的最大深度。

解析：由于忽略重力，子弹只受到阻力的作用

$$(1) f = -kv = m \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore m \frac{dv}{v} = -kdt$$

$$\therefore v = ce^{-\frac{kt}{m}}$$

$$t = 0 \text{ 时, } v = c = v_0$$

$$\therefore v = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$$

$$(2) x = \int_0^{\infty} v dt = -\frac{v_0 m}{k} \cdot e^{-\frac{k}{m} t} \Big|_0^{\infty} = \frac{v_0 m}{k}$$

### 3) 牛顿第三定律

两个物体之间的作用力和反作用力，在同一直线上，大小相等方向相反。

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

例 8. 根据牛顿第三定律，作用力与反作用力是作用在同一物体上的同种性质的力。( )

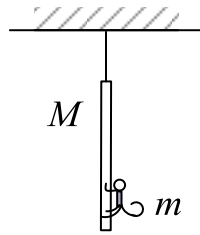
配套课程 习题答案



答案：x

解析：作用力与反作用力是作用在不同物体上的同种性质力。

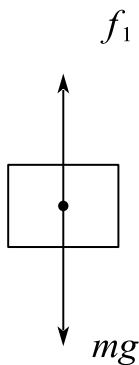
例 9. 一只质量为  $m$  的猴，原来抓住一根用绳吊在天花板上的质量为  $M$  的直杆，悬线突然断开，小猴子则沿杆子竖直向上爬以保持它离地面的高度不变，此时直杆下落的加速度为（ ）



- A.  $g$     B.  $\frac{m}{M}g$     C.  $\frac{M+m}{M}g$     D.  $\frac{M+m}{M-m}g$     E.  $\frac{M-m}{M}g$

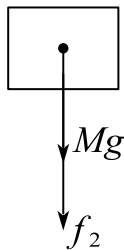
答案：选C

解析：对猴子受力分析



$$f = mg$$

对杆受力分析：



$f_2$  为猴子对杆的摩擦力

$$f_2 = f_1 = mg$$

配套课程 习题答案



$$\therefore Mg + f_2 = (M + m)g = Ma$$

$$\therefore a = \frac{M + m}{M}g$$

### 3. 伽利略相对性原理 非惯性系 惯性力

#### 1) 伽利略相对性原理

一切彼此作匀速直线运动的惯性系，对于描写机械运动的力学规律来说是完全等价的。在一个惯性系的内部所作的任何力学实验都不能够确定这一惯性系本身是静止状态，还是在作匀速直线运动。

#### 2) 典力学的时空观

不同惯性系  $K$  与  $K'$  中的运动加速度满足：

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

#### 3) 非惯性系

非惯性系是指对惯性系作加速运动的参考系；在非惯性系下，牛顿定律不成立。

**例 1. 牛顿定律仅适用于惯性系。( )**

答案：✓

解析：牛顿运动定律只适用于惯性系，低速、宏观的物体。

#### 4) 惯性力

(1) 惯性力是在非惯性系中来自参考系本身的加速效应的力。

$$\vec{F}_{\text{惯}} = -m\vec{a}$$

(2) 非惯性系下的牛顿定律

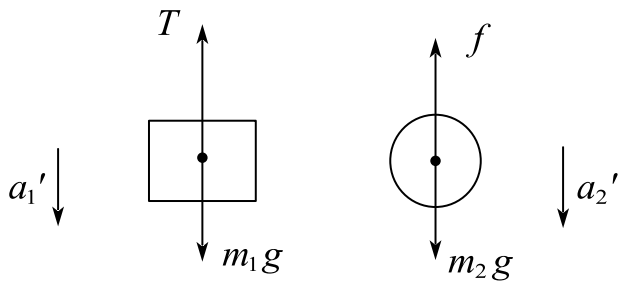
$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{惯}} = m\vec{a}'$$

配套课程 习题答案



例 2. 一条轻绳跨过摩擦可被忽略的轻滑轮，在绳的一端挂一质量为  $m_1 = 0.8\text{kg}$  的物体，在另一侧有一质量为  $m_2 = 0.2\text{kg}$  的环，求当环相对于绳以恒定的加速度  $a_2 = 0.6\text{m/s}$  沿绳向下滑动时，物体和环相对地面的加速度各是多少？环与绳间的摩擦力多大？

解析：



$$m_2 g - f = m_2 a_2' \text{ 取向下为正方向}$$

$$m_1 g - T = m_1 a_1'$$

$$\text{由牛顿第三定律, } T = f$$

$$a_2' + a_1' = a_2$$

$$\therefore a_1' = 6.12 \text{ m/s}^2; a_2' = -5.52 \text{ m/s}^2$$

$$f = 3.104\text{N}$$



## 课时二 练习题

1. 在相对地面静止的坐标系内， $A$ 、 $B$ 二船都以 $2m/s$ 速率匀速行驶， $A$ 船沿 $x$ 轴正向， $B$ 船沿 $y$ 轴正向，今在 $A$ 船上设置与坐标系方向相同的坐标系（ $x$ 、 $y$ 方向单位矢用 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 表示），那么在 $A$ 船上的坐标系中， $B$ 船的速度（以 $m/s$ 为单位）为（ ）

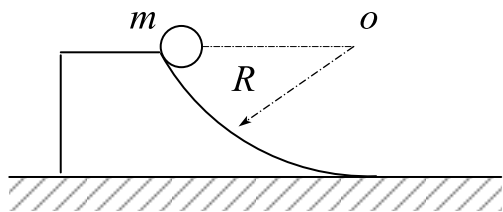
- A.  $2\vec{i} + 2\vec{j}$       B.  $-2\vec{i} + 2\vec{j}$       C.  $-2\vec{i} - 2\vec{j}$       D.  $2\vec{i} - 2\vec{j}$

2. 某人骑自行车以速率 $v$ 向正西方行驶，遇到由南向北刮的风（设风速大小也为 $v$ ），则他感到风是从（ ）

- A. 东北方向吹来      B. 东南方向吹来      C. 西北方向吹来      D. 西南方向吹来

3. 一艘小船以速度 $\vec{v}_1$ 向正西方向行驶，船上的乘客测得风从北方以速度 $\vec{v}_2$ 吹来，则风相对于地面的速度 $\vec{v} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，其方向与小船绝对速度方向的夹角为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 如图所示，质量为 $m$ 的小球，沿半径为 $R$ 的圆弧形光滑轨道由静止下落，则在下滑的过程中：（ ）



- A. 小球的加速度方向始终指向圆心；  
 B. 轨道对小球的作用力大小不断增加；  
 C. 小球所受的合力大小变化，并始终指向圆心；  
 D. 小球所受的合力不变，但速率不断增加。

5. 对于牛顿第二定律 $F = ma$ ，下列说法中不正确的是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

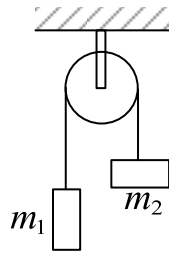
- A. 牛顿第二定律只适用于质点      B. 这个力是合外力  
 C. 对于高速运动同样适用      D. 力与加速度瞬时对应





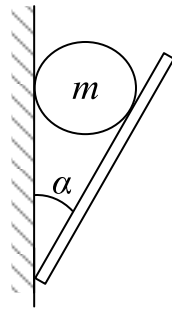
6. 质量为 $m$ ，速度为 $v_0$ 的汽车，在关闭发动机情况下沿直线滑行，若汽车所受阻力为 $f = -kv^2$ ， $k$ 为正常数。试求汽车速度和路程随时间的变化规律。

7. 如图所示，一轻绳跨过一个定滑轮，两端各系一质量分别为 $m_1$ 和 $m_2$ 的重物，且 $m_1 > m_2$ ，滑轮质量及轴上摩擦均不计，此时重物的加速度的大小为 $a$ ，仅用一竖直向下的恒力 $F = m_1g$ 代替质量为 $m_1$ 的物体，可得质量为 $m_2$ 的重物的加速度为的大小 $a'$ ，则（ ）



- A.  $a' = a$       B.  $a' > a$       C.  $a' < a$       D. 不能确定

8. 质量为 $m$ 的小球，放在光滑的木板和光滑的墙壁之间，并保持平衡，如图所示，设木板和墙壁之间的夹角为 $\alpha$ ，当 $\alpha$ 逐渐增大时，小球对木板的压力将（ ）



- A. 增加    B. 不变    C. 减少    D. 先是增加，后又减小，压力增减的分界角为 $\alpha = 45^\circ$

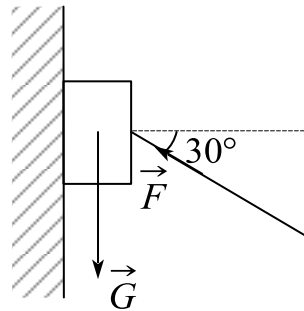
9. 在十字路口，驾车右转往正东方向前进，速率为 $v_1$ ；同时，乙车直行往正北方向前进，速率为 $v_2$ ，则甲车乘客观察到乙车的运动速度为：

- A.  $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$     B.  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$     C.  $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$     D.  $-\vec{v}_1 - \vec{v}_2$

10. 如图所示用一斜向上的力 $\vec{F}$ （与水平成 $30^\circ$ 角），将一重为 $\vec{G}$ 的木块压靠在

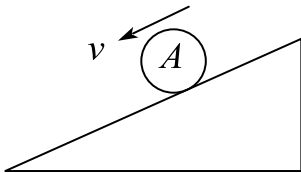


竖直壁面上，如果不论用怎样大的力  $F$ ，都不能使木块向上滑动，则说明木块与壁面间的静摩擦系数  $\mu$  的大小为

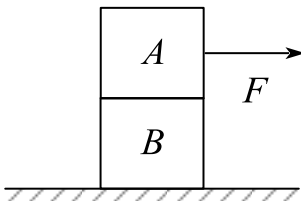


- A.  $\mu \geq \frac{1}{2}$       B.  $\mu \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$       C.  $\mu \geq \sqrt{3}$       D.  $\mu \geq 2\sqrt{3}$

11. 对下列各种情况下的物体  $A$  进行受力分析（在下列情况下接触面均不光滑）。



(1) 沿斜面下滚的小球



(2)  $A$ 、 $B$  同时间向右行驶

12. 一个木块放在水平面上，在水平拉力  $F$  的作用下做匀速直线运动，当拉力为  $2F$  时木块的加速度大小是  $a$ ，则水平拉力为  $4F$  时，木块的加速度大小是（ ）

- A.  $a$       B.  $2a$       C.  $3a$       D.  $4a$

13. 以下四种运动形式中， $\vec{a}$  保持不变的运动是（ ）

- A. 抛体运动    B. 匀速率圆周运动    C. 行星的椭圆轨道运动    D. 单摆的运动



## 课时三 质点系动力学

考点	重要程度	占分	题型
1. 质点系的内力和外力 质心 质心运动定理	★★★	3~6	选填、简答
2. 动量定理动量 守恒定律	★★★★★	6~10	计算

### 1. 质点系的内力和外力 质心 质心运动定理

#### 1) 质点系的内力和外力

内力是指质点系内各个质点间的相互作用力。外力是指系统外物体对系统内质点施加的力。因系统的内力之和总是零，因此内力对整体运动不发生影响。

#### 2) 质心

##### (1) 质心的定义

质心是与质点系质量分布有关的一个代表点，它的位置在平均意义上代表着质量分布的中心。

##### (2) 质心位置坐标定义

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} = \int \frac{\vec{r}}{m} dm$$

##### (3) 重心与质心的区别

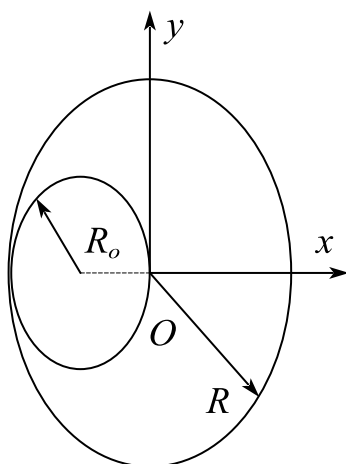
- ①重心是地球对物体各部分引力的合力（即重力）的作用点；
- ②质心是物体运动中由其质量分布所决定的一个特殊的点；
- ③物体的重心和质心的位置不一定重合。

**例 1.** 如图所示，有一半径为  $R$  匀质椭圆盘，过圆盘中心挖出与大圆盘边缘相切

的半径为  $\frac{1}{2}R$  的小圆盘，则挖去后剩余部分薄板的质心坐标为  $x_c = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

$y_c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。





解：  $\frac{1}{6}R$ ； 0。

由对称性  $y_c = 0$

$$\text{去掉部分: } x_{c1} = \frac{\sum m_i x_i}{m_1} = -\frac{R}{2}$$

$$\text{剩余: } x_{c2} = \frac{\sum m_j x_j}{m_2}$$

$$m_1 = \frac{1}{4}m, \quad m_2 = \frac{3}{4}m = 3m$$

$$\text{原始: } x_c = 0 = \frac{\sum m_i x_i + \sum m_j x_j}{m_1 + m_2} = -\frac{R}{8} + \frac{3}{4}x_{c2}$$

$$x_{c2} = \frac{R}{6}$$

### 3) 质心运动定理

#### (1) 质心的速度

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$

#### (2) 质心的加速度

配套课程 习题答案



$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i}$$

### (3) 质心运动定理

$$\sum \vec{F}_i = m \vec{a}_c$$

上式表明，不管物体质量如何分布，外力作用如何，质心的运动总是确定的，与所有外力都集中在一个质点的运动相同。

## 2. 动量定理 动量守恒定律

### 1) 动量定理

#### (1) 力的冲量

力的冲量是指外力在某段时间内的累积量，用符号 $\vec{I}$ 表示。

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

#### (2) 动量定理

物体在运动过程中所受合外力的冲量，等于该物体动量的增量，即

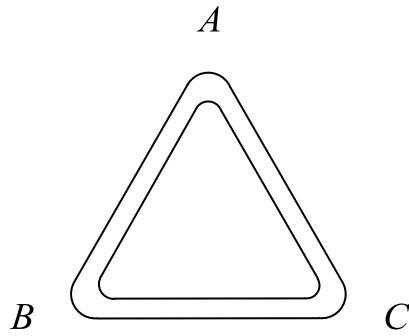
$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

不管动量变化的过程如何，冲量的大小和方向总是等于物体初末动量的矢量差。

**例 2.** 质量为 $m$ 的质点，以不变速率 $v$ 沿图中正三角形 $ABC$ 的水平光滑轨道运动，

质点越过 $A$ 角时，轨道作用于质点的冲量大小为：（ ）

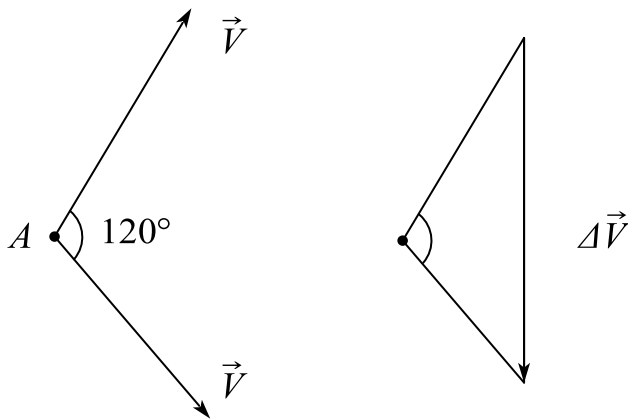




- A.  $mv$       B.  $\sqrt{2}mv$       C.  $\sqrt{3}mv$       D.  $2m$

答案：C

解析：



$$\vec{I} = \Delta\vec{P} = m\Delta\vec{v}$$

$$\Delta v = \sqrt{3}v$$

$$\therefore I = \sqrt{3}mv$$

例 3. 质量为 $0.25\text{kg}$ 的质点，受力 $\vec{F} = t\vec{i}$  ( $SI$ )的作用，式中 $t$ 为时间。 $t = 0$ 时，该质点以 $\vec{v} = 2\vec{j}$  ( $SI$ )的速度通过坐标原点，求：

- (1) 该质点任意时刻的位置矢量 $\vec{r}$ ；
- (2) 质点的轨道方程；
- (3) 在开始的两秒内此力的冲量。

解析：(1)  $\vec{i}$  方向上： $F = t = m \frac{dv}{dt}$



$$\therefore v = \frac{1}{2m} t^2$$

$$x = \int v dt = \frac{1}{6m} t^3$$

$$\vec{j} \text{ 方向: } y = 2t$$

$$\vec{r} = \frac{1}{6m} t^3 \cdot \vec{i} + 2t \cdot \vec{j}$$

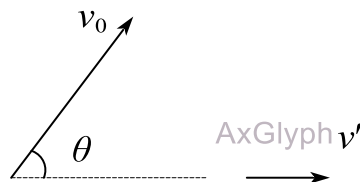
$$(2) x = \frac{y^3}{48m}$$

$$(3) \vec{I} = \int_0^2 F dt \vec{i} = 2\vec{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

例 4. 一质量为  $m$  的物体做斜抛运动，初速度为  $v_0$ ，与水平面夹角为  $\theta$ 。若忽略空气阻力，则从抛出点到最高点的过程中，物体所受合外力的冲量大小为\_\_\_\_\_，冲量的方向为\_\_\_\_\_。

答案：  $mv_0 \sin \theta$ ； 竖直向下

解析： 只受重力作用， 只考虑竖直方向：



最高点只有水平速度  $I = m\Delta v = -mv_0 \sin \theta$

方向竖直向下

## 2) 变质量物体的运动方程

变质量物体运动方程的微分形式

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) - \frac{dm}{dt}\vec{u} = \vec{F}$$

$m$  的速度  $\vec{v}$ ，  $dm$  的速度  $\vec{u}$

配套课程 习题答案



## 3) 动量守恒定律

## (1) 动量守恒定律

若系统所受外力之和为零，则系统的总动量保持不变。

$$\Sigma \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \Sigma m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_c = \text{常矢量}$$

## (2) 相关说明

①系统的动量不变与质心保持匀速直线运动状态是等效的。

②分析系统所受外力时，系统总动量不守恒，但总动量在该方向的分量却是守恒的。

③动量是物体机械运动的一种量度。

例 5. 气球下悬软梯，总质量为  $M$ ，软梯上站一质量为  $m$  的人，初始气球与人均相对静止，当人相对软梯以速度  $v$  向上爬时，气球的速度为(以向上为正)( )。

A.  $-\frac{mv}{m+M}$       B.  $-\frac{mv}{M}$       C.  $-\frac{(m+M)v}{M}$       D.  $-\frac{Mv}{m}$

答案: A

解析:  $v_1 \uparrow \downarrow v_2$

$$v = v_1 + v_2 \quad mv_1 = Mv_2$$

$$mv - mv_2 = Mv_2 \quad mv = (M + m)v_2$$

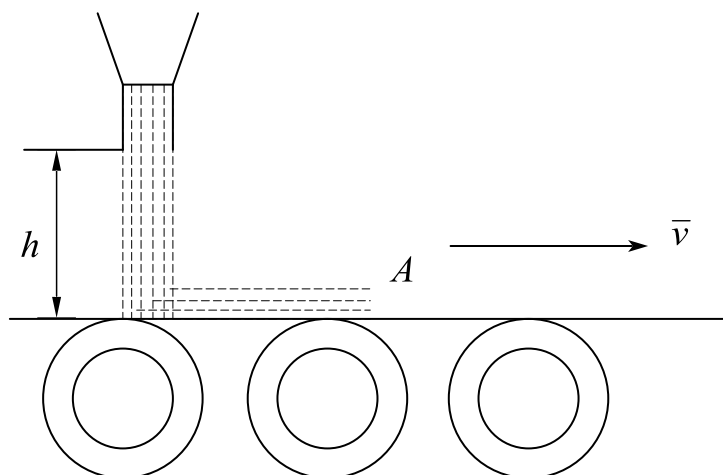
$$\therefore v_2 = \frac{m}{M + m}v$$

方向向下

例 6. 如图，用传送带  $A$  输送煤粉，料斗口在  $A$  上方高  $h = 0.5\text{m}$  处，煤粉自料斗口自由落在  $A$  上，设料斗口连续卸煤的流量为  $q_m = 40\text{kg/s}$ ， $A$  以  $v = 2.0\text{m/s}$  的水平速度匀速向右移动，求装煤的过程中，煤粉对  $A$  的作用力的大小和方向。(不计相对传送带静止的煤粉质量)







解析：刚到  $A$  时，速度向下

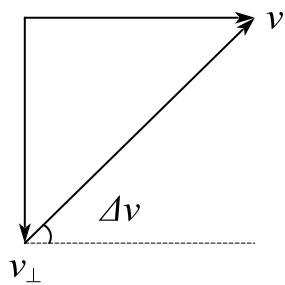
$$v_{\perp} = \sqrt{2gh} = \sqrt{10} \text{ m/s} \quad \Delta v = \sqrt{14} \text{ m/s}$$

与水平方向成  $\theta = \arctan \frac{\sqrt{10}}{2}$

$$F = \Delta p/t \quad \Delta p = qt\Delta v$$

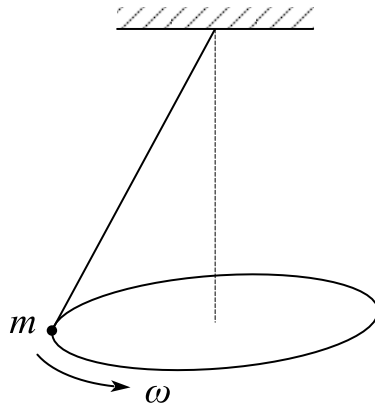
$$\therefore F = q\Delta v = 40\sqrt{14} \text{ N}$$

$A$  受到力的方向与水平方向夹角为  $\theta$  向左下方



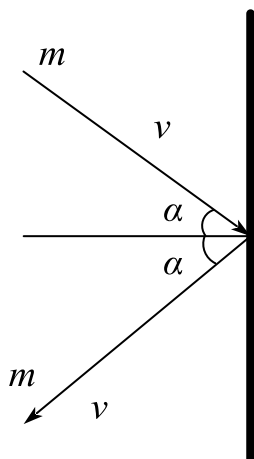
### 课时三 练习题

1. 如图所示为一圆锥摆，质量 $m$ 的质点在水平面内以角速度 $\omega$ 匀速转动。在质点转动一周的过程中，质点动量增量的大小为\_\_\_\_\_；质点所受重力的冲量大小为\_\_\_\_\_；质点所受拉力的冲量大小为\_\_\_\_\_。



2. 质量为 $10\text{kg}$ 的物体在变力作用下从静止开始直线运动，力随时间的变化规律是 $F = 3 + 4t$ （式中 $F$ 以牛顿， $t$ 以秒计），由此可知， $3\text{s}$ 后此物体的速率为\_\_\_\_\_  $\text{m/s}$ 。
3. 在质点系中，各质点相对质心的总动量恒为零。（    ）
4. 一质点在力 $F = 5m(5 - 2t)$ （SI）（式中 $m$ 为质点的质量， $t$ 为时间）的作用下， $t = 0$ 时从静止开始作直线运动，则当 $t = 5\text{s}$ 时，该力对质点的冲量为\_\_\_\_\_  $\text{N} \cdot \text{s}$ ；质点的速率为\_\_\_\_\_  $\text{m/s}$ 。
5. 质点的动量大小跟所选择的惯性参考系有关。（    ）
6. 质量为 $m$ ，速率为 $v$ 的小球，以入射角 $\alpha$ 斜向与墙壁相碰，又以原速率沿反射角 $\alpha$ 方向从墙壁碰撞时间 $\Delta t$ ，则墙壁受到的平均冲力大小和方向为：（    ）。





A.  $\bar{F} = 2mv \cos \alpha / \Delta t$ ，方向为垂直墙面指向墙内

B.  $\bar{F} = 2mv / \Delta t$ ，方向为垂直墙面指向墙内

C.  $\bar{F} = 2mv \cos \alpha / \Delta t$ ，方向为垂直墙面指向墙外

D.  $\bar{F} = 2mv / \Delta t$ ，方向为垂直墙面指向墙外

7. 一质量为  $m = 60\text{kg}$  的人站在一条小木船上，小木船的质量为  $M = 600\text{kg}$ ，且以  $V = 2\text{m/s}$  的速率向湖岸驶进，湖水的静止的，其阻力不计，现在人相对于船以一水平速率  $v$  沿着船的前进方向跳向河岸，该人起跳后，船速减为  $V' = \frac{1}{2}V$ ，

对  $v$  的大小，有人解法如下： $(M + m)V = mv + MV'$  ①  $V' = \frac{1}{2}V$  ②，由①②联立，解出  $v = 12\text{m/s}$ 。

上述解法是否正确，如有错误，请指出并予以改正。

8. 质点的运动方程为  $\vec{r} = A \cos \omega t \vec{i} - B \sin \omega t \vec{j}$  ( $A$ 、 $B$  和  $\omega$  都是正常数)，从  $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$  到  $t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$  时间内质点的位移为\_\_\_\_\_；所受冲量大小为\_\_\_\_\_。

9. 质量为  $m$  的铁锤竖直落下，打在木桩上并停下，设打击时间为  $\Delta t$ ，打击前铁锤速率为  $v$ ，则在打击木桩的时间内，铁锤所受平均合外力的大小为 ( )。

A.  $mv / \Delta t$

B.  $mv / \Delta t - mg$

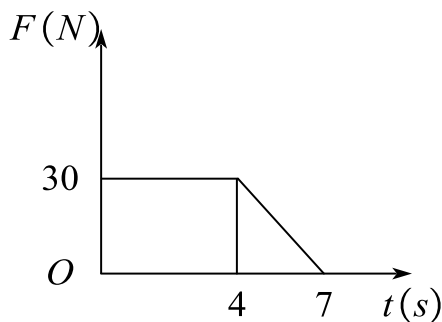
C.  $mv / \Delta t + mg$

D.  $2mv / \Delta t$

配套课程 习题答案



10. 质量  $m = 10\text{kg}$  的木箱放在地面上，在水平拉力  $F$  的作用下由静止开始沿直线运动，其拉力随时间的变化关系如图所示，若已知木箱与地面间的摩擦系数  $\mu = 0.2$ ，那么在  $t = 4\text{s}$  时，木箱的速度大小为\_\_\_\_\_；在  $t = 7\text{s}$  时，木箱的速度大小为\_\_\_\_\_。（ $g$  取  $10\text{m/s}^2$ ）



11. 在水平面上以一定速度向东行驶的炮车，向东南（斜向上）方向发射一炮弹，对于炮车和炮弹这一系统，在此过程中（忽略冰面摩擦力及空气阻力）（ ）。

- A. 总动量守恒
- B. 总动量在任何方向的分量均不守恒
- C. 总动量在炮身前进的方向上的分量守恒，其他方向动量不守恒
- D. 总动量在水平面上任意方向的分量守恒，竖直方向分量不守恒



## 课时四 功能关系

知识点	重要程度	题型
1.功、能量、动能定理	★★★★★	选填、简答、计算
2.保守力、成对力的功、势能	★★★★	选填、简答、计算
3.质点系的功能原理、机械能守恒定律	★★★★	选填、简答、计算

### 1. 功、动能、动能定理

#### 1) 功

功是力在位移方向上的投影和此元位移大小的乘积，也称力和位移的点积。

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- (1) 功是标量，无方向，有正负；
- (2) 当力和位移夹角为锐角时，功为正；
- (3) 当力和位移夹角为钝角时，功为负；
- (4) 功反映了力的空间累积，大小取决于运动过程，是过程量。

#### 2) 功率

功率是力在单位时间内作的功，即

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

题 1. 质量为  $m = 2\text{kg}$  的物体，在力为  $F_t = 2 + 4t (St)$  作用下，沿  $x$  轴正向运动，

已知在  $t = 0s$  时， $x_0 = 0m$ ， $v_0 = 1m/s$ ，试求：

(1) 物体运动的速度大小

(2) 物体的运动方程

(3) 在  $t = 1s$  到  $t = 2s$  时间间隔内，此力对物体所做的功

解析：

$$(1) F = m \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore V = \frac{1}{m} (2t + 2t^2) + C$$



$$\therefore t=0 \text{ 时, } V_0 = C = 1$$

$$\therefore V = \frac{2t}{m}(t+1) + 1 + t^2 + t + 1$$

$$(2) \quad x = \int v dt = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t + C'$$

$$t=0 \text{ 时, } x = C' = 0$$

$$\therefore X = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t$$

$$(3) \quad W = \int F dx = \int^2 (2+4t)(t^2+t+1) dt = 40J$$

### 3) 能量

能量是物体运动形式的一个量度，能量值随物体状态变化而变化，是状态量。

### 4) 动能定理

#### (1) 动能：

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

#### (2) 动能定理：

$$W = E_{k_2} - E_{k_1}$$

①表明合外力对物体作的功总等于物体动能的增量；

②功是过程量，动能是状态量；

③表明功是物体在某过程中能量改变的一种量度。

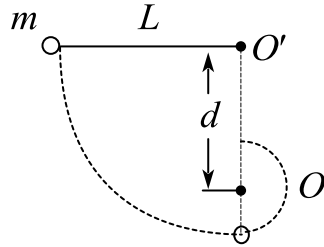
#### (3) 动能定理的微分形式：

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dE}{dt}$$

动能定理的形式与惯性参考系的选择无关



题 4. 如图所示，长度为  $L$  的轻绳一端固定在  $O'$  点，另一端系有一个质量为  $m$  的小球，绳的悬挂点下方距悬挂点的距离为  $d$  处的  $O$  有一钉子，小球从水平位置初速释放，欲使球在以钉子  $O$  为中心的圆周上绕一圈，求最小的  $d$  为多少



解析：

$$mg = m \frac{V^2}{L-d}$$

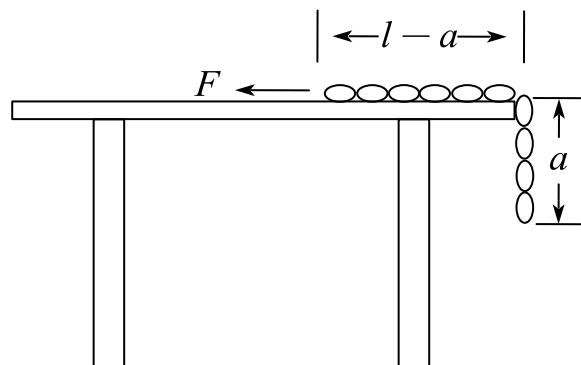
$$mg(2d-L) = \frac{1}{2}mV^2 - 0$$

$$\therefore d = \frac{3}{5}L$$

题 5. 质量为  $m$  的铁链总长  $l$ ，放在桌面上的长度为  $(l-a)$ ，下垂部分的长度为  $a$ ，铁链与桌面间的动摩擦系数为  $\mu$ 。有一恒力  $F$  作用铁链在上(如图所示)，使铁链由静止开始运动，当铁链全部被拉到桌面上时，求：

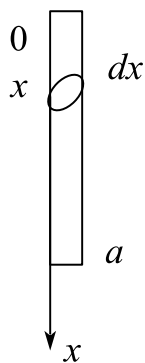
(1) 摩擦力对铁链作了多少功？

(2) 铁链的速率是多少？



解析：



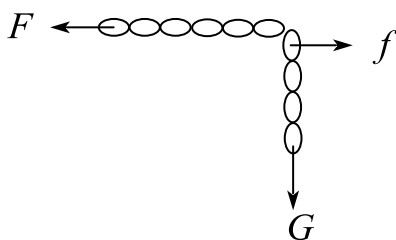


(1) 铁链线密度为  $\lambda = \frac{m}{l}$

$$\begin{aligned} \therefore -W_f &= \left[ \mu\lambda(l-a) \cdot a + \int_0^a \mu\lambda(a-x)dx \right] g \\ &= \frac{\mu ma}{2l} (2l-a)g \end{aligned}$$

$$\therefore W_f = \mu \left( \frac{a}{2l} - 1 \right) mag$$

(2)



$$W_G + W_F + W_f = \frac{1}{2} mV^2 - 0$$

$$W_G = \int_0^a \lambda dx \cdot gx = \frac{mg}{2l} a^2$$

$$W_F = Fa$$

$$\therefore V = \sqrt{(1-\mu) \frac{9}{2} a^2 + \left( \frac{2F}{m} - 2\mu g \right) a}$$

## 2. 保守力、成对力的功、势能

### 1) 保守力

配套课程 习题答案





保守力是指功的大小只与物体的始末位置有关，与所经历的路径无关的力。常见的保守力有重力、弹性力、万有引力、静电力等。

(2) 质点沿任意闭合路径运动一周时，保守力对它做功为零，即

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

(3) 在任意的参考系中，成对保守力的功只取决于相互作用质点的始末相对位置，而与各质点的运动路径无关

## 2) 成对力做功

任何一对作用力和反作用力所作的总功具有与参考系选择无关的不变性质。在静电场中场强沿任一闭合路径的线积分恒等于零，即

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

## 3) 势能

### (1) 定义

势能是以保守力做功为前提引入的。保守力的功可简单地写成

$$W_C = E_{P_1} - E_{P_2} = -\Delta E_P$$

成对保守内力的功等于系统势能的减少(或势能增量的负值)。

### (2) 相关说明

- ① 势能与物体间的相互作用与相对位置有关，属于物体系统；
- ② 单个物体不具有势能；
- ③ 势能的量值，只有相对意义，而势能差有绝对意义。

### (3) 常见的势能表达式

① 重力势能：

$$E_P = mgh$$

② 弹性势能：

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2$$

③ 引力势能（取无穷远为势能零点）：



$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

题 2. 对功的概念有以下几种说法：

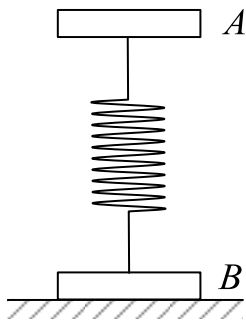
- (1) 保守力作正功时，系统内相应的势能增加
- (2) 质点运动经一闭合路径，保守力对质点作的功为零
- (3) 作用力和反作用力大小相等、方向相反，两者所作功的代数和必为零

- A. (1)、(2) 是正确的
- B. (2) (3) 是正确的
- C. 只有 (2) 是正确的
- D. 只有是 (3) 正确的

解析：选 C；

- (1) 保守力做正功，势能减小；
- (2) 质点初末位置相同，保守力不做功；
- (3) 作用力与反作用力可以都做正功也可以都做负功，也可以不做功，因此代数和不一定为 0，反例：两个磁铁靠近后由静止相互分离，作用力与反作用力都做正功，代数和必为正值。

题 5. 如图(a)所示 A 和 B 两块板用一轻弹簧连接起来，它们的质量分别为  $m_1$  和  $m_2$ ，问在 A 板上需加多大的压力，方可在力停止作用后，恰能使 A 在跳起来时 B 稍被提起。(设弹簧的劲度系数为  $k$ )



解析：  $F_1 = kx_1; E_{p_1} = \frac{1}{2} kx_1^2$

$$F_2 = m_2 g = kx_2; E_{p_2} = \frac{1}{2} kx_2^2$$

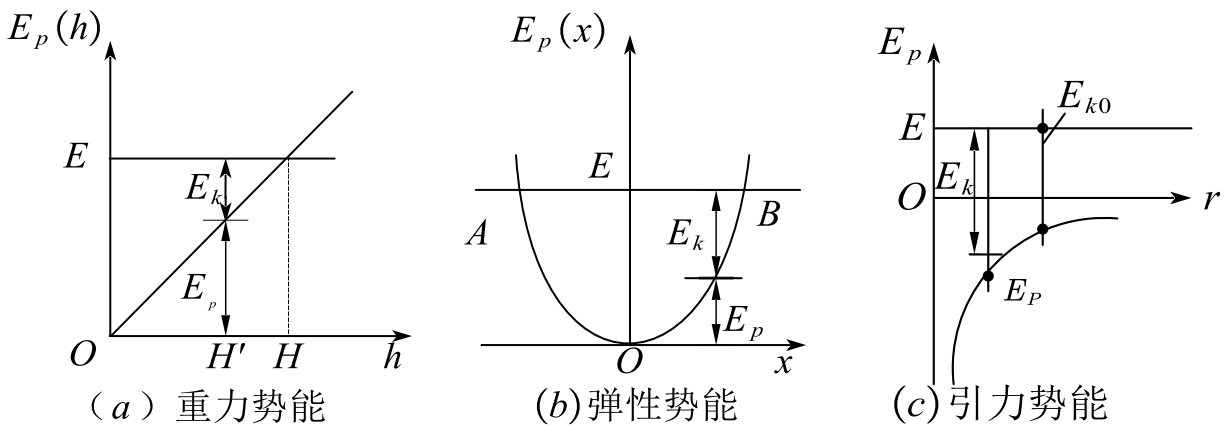
由动能定理：

$$m_1 g(x_1 + x_2) + E_{p_2} = E_{p_1}$$

$$\therefore F_1 = 2m_1 g - m_2 g$$

#### (4) 势能曲线

势能曲线是势能和相对位置的关系曲线。如图所示。



(1) 系统能量：在保守力下，系统的总能量保持不变，表示为水平直线。

(2) 运动发生条件：只有符合  $E_k > 0$  的运动才可能发生。

(3) 保守力：根据势能定义

$$F_x = - \frac{dE_p}{dx}$$

上式表明，保守力沿某坐标轴的分量等于势能对此坐标的导数的负值。

### 3. 质点系的功能原理、机械能守恒定律

#### 1) 质点系的动能定理

质点系的动能定理是指系统外力和内力做功的总和等于系统动能的增量。

$$W_e + W_i = \Delta E_k$$

配套课程 习题答案



### 题 1. (判断) 质点系中的一对内力不能改变质点系的总动能

答案:  $\times$

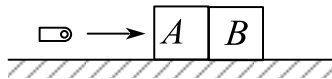
解析: 只有这一对内力作用的两个质点的距离始终保持不变时, 才不会改变质点系的总动能

### 2) 质点系的功能原理

质点系的功能原理是指当系统从状态 1 变化到状态 2 时, 它的机械能的增量等于外力的功  $W_e$  和非保守内力的功  $W_{id}$  的总和.

$$W_e + W_{id} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E$$

题 2. 两块并排的木块  $A$  和  $B$ , 质量分别为  $m_1$  和  $m_2$ , 静止地放其在光滑的水平面上, 一子弹水平地穿过两木块, 设子弹穿过两木块所用的时间分别为  $\Delta t_1$ , 和  $\Delta t_2$ , 木块对子弹的阻力为恒力  $F$ , 则子弹穿出后, 木块  $A$  的速度大小为\_\_\_\_\_, 木块  $B$  的速度大小为\_\_\_\_\_。



解析:  $\frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2}; \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2} + \frac{F\Delta t_2}{m_1}$

$$(m_1 + m_2)V_A = F\Delta t_1$$

$$\therefore V_A = \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2}$$

$$F\Delta t_2 = m_2V_B - m_2V_A$$

$$\therefore V_B = \frac{F\Delta t_2}{m_2} + \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2}$$

### 3) 机械能守恒定律

#### (1) 机械能守恒

配套课程 习题答案



机械能守恒是指系统不靠外力而保持在转换过程中的机械能不变。

(2) 机械能守恒的条件

$$W_e = 0, W_{id} = 0 \Rightarrow \Delta E = 0$$

(3) 机械能守恒定律

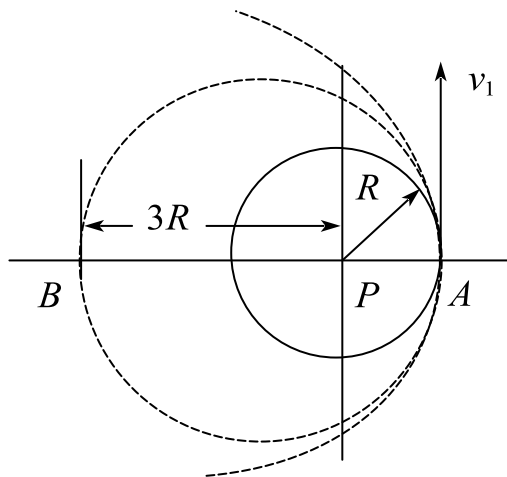
机械能守恒定律是指如果一个系统内只有保守内力做功，其他内力和一切外力都不做功，则系统内各物体的动能和势能可以相互转化，但机械能的总值不变。  
天体在椭圆轨道上的机械能：

$$E = -\frac{GmM}{2r} = \frac{1}{2}E_P$$

**题 3. 飞船绕行星  $P$  作半径为  $R$  的圆轨道飞行，飞行速率恒定为  $v_1$**

(1) 在  $A$  点增大飞船的速率达到  $v_2$ ，速度方向不变，使飞船轨道变为经过  $A$  点和  $B$  点的椭圆形（ $B$  点到行星中心  $P$  的距离为  $3R$ ），那么  $v_2$  必须达到  $v_1$  的多少倍？

(2) 在  $A$  点增大飞船的速率达到  $v'_2$ ，速度方向不变，使飞船轨道变为顶点为  $A$  点的抛物线形，那么  $v'_2$  必须达到  $v_1$  的多少倍？



解析：

$$(1) E_1 = -\frac{GmM}{4R} = \frac{1}{2}mV_2^2 + \left(-\frac{GmM}{R}\right)$$

$$\therefore V_2 = \sqrt{\frac{3GM}{2R}}$$

配套课程 习题答案



$$V_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$\therefore V_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} V_1$$

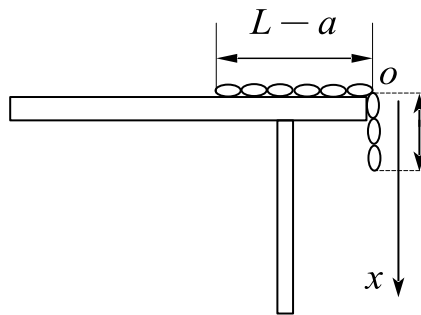
$$(2) E_2 = O = \frac{1}{2} m V_2'^2 - \frac{GmM}{R}$$

$$\therefore V_2' = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2} V_1$$

#### 4) 能量守恒定律

一个孤立系统经历任何变化时，该系统的所有能量的总和是不变的，能量只能从一种形式变化为另一种形式，或从系统内一个物体传给另一个物体，称为能量守恒定律。

**题 4. 质量均匀分布的刚性链条，总长为  $L$  出滑面的长度为  $a$ ，若由静止释放：**



(1) 下滑过程中，满足什么守恒？

(2) 求链条全都脱离光滑桌面时的速率。

解析：(1) 下滑过程中由于系统只受到重力作用，因此机械能守恒

(2) 设线密度为  $\lambda$

$$\lambda a g(L-a) + \int_0^{L-a} \lambda dx g \cdot x = \frac{1}{2} \lambda L v^2$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{L^2 - a^2}{L} g}$$

配套课程 习题答案



## 5) 黑洞

## (1) 逃逸速度

质量为 $m$ 的物体从一个球状星体上逃逸，逃逸速度满足条件：

$$v \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

式中， $G$ 为万有引力恒量， $M$ 为星球质量， $R$ 为星球半径.

## (2) 黑洞形成条件

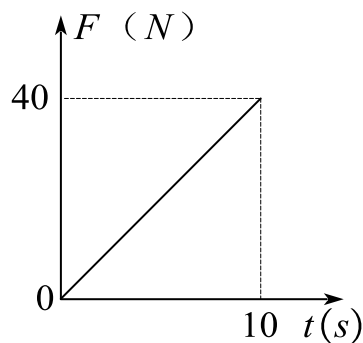
$$c^2 \leq \frac{2GM}{R}$$

式中， $c$ 为光速.



## 课时四 练习题

1. 物体在介质中按规  $x = \frac{1}{3}t^3 - 3$  作直线运动，设介质对物体的阻力与速度的关系为  $f = -kv^2$ ，求物体由0到  $T$  时间间隔内，阻力对物体的冲量和所做的功。  
(保留阻力系数)
2. 一质点在水平面上做匀速率圆周运动，则\_\_\_\_\_。  
 A. 它的动能、动量都保持不变                      B. 动能保持不变，动量在改变  
 C. 动能、动量都在改变                              D. 动能在改变，动量保持不变
3. 将一重物匀速地推上一个斜坡，因其动能不变，所以：( )  
 A. 推力不作功    B. 推力功与摩擦力功等值反号；  
 C. 推力功与重力功等值反号                      D. 此重物所受的外力的功之和为零。
4. 质量  $m = 0.5\text{kg}$  的质点，在  $oxy$  坐标平面内运动，其运动方程为  $x = 5t, y = 0.5t^2 (SI)$ 。从  $t = 2\text{s}$  到  $t = 4\text{s}$  这段时间内，合外力对质点作的功为\_\_
5. 质量为  $2\text{kg}$  的玩具火箭受到竖直向上的推力作用，此推力随时间的变化关系如图所示，推力作用持续  $10\text{s}$  后撤去，火箭初始处于静止，求 (重力加速度  $g = 10\text{m/s}^2$ )；



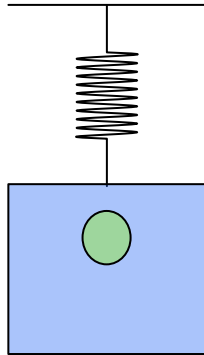
- (1) 什么时间火箭开始启动？
- (2) 启动后火箭的速度与时间的函数关系：
- (3)  $10\text{s}$  时火箭上升的高度。





6. 如图 6 所示，质量为  $m$  的框架用一弹簧悬挂起来，弹簧伸长  $x_0$ ，若有一质量为  $m$  的铅块在高  $h = 3x_0$  处从静止开始落进框架，求此框架向下移动的最大距离。

(弹簧质量不计，空气阻力不计)。



7. 在下述四种力中，做功与路径有关的力是 ( )

- A. 万有引力      B. 弹性力      C. 重力      D. 摩擦力

8. 关于势能，正确说法是 ( )

- A. 重力势能总是正的  
 B. 弹性势能总是负的  
 C. 万有引力势能总是负的  
 D. 势能的正负只是相对于势能零点而言

9. 一保守力  $\vec{F} = (-Ax + Bx^2)\vec{i}$ ，若取  $x = 0$  为势能零点，则该系统的势能

$E_p = \underline{\hspace{2cm}}$ ；质点从  $x = 2m$  到  $x = 3m$  的过程中  $\Delta E_p = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 倔强系数为  $k$  的轻弹簧竖直挂起，下端系一质量为  $m$  的小球，静止时簧长度为  $l_0$ 。当小球由此位置向下运动至弹簧长度为  $l$  的过程中：

- A. 重力势能的增量为  $mg(l - l_0)$   
 B. 重力做功  $mg(l - l_0)$   
 C. 弹性势能的增量  $\frac{1}{2}k(l - l_0)$   
 D. 弹性力所功  $-\frac{1}{2}k(l - l_0)$



11. 对质点组有以下几种说法：

- (1) 质点组总动量的改变与内力无关；
- (2) 质点组总动能的改变与内力无关；
- (3) 质点组总机械能的改变与保守内力无关.

下列对上述说法判断正确的是 ( )

- A. 只有 (1) 是正确的
- B. (1), (2) 是正确的
- C. (1), (3) 是正确的.
- D. (2), (3) 是正确的

12. 对于一个物体来说，在下列条件中，那种情况下系统的机械能守恒？

- A. 合外力为 0。
- B. 外力和保守内力都不做功。
- C. 合外力不做功。
- D. 外力和非保守内力都不做功。

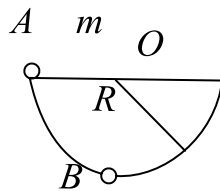
13. 对于一个物体来说，在下列条件中，那种情况下系统的总动量守恒？

- A. 合外力为零。
- B. 合外力矩为零。
- C. 合外力不做功。
- D. 外力和内力都不做功

14. 一人从 10 米深的井中提水，起始桶中装有 10 千克的水，由于水桶漏水，每升高 1.0 米要漏去 0.2 千克的水。水桶被匀速的从井中提到井口，求人所做的功。

15. 一质量为  $m$  的质点，在半径为  $R$  的固定半球形容器中，由静止开始自边缘  $A$  点滑下，到达最低点  $B$  时，他对容器的正压力为  $N$ ，如图一所示，则质点自  $A$  滑到  $B$  的过程中，摩擦力对其作的功为 ( )





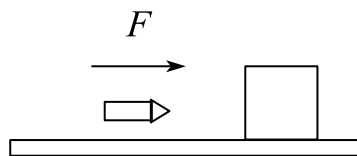
- A.  $\frac{1}{2}R(N - 3mg)$
- B.  $\frac{1}{2}R(3mg - N)$
- C.  $\frac{1}{2}R(N - mg)$
- D.  $\frac{1}{2}R(N - 2mg)$

16. 将一轻弹簧从原长向外拉伸  $2\text{cm}$ ，需要对弹簧做功  $20\text{J}$ 。现在已拉伸  $2\text{cm}$  的基础上，再将弹资向外拉  $2\text{cm}$ ，则在第二次拉伸过程中需要对弹簧做功  $\underline{\hspace{2cm}}\text{J}$

17. 有两个倾角不同、高度相同，质量一样的斜面放在光滑的水平面上，斜面是光滑的，有两个一样的物块分别从这两个斜面的顶点由静止开始滑下，则

- A. 物块到达斜面底端时的动量相等。
- B. 物块到达斜面底端时动能相等。
- C. 物块和斜面（以及地球）组成的系统，机械能不守恒
- D. 物块和斜面组成的系统水平方向上动量守恒。

18. 如图所示，子弹射入放在水平光滑地面上静止的木块后而突出，以地面为参考系，下列说法中正确的是（ ）



- A. 子弹减少的动能转变为木块的动能
- B. 子弹一木块系统的机械能守恒
- C. 子弹动能的减少等于子弹克服木块阻力所作的功
- D. 子弹克服木块阻力所作的功等于这一过程中产生的热量

19. 保守力的特点是所做的功与路径  $\underline{\hspace{2cm}}$  (填“有关”或“无关”)，重力、弹力、万有引力、摩擦力这四种力中，哪种力是非保守力？  $\underline{\hspace{2cm}}$

配套课程 习题答案



20. 质量为 $m$ 的飞船返回地球时将发动机关闭，认为他仅在地球引力场中运动。设地球质量 $M$ ，求飞船从与地心距离为 $2R$ 下降至 $R$ 的过程中，飞船势能的增量为\_\_\_\_\_。



## 课时五 碰撞和角动量

知识点	重要程度	题型
1. 碰撞	★★★★	选填、计算
2. 质点的角动量和角动量守恒定律	★★★	选填、计算

### 1. 碰撞

#### 1) 碰撞定律

##### (1) 对心碰撞

对心碰撞是指碰撞前后的速度均在两球的中心连线上的碰撞，又称正碰撞。

##### (2) 碰撞定律

碰后两球分离速度与碰前两球的接近速度成正比，即

$$e = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}}$$

式中， $e$  为恢复系数，只与两物体的材料性质有关。

①  $e = 0$ ，碰后两物体以同一速度运动，并不分开，称为完全非弹性碰撞；

②  $e = 1$ ，分离速度等于接近速度，碰撞前后系统总机械能守恒，称为完全弹性碰撞；

③ 其他一般情况下，两球在碰撞过程中机械能并不守恒，称为非弹性碰撞。

#### 2) 完全弹性碰撞

特点：碰撞前后系统动量守恒，机械能守恒（或者  $e = 1$ ）。

$$m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_{20} - \vec{v}_{10}$$

#### 3) 完全非弹性碰撞

特点：碰撞前后系统动量守恒，机械能损失最大（或者  $e = 0$ ）。

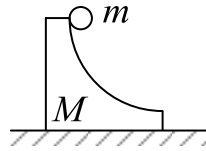
$$m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 0$$

配套课程 习题答案



题 1. 质量为  $M$  的大木块具有半径为  $R$  的四分之一弧形槽，如图所示。质量为  $m$  的小立方体从曲面的顶端滑下，大木块放在光滑水平面上，二者都作无摩擦的运动，而且都从静止开始，求小木块脱离大木块时的速度。



解：水平方向动量守恒：

$$mv_1 = Mv_2,$$

由机械能守恒：

$$mgR = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2,$$

$$\therefore v_1 = \sqrt{\frac{2MgR}{M+m}}. \text{ 方向向右。}$$

## 2. 质点的角动量和角动量守恒定律

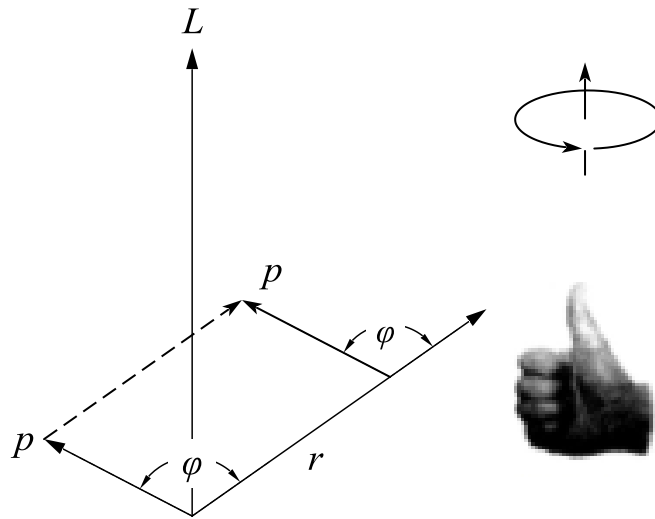
### 1) 角动量

角动量是矢量，可用位矢  $\vec{r}$  与动量  $\vec{p}$  的矢积来表示

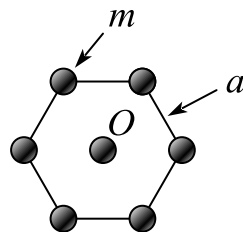
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

这表明角动量  $\vec{L}$  大小为  $rp \sin\varphi$ ，方向垂直于位矢  $\vec{r}$  与动量  $\vec{p}$  组成的平面，由  $\vec{r}$  经小于  $180^\circ$  的角转到  $\vec{p}$  的右手螺旋前进的方向。如图所示。





题 1. 质量为  $m$  的小钢球，用细杆（质量可忽略）连接成类石墨烯原子排布的正六边形结构（边长为  $a$ ）如图所示，若此结构绕垂直纸面且通过中心  $O$  点的轴旋转，角速度为  $\omega$ ，则系统的角动量为（ ）。



答案：  $6a^2m\vec{\omega}$

解析：  $\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ ,

$\therefore \vec{L} = 6a^2m\vec{\omega}$ ，可知  $L$  方向与  $\omega$  相同。

2) 角动量守恒定律

(1) 角动量定理

力的作用点相对给定点的位矢  $\vec{r}$  与力  $\vec{F}$  的矢积为力对给定点的力矩  $\vec{M}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

配套课程 习题答案



角动量定理可表示成

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

题 3. 一质量为  $m$  的质点沿着一条空间曲线运动，该曲线在直角坐标系下的定义为  $\vec{r} = a \cos \omega t \vec{i} + b \sin \omega t \vec{j}$ ，其中  $a$ 、 $b$ 、 $\omega$  皆为常数，则此质点所受的对原点的力矩  $\vec{M} = ( \quad )$ ；该质点对原点的角动量  $\vec{L} = ( \quad )$ 。

答案：0； $abm\omega\vec{k}$

解析：  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega \sin \omega t \vec{i} + b\omega \cos \omega t \vec{j}$ ，

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} = abm\omega\vec{k}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

## 2) 角动量守恒定律

若作用在质点上的外力对某给定点  $O$  的力矩 ( $\vec{r} \times \vec{F}$ ) 为零，则质点对  $O$  的角动量在运动过程中保持不变，称为质点的角动量守恒定律。

题 4 一人站在有光滑转轴的平台上，双臂水平举两个哑铃，该系统绕自身转轴转动。若转动中人把哑铃收回胸前，在此过程中，人、哑铃和平台组成的系统：

- A. 机械能守恒，角动量守恒；                      B. 机械能守恒，角动量不守恒；  
C. 机械能不守恒，角动量守恒；                      D. 机械能和角动量都不守恒。

答案：C

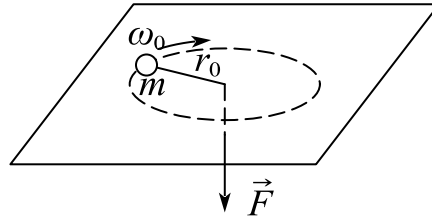
解析：系统重力势能不变，但是哑铃的速度减小，因此机械能不守恒，由于系统受到的合外力矩为0，角动量守恒。

配套课程 习题答案





题 5. 如图所示，一质量为  $m = 0.5 \text{ kg}$  的小球由一绳索系着，以角速度  $\omega_0 = 5 \text{ rad/s}$  在无摩擦的水平面上，作半径为  $r_0 = 0.4 \text{ m}$  的圆周运动，如果在绳的另一端作用一竖直向下的拉力  $F$ ，使小球作半径为  $r = 0.2 \text{ m}$  的圆周运动，则小球新的角速度  $\omega = (\quad) \text{ rad/s}$ ；拉力所做的功  $(\quad) \text{ J}$ 。



答案：20；3

解析：原角动量  $L_1 = m\omega_0 r_0^2$ ，新角动量  $L_2 = m\omega r^2$ ，

绳的拉力沿着径向，因此合外力矩为0，角动量守恒：

$$L_1 = L_2,$$

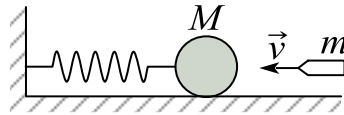
$$\therefore \omega = 4\omega_0 = 20 \text{ rad/s},$$

$$W = \frac{1}{2} m(\omega r)^2 - \frac{1}{2} m(\omega_0 r_0)^2 = 3 \text{ J}.$$



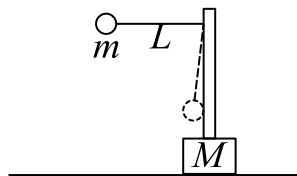
## 课时五 练习题

1. 一质量为  $M$  的弹簧振子，水平静止放置在平衡位置，如图所示。一质量为  $m$  的子弹以水平速度射入振子中，并随之一起运动。如果水平面光滑，此后弹簧的最大势能为（ ）。



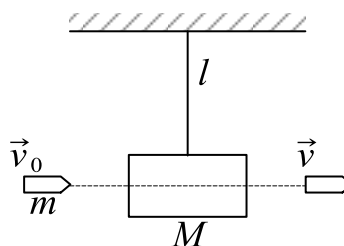
2. 如图所示，一质量为  $m$  的粘性小球用长为  $L$  的细绳挂在一木块上方的小立柱上，木块和立柱的总质量为  $M$ ，放到水平面上，木块与平面间的摩擦系数为  $\mu$ 。今把小球拉到水平位置（细绳张紧）后由静止释放，与小立柱发生完全非弹性碰撞，设小球下摆过程中木块不动，求：

- (1) 碰撞瞬间小球所受冲量；
- (2) 碰撞后系统移动多远才停下来？



3. 质量为  $M$  的物体，用一根长为  $l$  的细绳悬挂在天花板上，今有一质量为  $m$  的子弹以水平速度射穿物体，刚穿出物体时子弹的速度大小，设穿透时间较短，求：

- (1) 子弹刚穿出时绳中张力的大小；
- (2) 子弹在穿透过程中所受的冲量。



4. 一子弹以水平速度  $v$  射入一静止于光滑水平面的木块后，随木块一起运动，故过程中分析正确的是（ ）。

- A. 子弹、木块组成的系统动能守恒
- B. 子弹、木块组成的系统水平方向上动量守恒
- C. 子弹减少的动能等于木块增加的动能
- D. 子弹所受的冲量等于木块所受的冲量

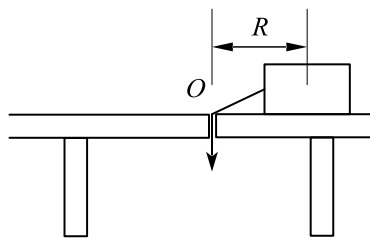
5. 一木块质量  $M = 1\text{kg}$ ，置于水平地面上，一质量  $m = 2 \times 10^{-3}\text{kg}$  的子弹以  $v_1 = 500\text{m/s}$  的速度水平击穿木块，速度减为  $v_2 = 100\text{m/s}$ ，木块沿水平方向滑行了  $0.2\text{m}$ ，求：

- (1) 子弹从木块射出瞬间木块的速度；
- (2) 木块对子弹做的功；
- (3) 木块和水平面间的摩擦系数。（重力加速度  $g$  取  $10\text{m/s}^2$ ）

6. 地球卫星以地球中心为焦点做椭圆运动，则地球与卫星组成的系统（ ）。

- A. 引力势能变化，卫星对地心的角动量不变
- B. 引力势能不变，卫星对地心的角动量不变
- C. 引力势能变化，卫星对地心的角动量变化
- D. 引力势能不变，卫星对地心的角动量变化

7. 如图所示，一个小物体位于光滑的水平桌面上，与一绳的一端相连接，绳的另一端穿过桌面中心的小孔，该物体原以角速度在半径为  $R$  的圆周上绕旋转，若将绳从小孔缓慢往下拉，则物体（ ）。



- A. 动能不变，动量改变



B. 动量不变，动能改变

C. 角动量不变，动量不变

D. 角动量不变，动量改变

8. 一水平圆盘可绕竖直中心轴转动，盘上站着一个人，初始时整个系统处于静止状态，当此人在盘上任意走动时，若忽略轴处摩擦，则此系统（ ）。

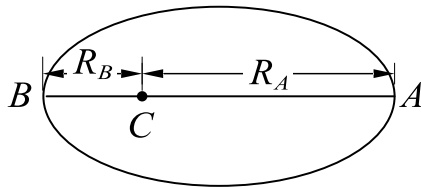
A. 机械能守恒

B. 对转轴的角动量守恒

C. 机械能、角动量都守恒

D. 机械能、角动量都不守恒

9. 如图所示，一人造卫星到地球中心  $C$  的最大距离和最小距离分别为  $R_A$  和  $R_B$ 。设人造卫星对应的角动量分别为  $L_A$  和  $L_B$ ，动能分别为  $E_{kA}$  和  $E_{kB}$ ，则有（ ）。



A.  $L_B < L_A$ ,  $E_{kB} = E_{kA}$ ;

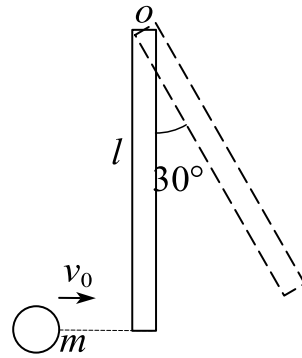
B.  $L_B > L_A$ ,  $E_{kB} > E_{kA}$ ;

C.  $L_B = L_A$ ,  $E_{kB} = E_{kA}$ ;

D.  $L_B = L_A$ ,  $E_{kB} > E_{kA}$ 。

10. 如图，长度为  $l$  的均匀直棒，可绕垂直于一端的水平轴  $o$  无摩擦地转动，初始静止于平衡位置，现有一小球以速度  $v_0$  与棒的下端发生完全非弹性碰撞。碰撞后，系统向右偏转至  $30^\circ$  角的位置。则在小球和直棒碰撞的过程中，小球和直棒的（ ）守恒；在向右偏转的过程中，小球和直棒的（ ）守恒。

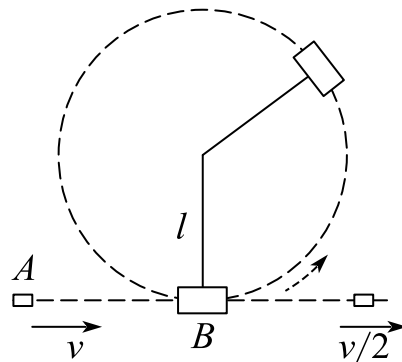




11. 质量为 $m$ 的子弹，以水平速度 $v_0$ 射入置于光滑水平面上的质量为 $M$ 的静止砂箱，子弹在砂箱中前进距离 $l$ 后停在砂箱中，同时砂箱向前运动的距离为 $S$ ，此后子弹与砂箱一起以共同速度匀速运动，则

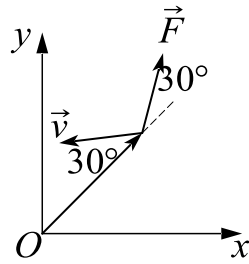
- (1) 子弹受到的平均阻力 $\bar{F}$ 为多少？
- (2) 求砂箱与子弹系统损失的机械能 $\Delta E$ 的大小

12. 一质量为 $m$ 的弹丸，穿过如图所示的摆锤后，速率由 $v$ 减少到 $v/2$ 。已知摆锤的质量为 $m'$ ，摆线长度为 $l$ ，如果摆锤能在垂直平面内完成一个完全的圆周运动，弹丸入射速度的最小值应是多少？



13. 如图所示，质点 $P$ 的质量为 $2\text{kg}$ ，位置矢量为 $\vec{r}$ ，速度为 $\vec{v}$ ，它受到力 $\vec{F}$ 的作用，这三个矢量均在 $Oxy$ 面内，且 $r = 3.0\text{m}$ ， $v = 4.0\text{m/s}$ ， $F = 2.0\text{N}$ ，则该质点对原点 $O$ 的角动量 $L = (\quad)$ ，作用在质点上的力对质点的力矩 $M = (\quad)$ 。





14. 两小球在光滑桌面上运动，质量分别为  $m_1 = 0.05\text{kg}$ ， $m_2 = 0.1\text{kg}$ ，速度分别为  $v_1 = 3\text{m/s}$ ， $v_2 = 1\text{m/s}$ 。相对而行，发生对心碰撞。(1) 如果碰撞后  $m_1$  恰好静止，求此时  $m_2$  的速度以及系统总动能的变化量，这碰撞是弹性碰撞么？(2) 如果  $m_2$  用铁钉固定在桌面上， $m_1$  以速率  $v_1 = 3\text{m/s}$  与  $m_2$  相撞后，仍以  $v_1 = 3\text{m/s}$  的速率返回，问俩小球组成的系统，总动能的变化量？系统的动量不守恒的原因？



## 课时六 刚体动力学

考点	重要程度	题型
1.刚体模型及其运动	★★★	选填、简答
2.力矩 转动惯量 定轴转动定律	★★★★★	选填、简答、计算

### 1. 刚体模型及其运动

#### 1) 力学分析方法

对物体复杂运动的研究，一般的力学分析方法可归纳为：

- (1) 突出主要矛盾，撇开次要因素，建立理想模型；
- (2) 将质点系化整为零，以质点或质元为研究对象，作为突破口；
- (3) 根据受力情况，正确地画出受力分析图；
- (4) 根据已知条件或初始条件，选用所需的基本原理、定律，列出方程式；
- (5) 根据要求，求解方程，统一变量，积零为整，用积分法求出结果；
- (6) 讨论分析所得结果，检验是否正确。

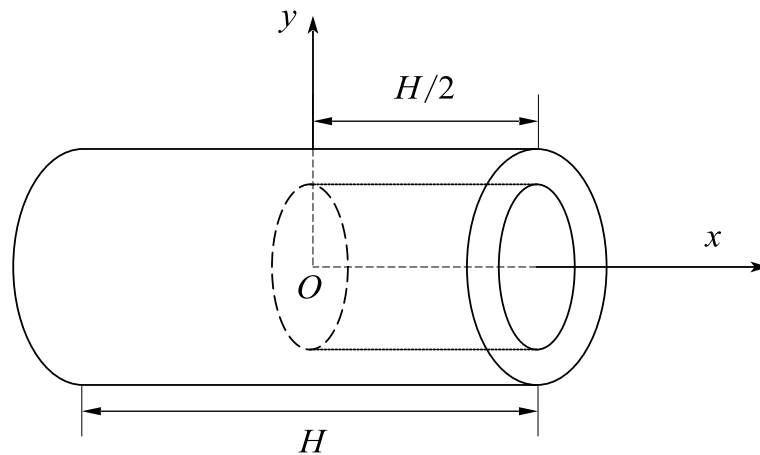
#### 2) 刚体

刚体是一种特殊的质点系，无论在多大外力的作用下，系统内任意两质点间的距离始终保持不变。

例 1. 如图所示，从半径为  $R$ ，长度为  $H$  的匀质圆柱体中挖出个同轴的半径为  $\frac{1}{2}R$ ，

长度为  $\frac{1}{2}H$  的圆柱形洞。此刚体的质心的坐标为  $x_c = \underline{\hspace{2cm}}$ ，  $y_c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。





答案：  $-\frac{H}{28}$  ; 0

解析：根据对称性：  $y_c = 0$

$$\text{对于去掉部分： } x_{c_1} = \frac{\sum m_i r_i}{m_1} = \frac{H}{4}$$

$$m_1 = \rho \cdot \pi \frac{R^2}{4} \cdot \frac{H}{2} = \frac{m}{8}$$

$$\text{对于剩余部分： } m_2 = \frac{7m}{8}$$

$$x_c' = \frac{\sum m_j r_j}{m_2}$$

$$\text{对于整体有： } x_c = \frac{\sum m_i r_i + \sum m_j r_j}{m_1 + m_2} = 0$$

$$x_c' = -\frac{H}{28}$$

### 3) 平动和转动

#### (1) 平动

平动是指当刚体运动时，刚体内任何一条给定的直线，在运动中方向始终保持不变的运动。在平动中，各个质点在同一段时间内位移相同，且具有相同的速度和加速度。

配套课程 习题答案

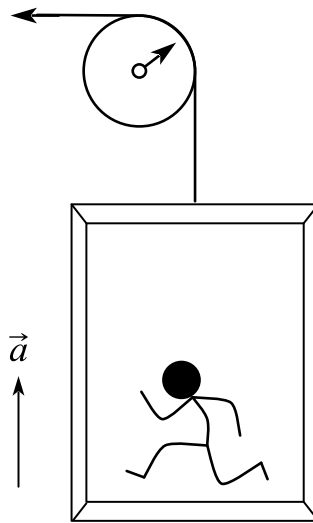




## (2) 转动

转动是指当刚体运动时，刚体的各个质点在运动中都绕同一直线作圆周运动的运动。该直线称为转轴，若转轴固定不动，则称定轴转动。

例 2. 一条绳索绕过一定滑轮拉动一升降机，滑轮半径  $r = 0.5\text{m}$ ，如果升降机从静止开始以  $a = 0.4\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  加速度上升，求 (1) 滑轮角加速度；(2)  $t = 5\text{s}$  时角速度及转过的圈数；(3)  $t = 1\text{s}$  时轮缘上一点的加速度。



解析：(1)  $a = \alpha R \quad \therefore \alpha = 0.8\text{rad/s}^2$ ，逆时针

$$\omega = \int_0^5 \alpha dt = 4\text{rad/s} \quad , \quad \text{逆时针}$$

(2)

$$\theta = \int_0^5 \omega dt = 10\text{rad} \quad n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{5}{\pi}$$

(3)  $t = 1\text{s}$  时， $\omega_1 = 0.8\text{rad/s}$   $a_t = 0.4\text{m/s}^2$   $a_n = r\omega_1^2 = \frac{8}{25}\text{m/s}^2$

$$\therefore a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{2\sqrt{41}}{25}\text{m/s}^2, \quad \text{与径向夹角为 } \varphi$$

$$\varphi = \arctan \frac{5}{4}$$

## 4) 自由度

配套课程 习题答案



## (1) 定义

系统的自由度是指决定一个系统在空间的位置所需要的独立坐标数。

## (2) 刚体的自由度

对于刚体，最多有6个自由度，其中3个是平动自由度，3个是转动自由度（2个表示转动轴方向的坐标，剩余一个则表示绕转动轴转过的角度）。

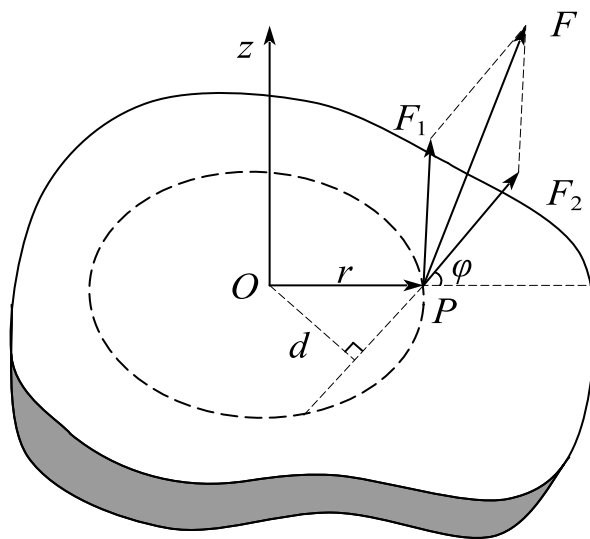
## 2. 力矩 转动惯量 定轴转动定律

## 1) 力矩

力矩是指力的作用点相对给定点的位矢  $\vec{r}$  与力  $\vec{F}$  的矢积。对于定轴转动， $\vec{r}$  是力作用点相对于转动轴的位矢。

(1) 力  $\vec{F}$  对  $O$  点的力矩  $\vec{M}_O$ 

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$



力矩

(2) 力  $\vec{F}$  对转轴  $O_z$  的力矩

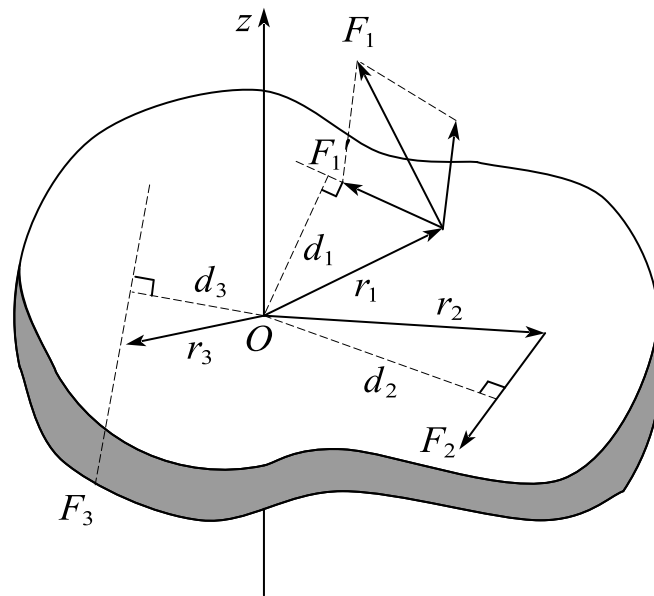
$$M_z = F_2 r \sin \varphi = F_2 d$$

式中， $\varphi$  是  $F_2$  与  $r$  间的夹角， $r \sin \varphi = d$  是轴  $O_z$  到力  $F_2$  的作用线的垂直距离，通常称为力臂。

## (3) 总力矩

配套课程 习题答案





几个力的总力矩

$$M_z = F_1 d_1 + F_3 d_3 - F_2 d_2$$

式中，正负号是根据右手螺旋法则规定的，螺旋前进的方向沿转轴  $Oz$  为力矩的正方向，为负值时则相反。

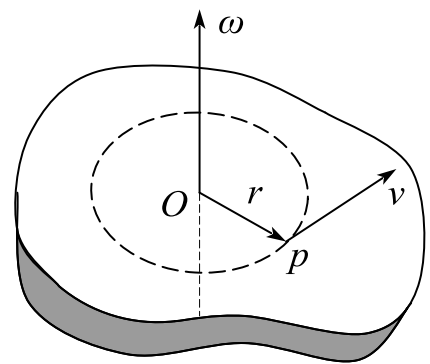
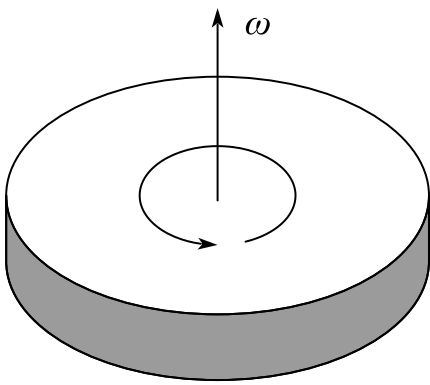
## 2) 角速度矢量

(1) 在转轴上画一有向线段，使角速度矢量的长度按一定比例代表角速度的大小，角速度矢量的方向与刚体转动方向间的关系按右手螺旋法则来确定。

### (2) 角速度矢量的正方向

使右手螺旋转动的方向和刚体转动的方向一致，则螺旋前进的方向为角速度矢量的正方向（如图所示）。角速度矢量的方向由右手螺旋法则来确定，角加速度直接与动力学量相联系。





## 角速度矢量和线速度

(3) 线速度  $\vec{v}$  和角速度  $\vec{\omega}$  之间的关系式

$$\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$$

式中， $\vec{r}$  为刚体上任一质点  $P$  离转轴的距离  $OP$ 。

例 4. 已知刚体定轴转动的运动方程是  $\theta = 2\pi - 5\pi t + 0.5\pi t^2$  (rad)。求：

(1) 第 4 秒末的角位置、角速度和角加速度；

(2) 第 4 秒内的角位移；

(3) 刚体做什么运动？

解析：(1)  $\theta(4) = -10\pi \text{ rad}$     $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \pi t - 5\pi$

$$\therefore \omega(4) = -\pi \text{ rad/s}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \pi$$

$$\therefore \alpha(4) = \pi \text{ rad/s}^2$$

$$(2) \theta(3) = -8.5\pi \text{ rad}$$

$$\Delta\theta = \theta(4) - \theta(3) = -1.5\pi \text{ rad}$$

(3) 匀变速定轴转动

## 3) 转动惯量

配套课程 习题答案



(1) 转动惯量的定义

转动惯量是转动中惯性大小的量度

$$I = \sum r_i^2 \Delta m_i$$

(2) 转动惯量的积分形式

$$I = \int r^2 dm$$

积分式中  $dm$  是质元的质量， $r$  是质元到转轴的距离。

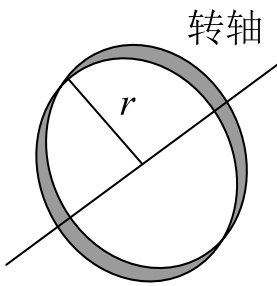
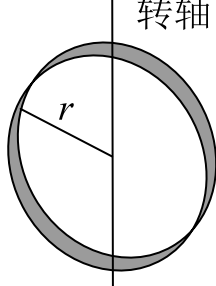
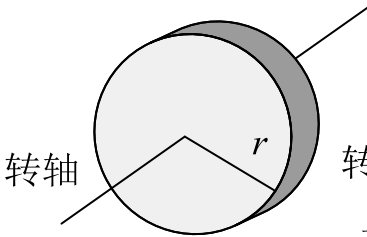
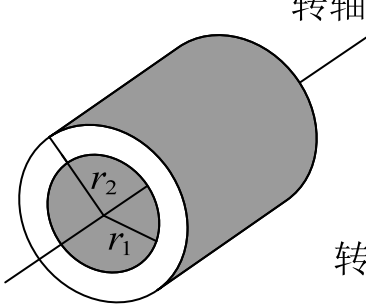
(3) 平行轴定理

刚体对任一转轴的转动惯量等于刚体对通过质心并与该轴平行的轴的转动惯量  $I_C$  加上刚体质量与两轴间距离  $h$  的二次方的乘积。

$$I = I_C + mh^2$$

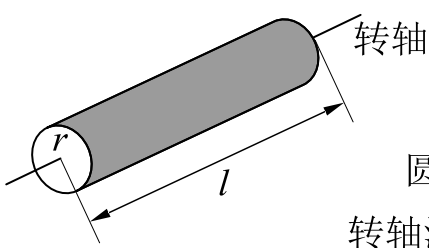
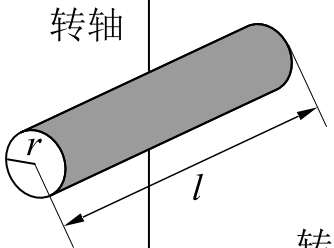
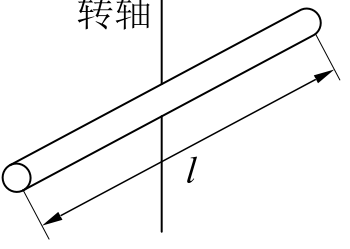
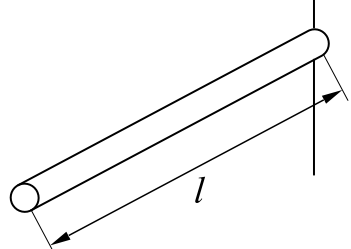
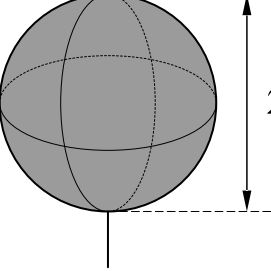
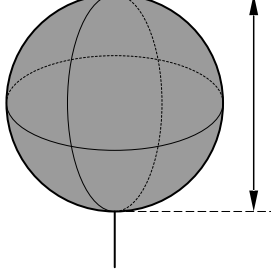
(4) 刚体转动惯量大小的决定因素

①刚体的总质量；②质量的分布；③给定轴的位置

 <p>转轴</p> <p>圆环 转轴通过中心 与环面垂直</p> $J = mr^2$	 <p>转轴</p> <p>圆环 转轴沿直径</p> $J = \frac{mr^2}{2}$
 <p>转轴</p> <p>薄圆盘 转轴通过中心 与盘面垂直</p> $J = \frac{mr^2}{2}$	 <p>转轴</p> <p>圆筒 转轴沿几何轴</p> $J = \frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2)$

配套课程 习题答案



 <p>圆柱体 转轴沿几何轴</p> $J = \frac{mr^2}{2}$	 <p>圆柱体 转轴通过中心 与几何轴垂直</p> $J = \frac{mr^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$
 <p>细棒 转轴通过中心 与棒垂直</p> $J = \frac{ml^2}{12}$	 <p>细棒 转轴通过端点 与棒垂直</p> $J = \frac{ml^2}{3}$
 <p>球体 转轴沿直径</p> $J = \frac{2mr^2}{5}$	 <p>球壳 转轴沿直径</p> $J = \frac{2mr^2}{3}$

例 5. 两个匀质圆盘 A 和 B 的密度分别为  $\rho_A$  和  $\rho_B$  ( $\rho_A > \rho_B$ ), 但两圆盘的质量与厚度相同, 如两盘对通过盘心垂直于盘面轴的转动惯量各为  $J_A$  和  $J_B$ , 则 ( )。

- A.  $J_A > J_B$       B.  $J_B > J_A$   
 C.  $J_A = J_B$       D.  $J_A$ 、 $J_B$  哪个大, 不能确定

配套课程 习题答案



答案：B

解析：圆盘B的密度小，在质量和厚度相同的情况下，B的半径更大，根据圆盘转动惯量关系式 $I = 1/2mR^2$ 得，B的转动惯量更大。

#### 4) 定轴转动定律

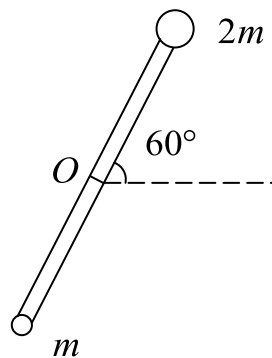
刚体的定轴转动定律是指刚体在总外力矩 $M_z$ 的作用下，所获得的角加速度 $\vec{\alpha}$ 与总外力矩的大小成正比，并与转动惯量成反比的关系。

$$\vec{M}_z = I\vec{\alpha} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

例6. 如图所示，一长为 $L$ 的轻质细杆，两端分别固定质量为 $m$ 和 $2m$ 的小球，此系统在竖直平面内可绕过中点 $O$ 且与杆垂直的水平光滑轴（ $O$ 轴）转动，开始杆与水平成 $60^\circ$ 角，处于静止状态。无初转速地释放后，杆球这一刚体系统绕 $O$ 轴转动。求：

(1) 系统绕 $O$ 轴的转动惯量 $J$ ；

(2) 释放后，当杆转到水平位置时，刚体受到的合外力矩 $M$ 和角加速度 $\alpha$ 。



解析：(1)  $I = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}mL^2$

(2)  $M = 2mg\frac{L}{2} - mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}mgL$

方向顺时针

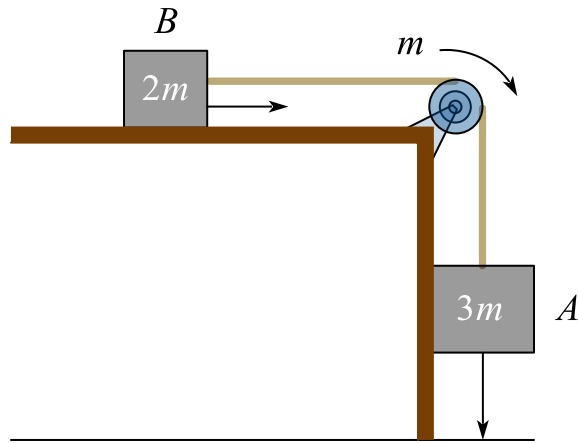
配套课程 习题答案



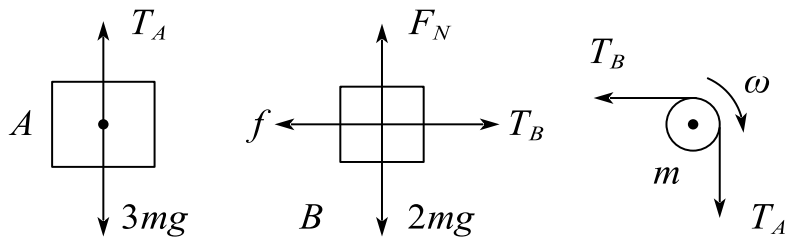
$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{2g}{3L}$$

例 7. 如图所示，已知物体 A 质量为  $3m$ ，物体 B 质量为  $2m$ ，滑轮质量为  $m$ ，半径为  $r$ ，转动惯量为  $mr^2/2$ ，物体 B 与桌面间的滑动摩擦系数为  $\mu$ ，不计轴承摩擦，求：

- (1) 对物体 A、B 以及滑轮画出受力分析图；
- (2) 物体 A 下落的加速度  $a$ ，和物体 A 所受的拉力  $T_A$ ；
- (3)  $t = 1\text{s}$  时滑轮的角动量  $L$ 。



解析：(1) 如图



$$(2) \quad 3mg - T_A = 3ma$$

$$T_B - \mu 2mg = 2ma$$

$$(T_A - T_B)r = J\alpha$$

$$a = \alpha r$$

$$\therefore a = \frac{2}{11}(3 - 2\mu)g, \quad T_A = 3mg - \frac{6}{11}mg(3 - 2\mu)$$





$$(3) \alpha = \frac{2(3-2\mu)g}{11r}$$

$$\omega = \alpha t$$

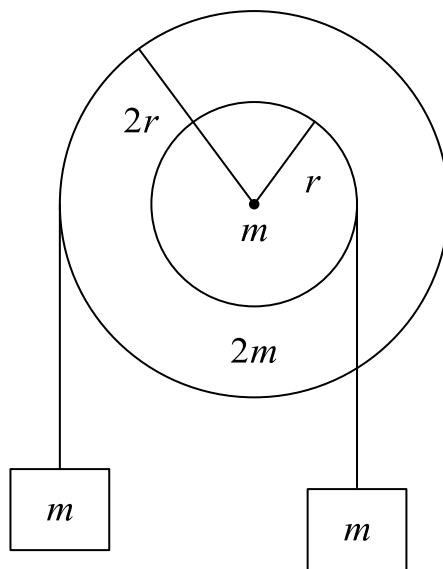
$$L = J\omega = \frac{3-2\mu}{11} mgr$$

方向顺时针



## 课时六 练习题

1. 简述质点模型和刚体模型的特点。
2. 在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体称之为\_\_\_\_\_。
3. 一个刚体绕某定轴转动的运动学方程为 $\theta = 2 + 4t^3 (SI)$ ，若刚体上一质元 $P$ 距转轴的距离是 $0.10\text{m}$ 。则在 $2\text{s}$ 时质元 $P$ 所具有的切向加速度为\_\_\_\_\_。
4. 由于质点是理想模型，不考虑体积，故质点的转动惯量必为零。 ( )
5. 质量分别为 $m$ 和 $2m$ 、半径分别为 $r$ 和 $2r$ 的两个均匀圆盘，同轴地粘在一起，可以绕通过盘心且垂直盘面的水平光滑固定轴转动，对转轴的转动惯量为 $9mr^2/2$ 大小圆盘边缘都绕有绳子，绳子下端都挂一质量为 $m$ 的重物，如图所示，求盘的角加速度的大小。



6. 关于刚体对轴的转动惯量，下列说法正确的是：
  - A. 只取决于刚体的质量，与质量的空间分布和转轴的位置无关。
  - B. 取决于刚体的质量和质量的空间分布，与转轴的位置无关。
  - C. 取决于刚体的质量、质量的空间分布和转轴的位置。
  - D. 只取决于转轴的位置，与刚体的质量和质量的空间分布无关。
7. 半径 $R = 2$ ，质量 $m = \frac{1}{2}$ 的定滑轮（均质圆盘），一初始角速度 $\omega_0$ 做定轴转动。

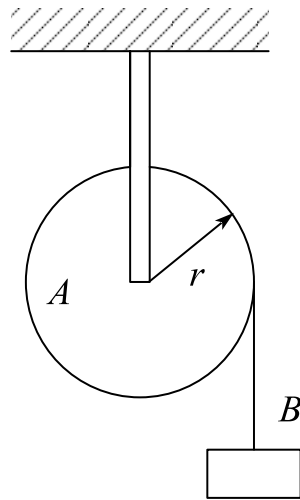


受到的合外力矩与角速度平方成正比，为  $M = -\omega^2$ ，设到了  $T$  时刻，定滑轮的角速度变为  $\frac{1}{2}\omega_0$ ，求时刻  $T$  的大小。

8. 几个力同时作用在一个具有光滑固定转轴的刚体上，如果这几个力的矢量和为零，则此刚体：（ ）

- A. 必然不会转动      B. 转速必然不变  
C. 转速必然改变      D. 转速可能不变，也可能改变

9. 如图所示，质量为  $m_1$  的实心圆柱体  $A$ ，其半径为  $r$ ，可以绕其固定水平轴转动，阻力忽略不计，一条轻的柔绳绕在圆柱体上，其另一端系一个质量为  $m_2 = m_1/2$  的物体  $B$ ，已知定滑轮的转动惯量为  $J = \frac{1}{2}m_1r^2$ 。试求物体  $B$  下落的速度。



10. 某刚体定轴转动，则下列说法正确的是（ ）。

- A. 刚体上各点线速度均相同      B. 刚体上各点角速度均相同  
C. 刚体上各点切向加速度均相同      D. 刚体上各点法向加速度均相同



## 课时七 刚体的功能关系

考点	重要程度	题型
1. 定轴转动中的功能关系	★★★	选填、计算
2. 定轴转动刚体的角动量定理和角动量守恒定律	★★★★★	选填、简答、计算
3. 进动	★	简答

### 1. 定轴转动中的功能关系

#### 1) 力矩的功

刚体在外力矩作用下转动时，力矩对物体做功，且此功可用力矩与刚体角位移乘积的积分来表示，称为力矩的功。

$$W = \sum W_i = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta$$

#### 2) 刚体的转动动能

刚体在转动时的动能是组成刚体的各个质点的动能之和，刚体的转动动能可表示为： $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$

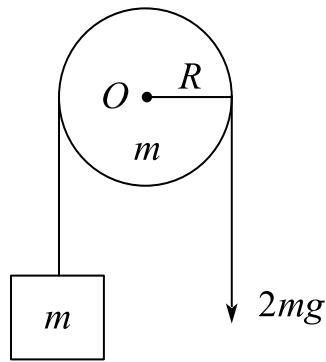
题 1. 如图所示，一轻绳跨过一轴承光滑的定滑轮（滑轮质量分布均匀，总质量  $m$ ，半径  $R$ ）。绳的一端与质量也为  $m$  的物体相连，另一端直接用大小为  $2mg$  的恒力  $F$  直接向下拉绳子，使整个系统在  $t=0$  时刻从静止开始运动，假设绳与定滑轮之间无滑动，重力加速度为  $g$ ，试求：

(1) 滑轮的角加速度  $\alpha$  的大小；

(2) 求  $t = t_0$  时刻（此时，物体还未碰到滑轮）滑轮的角速度  $\omega$ ；

(3) 求  $t = t_0$  时刻（此时，物体还未碰到滑轮）滑轮的转动动能。





解：(1)  $R(F - T) = I\alpha$

$$T - mg = ma$$

$$a = \alpha R$$

$$\therefore \alpha = \frac{2g}{3R}$$

$$(2) \omega = \int_0^{t_0} \alpha dt = \frac{2g}{3R} t_0$$

$$(3) Ek = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{9} mg^2 t_0^2$$

### 3) 刚体定轴转动的动能定理

总外力矩对刚体所作的功等于刚体转动动能的增量。

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2$$

### 4) 刚体的重力势能

一个不太大刚体（保证其线度范围内重力加速度基本不变）的重力势能可表示为： $E_p = mgh_c$ 。

式中， $h_c$ 是质心的高度。刚体的重力势能与它的质量集中在质心时所具有的势能相同。

## 2. 定轴转动刚体的角动量定理和角动量守恒定律

### 1) 刚体的角动量

配套课程 习题答案



设刚体绕 $Z$ 轴转动，则刚体绕定轴的角动量为： $\vec{L}_Z = I\vec{\omega}$

## 2) 定轴转动刚体的角动量定理

### (1) 角动量定理的微分形式

刚体所受到的对某给定轴的总外力矩等于刚体对该轴的角动量的时间变化率。

$$\vec{M}_Z = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}_Z}{dt}$$

上式适用于刚体和非刚体

### (2) 角动量定理的积分形式

定轴转动物体对轴的角动量的增量等于外力对该轴的力矩的冲量之和。

$$\int_{t_0}^t \vec{M}_Z dt = I\vec{\omega} - I\vec{\omega}_0$$

式中  $\int_{t_0}^t \vec{M}_Z dt$  称为这段时间内对轴的力矩的冲量和或冲量矩之和。表明定轴转动物体对轴的角动量的增量等于外力对该轴的力矩的冲量之和。

## 3) 定轴转动刚体的角动量守恒定律

根据角动量定理，当外力对给定轴的总力矩为零时，物体对该轴的角动量将保持不变。

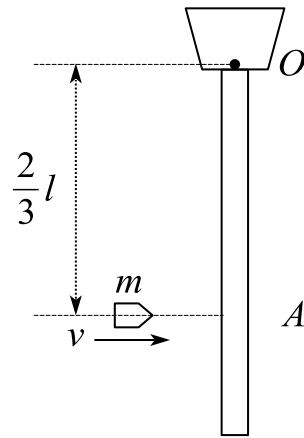
$$M_Z = 0 \Rightarrow L_Z = \text{常量}$$

上式为固定转轴的角动量守恒定律，它不仅应用于一个转动物体，也应用于多个物体组成的系统，当总外力矩为0时，总角动量保持守恒。另外，当力矩作用时间极短时，系统也可以近似看作角动量守恒。

(角)动量守恒定律不仅适用于宏观低速运动，也适用于微观或高速运动。

**题 1. 长为 $l$ 、质量为 $M$ 的匀质杆可绕通过杆一端 $O$ 的水平光滑固定轴转动，转动惯量为 $MI^2/3$ 。开始时杆竖直下垂，有一质量为 $m$ 的子弹以水平速度 $v$ 射入杆上 $A$ 点，并嵌在杆中， $OA = 2l/3$ ，则子弹射入后瞬间杆的角速度 $\omega$ 为多大？**





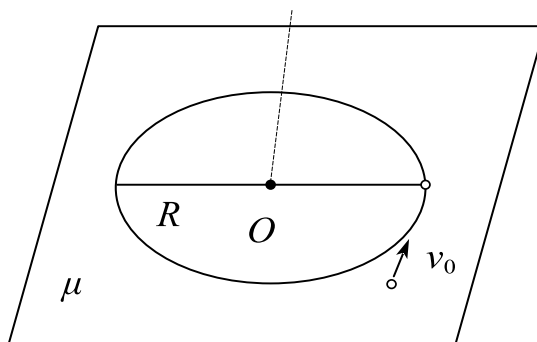
解：碰撞瞬间，角动量守恒

$$\frac{2}{3}lmv = I\omega + \left(\frac{2}{3}l\right)^2 \cdot m \cdot \omega$$

$$\therefore \omega = \frac{6mv}{(4m + 3M)l}$$

题 2. 一质量均匀分布的圆盘，质量为  $M$ ，半径为  $R$ ，放在一粗糙水平面上，圆盘可绕通过其中心  $O$  的竖直固定光滑轴转动。开始时，圆盘静止，一质量为  $m$  的子弹以水平速度  $v_0$  垂直于圆盘半径打入圆盘边缘并嵌在盘边缘，如图所示。已知圆盘绕通过  $O$  的竖直轴的转动惯量为  $J = MR^2/2$ ，设圆盘与水平面之间的摩擦系数为  $\mu$ ，求：

- (1) 子弹击中圆盘后，圆盘获得的角速度  $\omega_0$ ；
- (2) 圆盘转动过程中所受的摩擦力矩  $M_f$ （忽略子弹重力造成的摩擦力矩）；
- (3) 经过多少时间后，圆盘停止转动？



解：(1) 由角动量守恒



$$Rmv_0 = J\omega_0 + R^2 m\omega_0$$

$$\therefore \omega_0 = \frac{2mv_0}{(2m + M)R}$$

$$(2) dM_f = \mu g \sigma \cdot 2\pi r^2 dr$$

$$\therefore M_f = \int_0^R \mu g \sigma \cdot 2\pi r^2 dr = \frac{2}{3} \mu mg R$$

方向从上面向下看为顺时针

$$(3) M_f = -J\alpha$$

$$\therefore \alpha = -\frac{4\mu g}{3R}$$

$$\omega_0 = -\int_0^t \alpha dt = \frac{4\mu g}{3R} t$$

$$\therefore t = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$

### 3. 进动

#### 1) 定义

陀螺在绕本身对称轴线转动的同时，其对称轴还将绕竖直轴  $Oz$  回转的现象称为进动。

#### 2) 进动角速度

$$\omega_P = \frac{M}{I\omega \sin\theta}$$

进动角速度  $\omega_P$  与外力矩  $M$  成正比，与陀螺自转的角动量  $I\omega \sin\theta$  成反比。

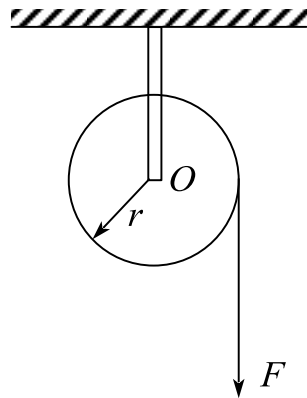




## 课时七 练习题

1. 一轻绳绕过半径  $r = 20\text{cm}$  的飞轮边缘，在绳端施以  $F = 98\text{N}$  的拉力，飞轮动惯量  $J = 0.5\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ，飞轮与转轴间的摩擦不计，试求：

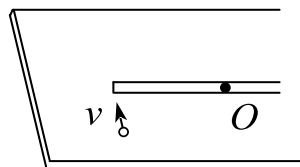
- (1) 飞轮的角加速度；
- (2) 绳端下降  $5\text{m}$  时飞轮所获得的动能；
- (3) 如以重量  $P = 98\text{N}$  的物体挂在绳端，试求飞轮的角加速度。



2. 有一半径为  $R$  的水平圆转台，可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动，转动惯量为  $J$ ，开始时转台以匀角速度  $\omega_0$  转动，此时有一质量为  $m$  的人站在转台中心，随后人沿半径向外跑去，当人到达转台边缘时，转台的角速度为 ( )。

- A.  $\frac{J}{J + mR^2} \omega_0$       B.  $\frac{J}{(J + m)R^2} \omega_0$       C.  $\frac{J}{mR^2} \omega_0$       D.  $\omega_0$

3. 光滑的水平桌面上有长为  $2l$ 、质量为  $m$  的匀质细杆，可绕通过其中点  $O$  且垂直于桌面的竖直固定轴自由转动，转动惯量为  $\frac{1}{3}ml^2$ ，起初杆静止。有一质量为  $m$  的小球在桌面上正对着杆的一端，在垂直于杆长的方向上，以速率  $v$  运动，如图所示。当小球与杆端发生碰撞后，就与杆粘在一起随杆转动。则这一系统碰撞后的转动角速度是 ( )。



配套课程 习题答案



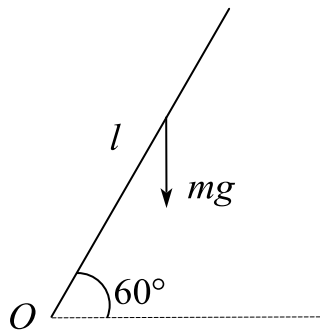
- A.  $\frac{3v}{4l}$       B.  $\frac{2v}{3l}$       C.  $\frac{lv}{12}$       D.  $\frac{3v}{l}$

4. 一水平的匀质圆盘，可绕通过盘心的竖直光滑固定轴自由转动，圆盘质量为  $M$ ，半径为  $R$ ，对轴的转动惯量  $J = \frac{1}{2}MR^2$ 。当圆盘以角速度  $\omega_0$  转动时，有一质量为  $m$  的子弹沿盘的直径方向射入而嵌在盘的边缘上，子弹射入后，圆盘的角速度  $\omega$  为（ ）。

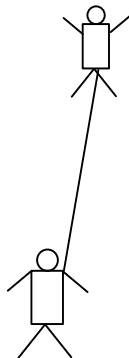
- A.  $\frac{M\omega_0}{M+2m}$       B.  $\frac{M\omega_0}{M+m}$       C.  $\frac{2M\omega_0}{M+2m}$       D.  $\frac{2M\omega_0}{M+m}$

5. 一长为  $l$  的均匀直棒可绕过其一端且与棒垂直的水平光滑固定轴转动，抬起另一端使棒向上与水平面成  $60^\circ$ ，然后无初转速地将棒释放，已知棒对轴的转动惯量为  $\frac{1}{3}ml^2$ ，其中  $m$  和  $l$  分别为棒的质量和长度。求：

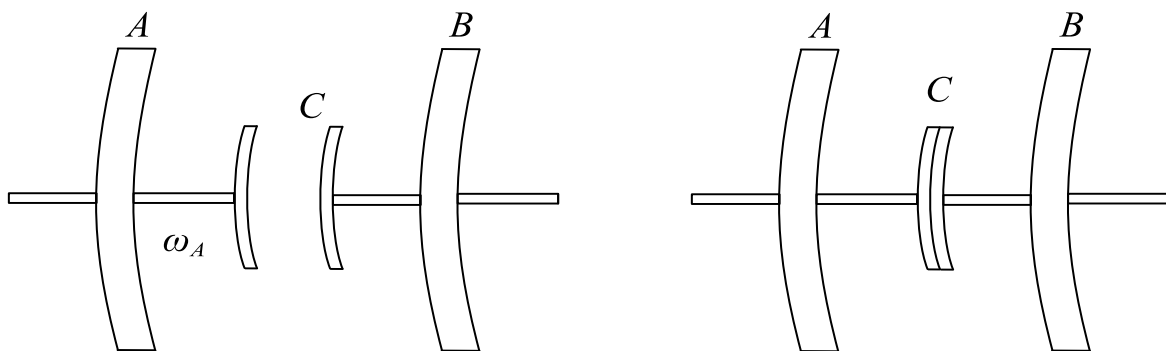
- (1) 放手时棒的角加速度；  
(2) 棒转到水平位置时的角加速度。



6. 对于定轴转动的刚体，当合外力矩为零，系统的角动量一定守恒。（ ）  
7. 在杂技演员的缘杆表演中，杆子长些还是短些更安全？为什么？



8. 在工程上，两飞轮常用摩擦啮合器使它们以相同的转速一起转动。如图所示， $A$  和  $B$  两飞轮的轴杆在同一中心线上。 $A$  轮的转动惯量为  $J_A = 10\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ， $B$  轮的转动惯量为  $J_B = 20\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ，开始时  $A$  轮每分钟的转速为 600 转， $B$  轮静止。 $C$  为摩擦啮合器。求两轮啮合后的转速，在啮合过程中，两轮的机械能有何变化？



9. 花样滑冰运动员绕过自身的竖直轴转动，开始时两臂伸开，转动惯量为  $J_0$ ，角速度为  $\omega_0$ ，然后她将两臂收回，使转动惯量减少为  $\frac{1}{3}J_0$ ，此时她转动的角速度变为（ ）。

A.  $3\omega_0$

B.  $4\omega_0$

C.  $\frac{\omega_0}{3}$

D.  $\frac{\omega_0}{4}$



## 课时八 流体力学

考点	重要程度	题型
1. 理想流体模型 定常流动 伯努利方程	★	简答
2. 牛顿力学的内在随机性 混沌	★	简答

### 1. 理想流体模型 定常流动 伯努利方程

#### 1) 理想流体模型

##### (1) 流体的定义

液体和气体都具有流动性，统称为流体。

##### (2) 流体的特点

①流体各部分易发生相对运动，没有固定的形状；

②液体不易被压缩，具有一定的体积，能形成自由表面；

③气体易被压缩，没有固定的体积，不存在自由表面，可弥漫于整个容器内的空间。

##### (3) 理想流体

当可压缩性和黏滞性只是影响运动的次要因素时，可把流体看作绝对不可压缩，且完全没有黏性的理想流体。

##### (4) 流体动压强

流体在流动时内部的压强称为流体动压强。

#### 2) 理想流体模型

##### (1) 定常流动

定常流动是指流体流动时，各处的流速不随时间而变化的流动。

##### (2) 流线

为了描述流体的运动，可在流体中作一系列曲线，使曲线上任一点的切线方向都与该点处流体质元的速度方向一致，该曲线称为流线。

##### (3)

在流体中任何一束流线都可形成流管。在定常流动中，流线和流管的形状稳定不变。

配套课程 习题答案



### 3) 伯努利方程

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$

它表明在作定常流动的液体中，在同一流管中任何一点处，流体每单位体积的动能和势能以及该处压强之和是常量。

在工程上，上式常写成： $\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h = \text{常量}$

$\frac{P}{\rho g}$ 、 $\frac{v^2}{2g}$ 、 $h$  三项都相当于长度，分别称为压力头、速度头、水头；伯努利

方程表明在同一流管的任一点处，压力头、速度头、水头之和是一常量

## 2. 牛顿力学的内在随机性 混沌

### 1) 线性科学和非线性科学

#### (1) 定义

线性是指部分之和等于整体，非线性则指整体不等于部分之和。牛顿建立的经典力学属于线性科学范畴，混沌是属于非线性科学范畴。

#### (2) 线性和非线性物理现象的区分

①线性现象一般表现为时空中的平滑运动，并可用性能良好的函数表示，而非线性现象则表现为从规则运动向不规则运动的转化和跃变；

②线性系统往往表现为对外界的影响成比例地变化，而非线性系统中参量在一些关键节点上的极微小变化，可引起系统运动形式的决定性改变；

③在连续介质中的波动上，线性行为表现为色散引起波包的弥散，导致结构的消失，而非线性作用则可促使空间规整性结构的形成和维持。

### 2) 混沌和牛顿力学的内在随机性

#### (1) 混沌

混沌是指由确定性方程描述的简单系统中出现的极为复杂的貌似随机的无规则运动。



## (2) 内在随机性

内在随机性是指由于系统的初值敏感性，从物理上看，过程似乎是随机的，但这种随机性是确定性系统内部所固有的，称为内在随机性。



## 课时八 练习题

1. 一物体按规律  $x = ct^3$  在流体中做直线运动，其中  $c$  为常量， $t$  是时间。设流对物体的阻力正比于速度的平方，阻力系数为  $k$ ，试求物体由  $x = 0$  运动到  $x = l$  时阻力所做的功。



## 课时九 库仑定律和静电场

考点	重要程度	占分	题型
1. 物质的电结构 库仑定律	★★★★★★	5~6	选填、简答、计算
2. 静电场 电场强度	★★★★	4~5	选填

### 1. 物质的电结构 库仑定律

#### 1) 电荷

物体经摩擦后能吸引羽毛、纸片等轻微物体的状态称为带电，即物体带有电荷。

物体所带电荷多少的物理量是电荷量。

电荷有正负电荷之分，同性相斥，异性相吸，这种相互作用称为电性力。

#### 2) 电荷守恒定律

##### (1) 起电

起电是指通过某种作用使该物体内电子不足或过多而呈带电状态。

##### (2) 电荷守恒定律

电荷守恒定律是指在一个与外界没有电荷交换的系统内，系统内正、负电荷量的代数和始终保持不变。

##### (3) 电荷相对论不变性

电荷是相对论不变量，即电荷量与运动无关。

#### 3) 电荷的量子化

电荷的量子化是指电荷量只能取分立、不连续的量值。这个值为一个电子或一个质子所带的电荷量。

$$q = ne, n = (1, 2, 3 \dots)$$

#### 4) 库仑定律

##### (1) 点电荷

当带电体的形状和大小与它们之间的距离相比可忽略时，这些带电体称为点电荷。

##### (2) 真空中的库仑定律

配套课程 习题答案





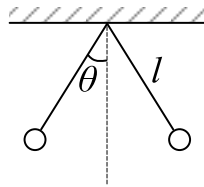
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12}, \text{ 常量 } \epsilon_0 \text{ 称为真空介电常量(或真空电容率)}$$

$$\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$$

### (3) 静电力的叠加原理

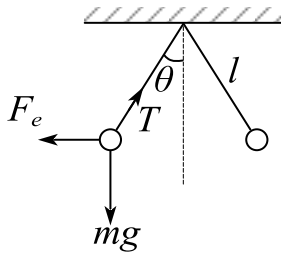
当空间有两个以上的点电荷时,作用在某一点电荷上的总静电力等于其他各点电荷单独存在时对该点电荷所施静电力的矢量和。

题 3. 如图,两小球的质量都是  $m$ , 都用长为  $l$  的细绳挂在同一点, 它们带有相同电量正电荷, 静止时两线夹角为  $2\theta$ , 如图所示, 设小球的半径和线的质量都可以忽略不计, 则每个小球所带的电量为\_\_\_\_\_.



答案:  $4l \sin \theta \sqrt{\pi \epsilon_0 m g \tan \theta}$

解析: 受力分析、运动分析、列方程



$$F_e = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = mg \tan \theta \quad r = 2l \sin \theta$$

$$\therefore q = 4l \sin \theta \sqrt{\pi \epsilon_0 m g \tan \theta}$$

## 2. 静电场 电场强度

### 1) 电场

配套课程 习题答案



真空中两个相互隔开的点电荷也可以发生相互作用，说明电荷周围存在的一种特殊物质，称之为电场。因此电荷之间的相互作用是通过其中一个电荷所激发的电场对另一个电荷的作用来传递的，可表示为：电荷  $\longleftrightarrow$  电场  $\longleftrightarrow$  电荷

## 2) 电场强度

电场对电荷有力的作用，电荷在电场中移动时电场力要对电荷做功。

### (1) 电场强度

电场中某点的电场强度大小等于单位点电荷在该点所受静电力的大小，其方向为正电荷在该点受力的方向。用  $E$  表示，单位： $N/C$  或  $V/m$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

### (2) 电场强度的性质

- ① 电场强度为矢量，方向和正电荷受力的方向相同；
- ② 电场只与产生电场的场源电荷有关，与试探电荷无关。

## 3) 场强计算

### (1) 点电荷的电场强度

设在真空中有一个静止的点电荷  $q$ ，由库仑定律和电场强度的定义有，距  $q$  为  $r$  的  $P$  点的电场强度：
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

题 2. 关于点电荷电场强度的计算公式  $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ ，以下说法正确的是 ( )。

- A.  $r$  趋近于零时， $E$  趋近于无穷
- B.  $r$  趋近于零时， $q$  不能作为点电荷，公式不适用
- C.  $r$  趋近于零时， $q$  仍是点电荷，但公式无意义
- D.  $r$  趋近于零时， $q$  已成为球形电荷，应用球对称电荷分布来计算电场

答案：B



解析：A、B、C当 $r$ 趋近于0时， $q$ 不可以看做点电荷，因此点电荷的公式不再适用；D电荷 $q$ 不一定是球形电荷，要根据具体情况分析。

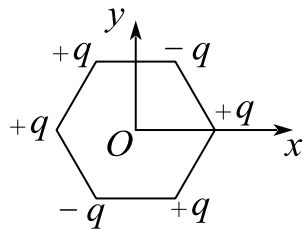
## (2) 电场叠加原理

电场叠加原理：

点电荷系在空间任一点所激发的总电场强度等于各个点电荷单独存在时在该点各自所激发的电场强度的矢量和。

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n = \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

题3. 如图，在一个正六边形的六个顶点放置六个点电荷 $+q$ 或 $-q$ ，则此六边形中心 $O$ 处的场强大小为 $E = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



答案：0

解析：对角线的电荷产生的电场两两抵消。

## (3) 连续分布电荷的电场强度

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

线电荷  $dq = \lambda dl$  ( $\lambda$ 为电荷线密度)

面电荷  $dq = \sigma dS$  ( $\sigma$ 为电荷面密度)

体电荷  $dq = \rho dV$  ( $\rho$ 为电荷体密度)

配套课程 习题答案



求解连续分布电荷的电场强度的步骤：

- ①在带电体上任取一电荷元 $dq$ ；
- ②写出该电荷元 $dq$ 在所求场点的电场表达式 $d\vec{E}$ ；
- ③分析不同电荷元在所求场点的电场方向是否相同，若不同须将 $d\vec{E}$ 分解；
- ④写出 $d\vec{E}$ 在具体坐标系各坐标轴方向上的分量式，并作积分运算；
- ⑤将分量结果合成，得到所求点的电场强度矢量 $\vec{E}$ 。

相关结论：

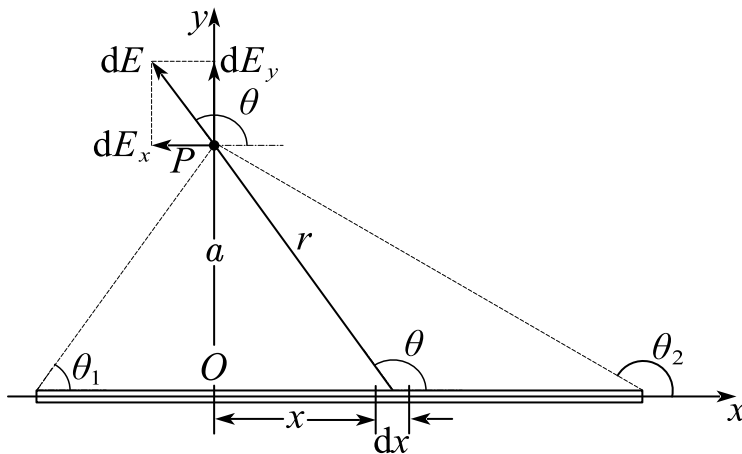
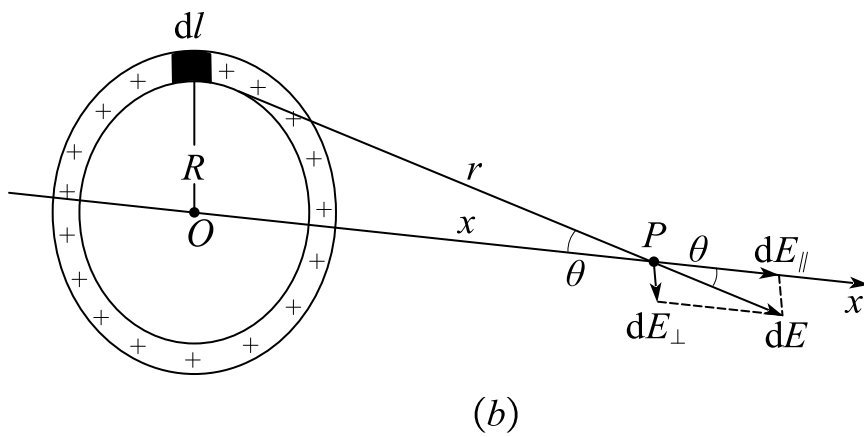
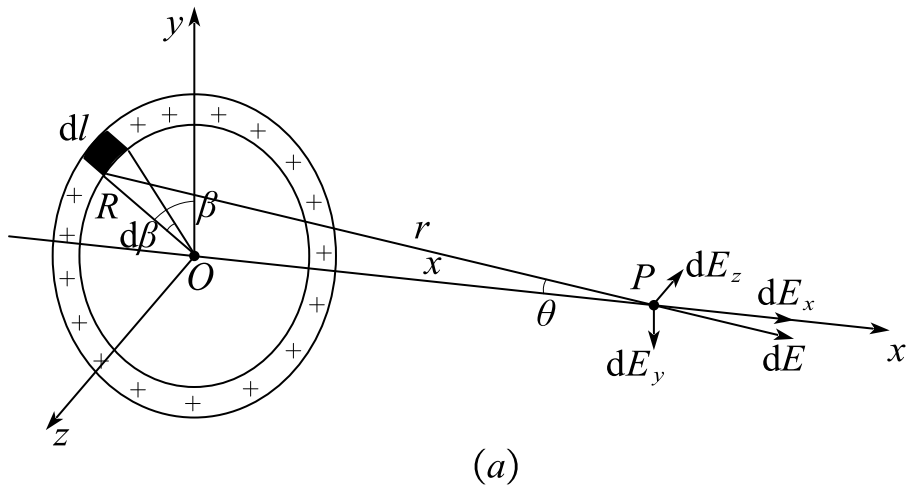


图7-12 均匀带电直棒外任一点处的场强

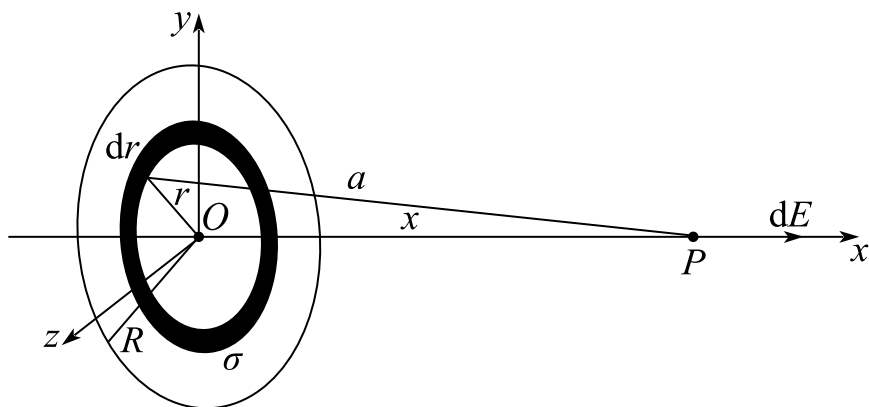
一无限长均匀带电直棒： $E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$ ，方向垂直带电直棒方向；





均匀带电圆环轴线上任一点处的电场强度

圆环轴线(OX轴)上任意一点P(X, 0)处的电场强度：
$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$



均匀带电圆盘轴线上任一点处的电场强度

均匀带电圆盘轴线上与盘心O相距为X的任一给定点P处的电场强度：

配套课程 习题答案



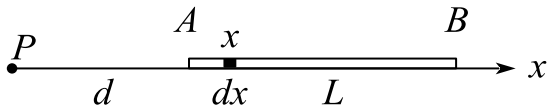
$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

均匀带电圆盘为无限大外  $P$  点的电场强度： $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

题 4. 如图，一长为  $L$  的均匀带电细棒  $AB$ ，电荷线密度为  $+\lambda$ ，求棒的延长线上与  $A$  端相距为  $d$  的  $P$  点的电场强度的大小和方向（以  $P$  为坐标原点  $O$ ，沿细棒  $AB$  为  $x$  轴建立坐标系）。



解：



对  $dx$  在  $P$  处产生的电场分析： $dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 x^2}$ ，方向向左

$$E = \int dE = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_d^{d+L} \frac{dx}{x^2} = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 d(d+L)}, \text{ 方向沿 } x \text{ 负方向}$$

#### 4) 电场线 电场强度通量

##### (1) 电场线

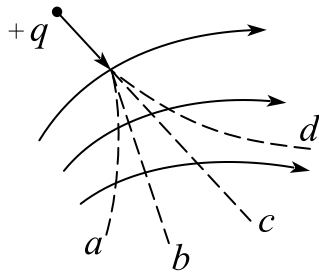
为了形象地描述由场强在空间的分布情形，使电场有一个比较直观的图像，引入电场线的概念。

特点：电场线上每一点的切线方向表示该点电场强度的方向，电场线密集处电场强，电场线稀疏处电场弱。

性质：电场线起始于正电荷，终止与负电荷，电场线不闭合不相交。



题 6. 一个带正电的点电荷飞入如图所示的电场中，它在电场中的运动轨迹为 ( ) .

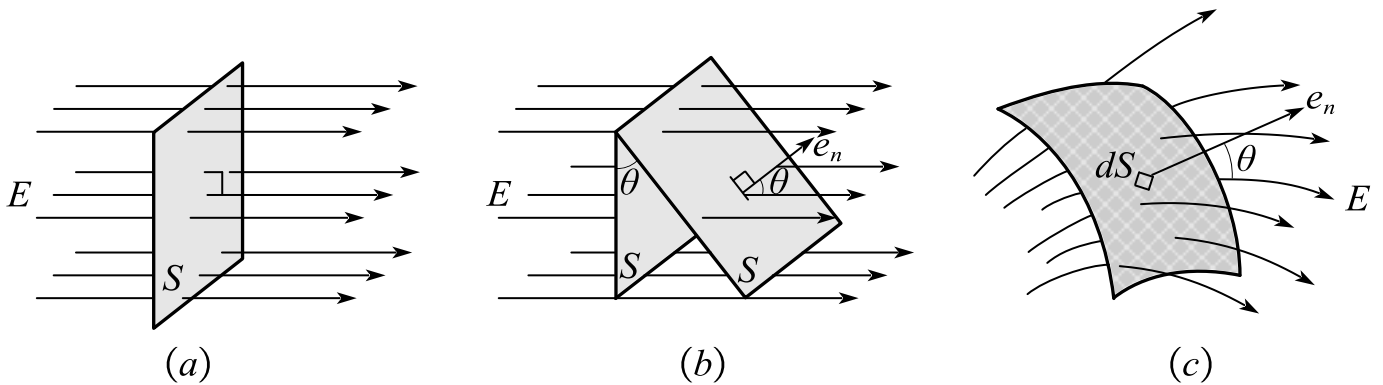


- A. 沿a                      B. 沿b                      C. 沿c                      D. 沿d

答案: D

解析: 电场线的切线方向为该正电荷的受力方向，因此根据速度和受力的关系，可以判断出轨迹应该由速度方向向受力方向弯曲。

(2) 电场强度通量



E 通量的计算

①平面  $\vec{E}$  通量

$$\Psi_E = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cos \theta \cdot S = ES_{\perp}$$

- a. 当  $\theta$  为锐角时， $\Psi_E$  为正；
- b. 当  $\theta$  为钝角时， $\Psi_E$  为负；
- c. 当  $\theta$  为直角时， $\Psi_E$  为 0。

②曲面  $\vec{E}$  通量

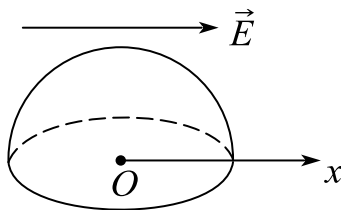
配套课程 习题答案



$$\Psi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S E \cos\theta \cdot dS$$

- 在电场线从曲面之内向外穿出处  $\vec{E}$  通量为正；
- 在电场线从外部穿入曲面处  $\vec{E}$  通量为负；

题 8. 如图所示，一电场强度为  $\vec{E}$  的均匀电场， $\vec{E}$  的方向沿  $x$  轴正向，则通过图中一半径为  $R$  的半球面的电场强度通量为 ( )。



- A.  $\pi R^2 E/2$       B. 0      C.  $2\pi R^2 E$       D.  $\pi R^2 E$

答案：B

解析：所有进入曲面的电场线都会从另一面穿出，因此从通量为0。





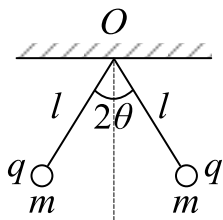
## 课时九 练习题

1. 真空中有两个点电荷  $M$ 、 $N$ ，相互间作用力为  $\vec{F}$ ，当另一点电荷  $Q$  移近这两个点电荷时， $M$ 、 $N$  两点电荷之间的作用力 ( )

- A. 大小不变，方向改变  
B. 大小改变，方向不变  
C. 大小和方向都不变  
D. 大小和方向都改变

2. 两个点电荷所带电荷分别为  $q_1$ 、 $q_2$ ，且  $q_1 + q_2 = Q$ ，若它们相互间的作用力最大，则它们所带电荷  $q_1 =$  \_\_\_\_\_， $q_2 =$  \_\_\_\_\_.

3. 如图所示，两个质量均为  $m$  的小球，带等量同号电荷  $q$ ，各用长为  $l$  的丝线悬挂于  $O$  点，当两小球受力平衡时，两线间夹角为  $2\theta$  ( $\theta$  很小)，设球半径和线的质量可忽略不计，则小球所带电荷  $q =$  \_\_\_\_\_.



4. 半径为  $R$  的圆形钟表盘上每一个整点位置处都放一个点电荷  $q$ ，则表盘中心处的电场为 ( ) .

- A.  $q/4\pi\epsilon_0 R^2$ ，指向12点方向  
B. 0  
C.  $q/4\pi\epsilon_0 R^2$ ，指向6点方向  
D. 无法判定

5. 半径为  $R$  的圆形钟表盘上每一个整点位置处都放一个点电荷  $q$ ，现在把12点处的点电荷拿掉，这时表盘中心处的电场为 ( ) .

- A.  $q/4\pi\epsilon_0 R^2$ ，指向12点方向  
B. 0  
C.  $q/4\pi\epsilon_0 R^2$ ，指向6点方向  
D. 无法判定

6. 半径为  $R$  的一个圆形线圈上均匀分布着电荷，电荷总量为  $Q$ ，则圆心处的电场强度 ( ) .

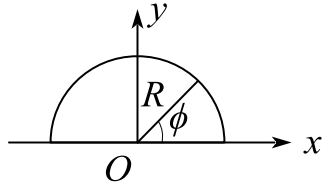
- A. 与  $R$  无关  
B. 正比于  $R^2$

配套课程 习题答案

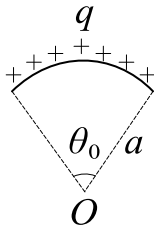


C. 与  $R$  成正比D. 与  $R$  成反比

7. 带电细线弯成半径为  $R$  的半圆形，电荷线密度为  $\lambda = \lambda_0 \sin \phi$ ，式中  $\lambda_0$  为一常数， $\phi$  为半径  $R$  与  $x$  轴所成的夹角，如图所示，试求环心  $O$  处的电场强度。



8. 一段半径为  $a$  的细圆弧，对圆心的张角为  $\theta_0$ ，其上均匀分布有正电荷  $q$ ，如图所示，试以  $a$ ， $q$ ， $\theta_0$  表示出圆心  $O$  处的电场强度。



9. 下面列出的真空中静电场的场强公式，其中（ ）是正确的。

A. 点电荷  $q$  的电场： $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  ( $r$  为点电荷到场点的距离)

B. “无限长”均匀带电直线(电荷线密度  $\lambda$ )的电场： $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$  ( $\vec{r}$  为带电直线到场点的垂直于直线的矢量)

C. “无限大”均匀带电平面(电荷面密度  $\sigma$ )的电场： $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

D. 半径为  $R$  的均匀带电球面(电荷面密度  $\sigma$ )外的电场： $\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^3} \vec{r}$  ( $\vec{r}$  为球心到场点的矢量)

10. 当正负电荷靠近时，它们之间产生排斥力。 ( )

11. 一带电体可作为点电荷处理的条件是 ( )。

A. 带电体的线度很小

配套课程 习题答案



B. 带电体所带电量很小

C. 带电体所带电荷必须呈球对称分布

D. 带电体的线度与其他有关长度相比可忽略不计

12. 在点电荷 $q_1$ 激发的电场中有一试探电荷 $q_0$ ，受力为 $\vec{F}$ 。若将另一点电荷 $q_2$ 移入该区域后， $q_0$ 与 $q_1$ 之间的作用力将（ ）。

A. 不变

B. 变大

C. 变小

D. 无法确定

13. 关于电场强度 $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ ，下列说法哪个是正确的（ ）。

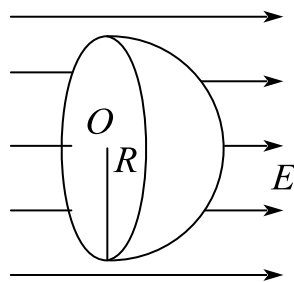
A. 场强 $\vec{E}$ 的大小与试验电荷 $q_0$ 的大小成反比

B. 对场中某点，试验电荷受力 $\vec{F}$ 与 $q_0$ 的比值不因 $q_0$ 而变

C. 试验电荷受力 $\vec{F}$ 的方向就是场强 $\vec{E}$ 的方向

D. 若场中某点不放试验电荷 $q_0$ ，则 $\vec{F} = 0$ ，从而 $\vec{E} = 0$

14. 如图，在电场强度 $E$ 的匀强电场中，有一半半径为 $R$ 的半球面，场强 $E$ 的方向与半球面对称轴平行，穿过此半球面的电通量为（ ）。



A.  $2\pi R^2 E$

B.  $\sqrt{2}\pi R^2 E$

C.  $\pi R^2 E$

D.  $\pi R^2 E/2$

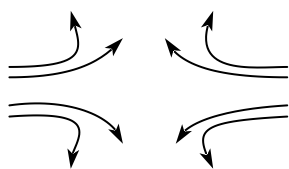
15. 一半径为 $R$ 均匀带电薄圆盘，电荷面密度为 $\sigma$ ，求其轴上离圆心距离为 $x$ 处的电场强度的大小(1)  $R \gg x$ ， $E =$ \_\_\_\_\_；(2)  $R \ll x$ ， $E =$ \_\_\_\_\_。

16. 下列四种静电场的分布情况，哪种分布情况是不可能存在的？

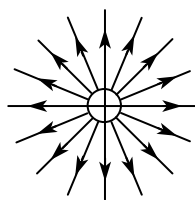




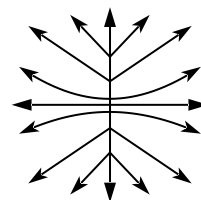
(A)



(B)



(C)



(D)



## 课时十 静电场基本定理

考点	重要程度	题型
1. 静电场的高斯定理	★★★★★	选填、计算
2. 静电场的环路定理-电势	★★★★★	选填、计算
3. 电场强度与电势梯度的关系	★★★	选填

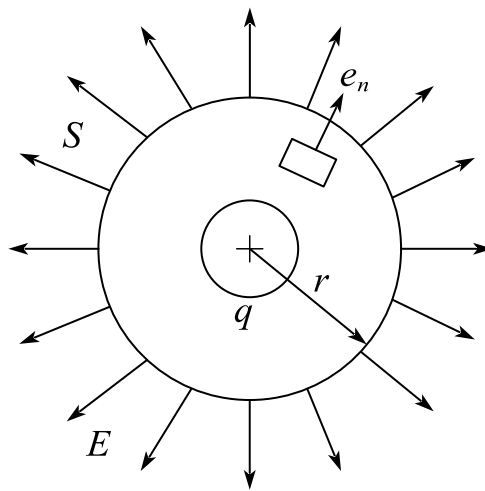
### 1. 静电场的高斯定理

#### 1) 静电场的高斯定理

静电场的高斯定理：在静电场中，通过任一闭合曲面的 $\vec{E}$ 通量等于该曲面内电荷量的代数和除以 $\epsilon_0$ ，即：

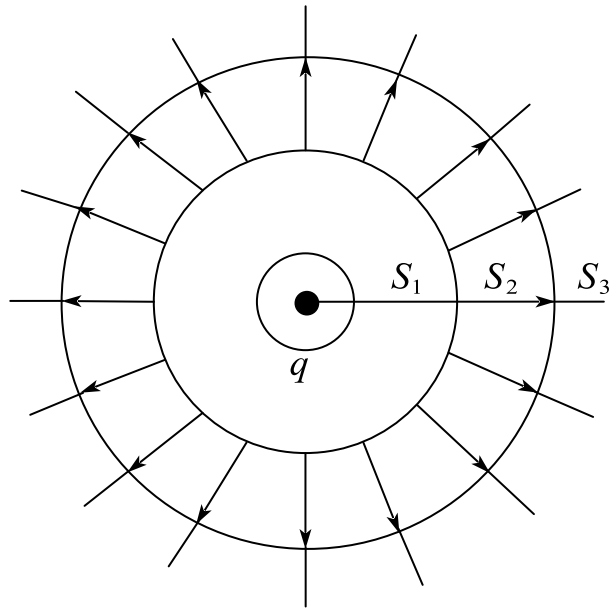
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

注意：等式左边的 $\vec{E}$ 是所有电荷在曲面上激发的电场强度，也就是曲面处的合电场强度。不但适用于静止电荷和静电场，也适用于运动电荷和迅速变化的电场。



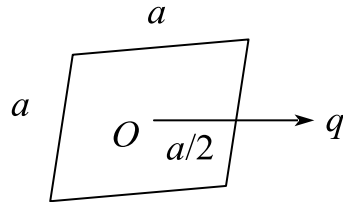
通过以点电荷为球心的球面上的 $E$ 通量图





通过以点电荷为球心的同心球面上的  $E$  通量图

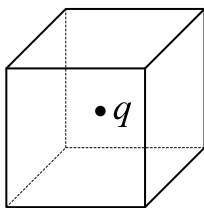
题 3. 有一边长为  $a$  的正方形平面，在其中垂线上距中心  $O$  点  $a/2$  处，有一电荷为  $q$  的正点电荷，如图所示，则通过该平面的电场强度通量为 ( )。



- A.  $\frac{q}{3\epsilon_0}$       B.  $\frac{q}{6\epsilon_0}$       C.  $\frac{q}{3\pi\epsilon_0}$       D.  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$

答案： B

解析： 对于一个正方体体心处放一点电荷  $q$ ，通过改正方体表面的  $\vec{E}$  通量。



根据高斯定理：  $\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$

根据对称性，通过六个面的  $\vec{E}$  通量相等

配套课程 习题答案



$$\text{对于一个面有: } \Phi' = \frac{1}{6} \Phi = \frac{q}{6\epsilon_0}$$

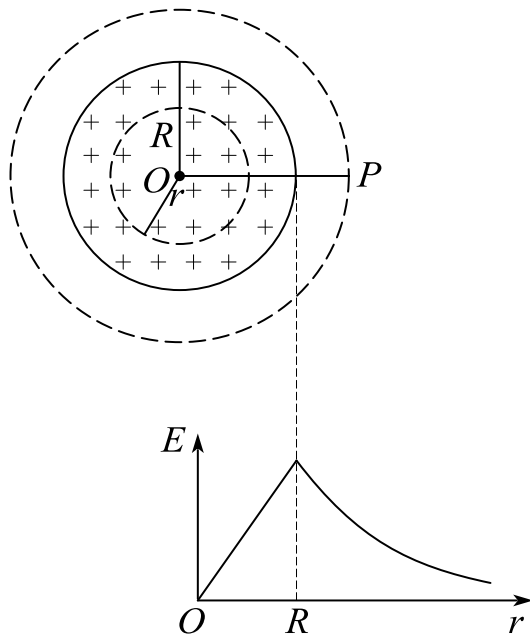
## 2) 高斯定理的应用

当电荷分布具有某些特殊的对称性，从而使相应的电场分布也具有一定的对称性时，就有可能应用高斯定理来计算电场强度。

高斯面的选取：

- (1) 高斯面通过场点；
- (2) 具有规则形状，便于求解  $S$ ；
- (3) 高斯面上所有点场强大小相同，便于将  $E$  从积分中提取，且方向与高斯面法线方向一致或者垂直，便于求  $\cos\theta$ 。

相关结论：



(a) 均匀带电球体的电场强度曲线

均匀带电球体的场强分布

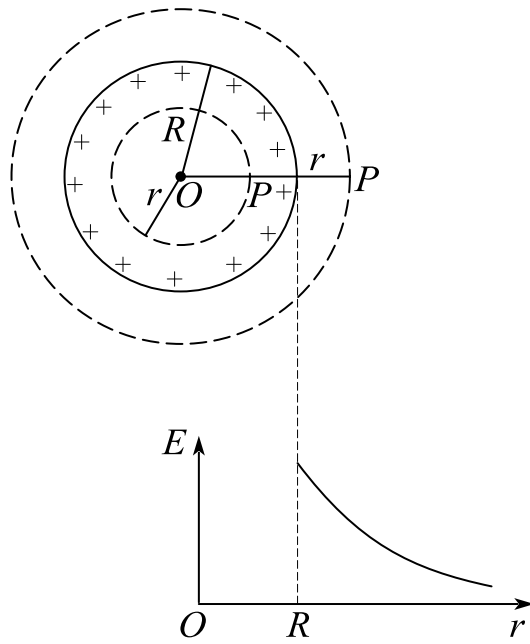
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad (r > R)$$

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (r < R)$$

配套课程 习题答案

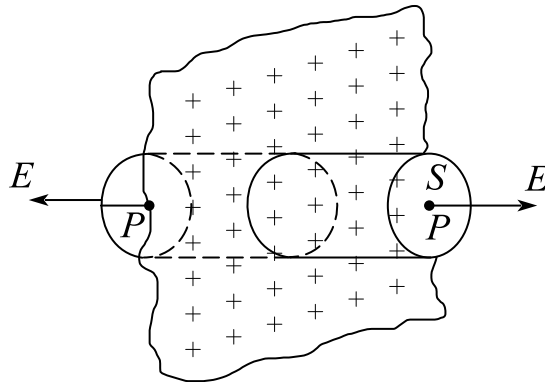


方向均沿径向。



(b) 均匀带电球面的电场强度曲线

对于均匀带电球面，如果  $P$  点在球外，结果与上面结果相同；如果  $P$  在球内，由高斯定理易得  $E = 0$



"无限大"均匀带电平面的电场

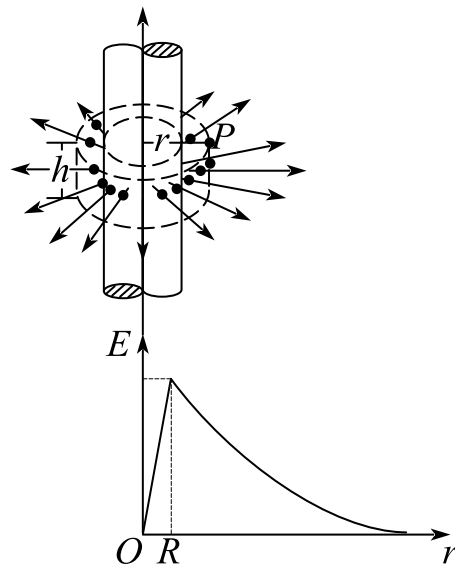
无限大带电平面的场强分布

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

方向垂直于带电平面。







“无限长”均匀带电圆柱面的电场

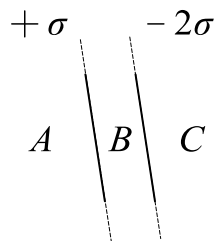
无限长均匀带电圆柱的场强分布

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R)$$

$$E = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 R^2} \quad (r < R)$$

方向垂直于带电圆柱。

题 4. 两个平行的“无限大”均匀带电平面，其电荷面密度分别为  $+\sigma$  和  $-2\sigma$ ，如图，则  $A, B$  两个区域的电场强度分别为(设方向水平向右为正)： $E_A =$  \_\_\_\_\_， $E_B =$  \_\_\_\_\_。



答案： $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ； $\frac{3\sigma}{2\epsilon_0}$

解析：对于无限大均匀带点平面  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

配套课程 习题答案

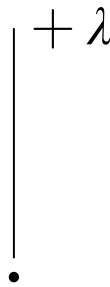


$$\therefore E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \text{对 } A \text{ 区域: } E = E_2 - E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\text{对 } B \text{ 区域: } E = E_2 + E_1 = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$$

题 6. 一无限长均匀带电直线，电荷线密度为  $+\lambda$ ，求带电直线的电场分布。



解析：根据对称性，电场方向与带电直线垂直，可以使用高斯定理，选择和带电直线同轴的半径为  $r$  的长  $l$  圆柱面作高斯面。

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \lambda dv$$

$$E \cdot 2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad \text{方向垂直直线向外}$$

## 2. 静电场的环路定理-电势

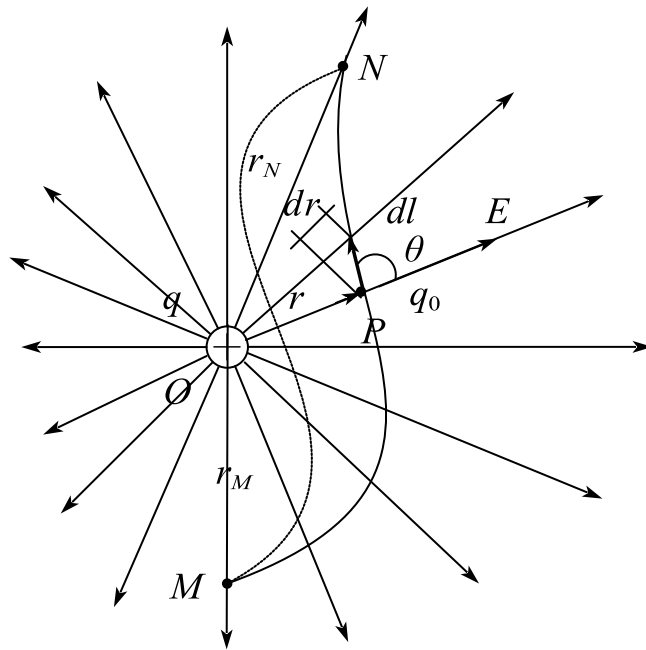
### 1) 静电力做功

试探电荷在任何静电场中移动时，电场力所作的功只与试探电荷的大小以及路径的起点和终点的位置有关，而与路径无关。

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_a^b E \cos\theta dl$$

配套课程 习题答案





电场力所作的功与路径无关

## 2) 静电场的环路定理

### (1) 静电场的环路定理

在静电场中场强沿任一闭合路径的线积分恒等于零，即  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

### (2) 保守力场（势场）

任何力场，只要具备场强的环流为零的特性，就叫做保守力场或叫做势场。

综合静电场的高斯定理和环路定理，可知静电场是有源的保守力场，又由于电场线是不闭合的，即不形成旋涡的，所以静电场属于无旋场。

## 3) 电势

### (1) 电势

对于有限的带电体，我们常选定在无限远处的静电势能为零。由此电荷  $q_0$  在电场中  $M$  点的静电势能为

$$E_{P_M} = W_{M\infty} = q_0 \int_M^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

即电荷  $q_0$  在电场中某一点  $M$  处的电势能在数值上等于  $q_0$  从  $M$  点移到无限远处电场力所作的功。

配套课程 习题答案



电势：试探电荷在  $M$  点的静电势能与试探电荷的比值：

$$V_M = \frac{E_P}{q} = \int_M^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

单位： $J/C$ ，称为伏特( $V$ )。 $E_P$  为  $q$  在  $M$  点处的电势能。

## (2) 电势差（电压）

静电场中任意两点  $M$  和  $N$  的电势差：

$$U_{MN} = V_M - V_N = \frac{E_{P_M}}{q} - \frac{E_{P_N}}{q} = \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

当任一电荷  $q$  在电场中从点  $M$  移到点  $N$  时，电场力所作的功可用电势差表示：

$$W_{MN} = q(V_M - V_N)$$

一个电子通过加速电势差为  $1V$  的区间，电场力对它做功：

$$W = eU = 1.6 \times 10^{-19} J$$

电子从而获得  $1.6 \times 10^{-19} J$  的能量。在近代物理中，常把这个能量值作为一种能量单位，而称之为电子伏特 (*electron-volt*)，符号为  $eV$ ，即

$$1eV = 1.6 \times 10^{-19} J$$

**题 1. 电荷处在电场中，其具有的与位置相关的能量、以及该能量与电荷电量的比值分别称为（ ）。**

A. 机械能、动能、电势

B. 转动动能、转动惯量

C. 静电能、电动势

D. 电势能、电势

答案：D

解析：电荷在静电场中，与位置相关的能量为电势能，电势能与该电荷的比值为该点的电势。

## 4) 电势的计算



$$V_M = \int_M^{\text{势能零点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

一个点电荷 $Q$ 在距离 $r$ 处产生的电势

$$V = \int_r^{\infty} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

点电荷系电场的电势：如果电场由 $n$ 个点电荷 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 所激发，某点 $P$ 的电势由电场强度叠加原理可知为

$$V_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_P^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots + \int_P^{\infty} \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = \sum_i V_{ip} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

电势叠加原理： $n$ 个点电荷在某点产生的电势等于每个点电荷单独存在时产生的电势之和。

**题 4. 一半径为 $R$ 的均匀带电球面，带电量为 $Q$ ，设无穷远处为电势零点。真空介电常数为 $\epsilon_0$ 。求：**

**(1) 求球内，外任一点的场强。**

**(2) 球外任一点的电势。**

解析：(1) 根据高斯定理：

$$r > R \text{ 时, } \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ 沿径向}$$

$$r \leq R \text{ 时, } \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

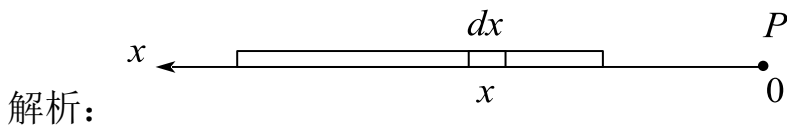
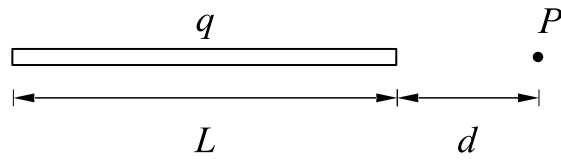
$$\therefore E = 0$$

$$(2) V_r = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

**题 5. 真空中一长为 $L$ 的均匀带电细直杆，总电荷为 $q$ ，求在直杆延长线上的一端距离为 $d$ 的 $P$ 点的电势。（注：无穷远处为零电势点）**

配套课程 习题答案





$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x}, dq = \lambda dx$$

$$\lambda = \frac{q}{L}$$

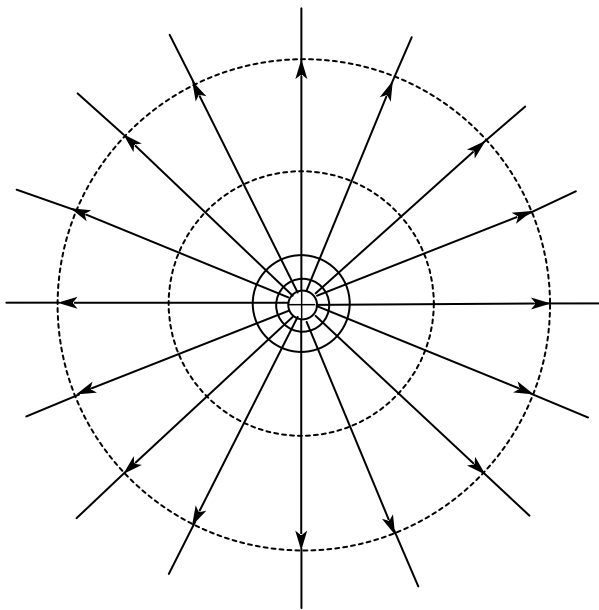
$$\therefore dV = \frac{q dx}{4\pi\epsilon_0 x L}$$

$$\therefore V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} \int_d^{d+L} \frac{dx}{x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{L+d}{d}$$

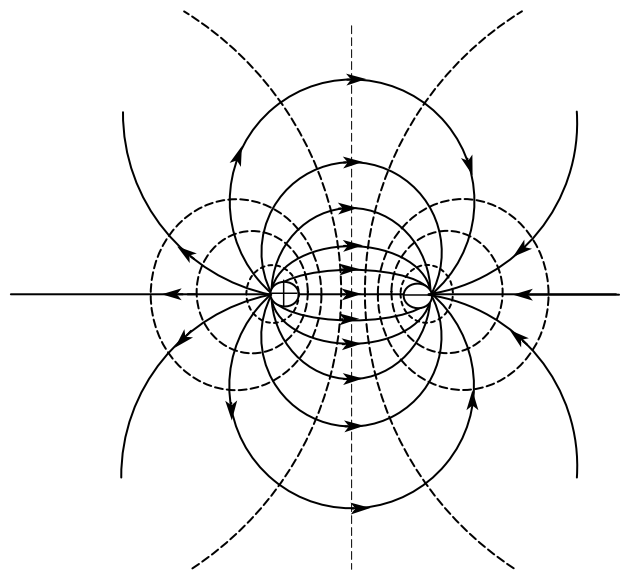
### 5) 等势面

静电场中各点的电势是逐点变化的，但是场中有许多点的电势值是相等的。把这些电势值相等的各点连起来所构成的曲面叫做等势面。等势面是指电势值相等的各点连起来所构成的曲面。





正点电荷



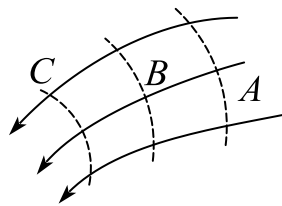
电偶极子

两种电场的等势面和电场线图

性质：

- (1) 电场线与等势面必定处处正交；
- (2) 等势面愈密处电场强度愈大；
- (3) 等势面处两点的功为0。

题 6. 如图所示，实线为某电场中的电场线，虚线表示等势面，则由图可看出( )。



- A.  $E_A > E_B > E_C, U_A > U_B > U_C$
- B.  $E_A < E_B < E_C, U_A > U_B > U_C$
- C.  $E_A > E_B > E_C, U_A < U_B < U_C$
- D.  $E_A < E_B < E_C, U_A < U_B < U_C$

答案： B

解析：场线密集处电场强，电场线稀疏处电场弱；电势高低和电场线的疏密无关，沿着电场方向电势降低。

配套课程 习题答案



### 3. 电场强度与电势梯度的关系

$$dW = -q dV = qE \cos \varphi dl$$

$$\Rightarrow E = - \frac{dV}{\cos \varphi dl} = - \frac{dV}{dn}$$

#### 1) 电势梯度

电势梯度是指沿法线  $n$  方向的电势变化率

$$\text{grad}V = \frac{dV}{dn} \vec{e}_n = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} = \nabla V$$

#### 2) 电场强度与电势梯度的关系

静电场中各点的电场强度等于该点电势梯度的负值，即

$$\vec{E} = - \frac{dV}{dn} \vec{e}_n = - \text{grad}V = - \nabla V$$

在许多选择、填空、计算题中可以直接使用。

题 1. 已知在直角坐标系  $xoy$  中，某静电场的电势函数  $V = a(x^2 + y)$ ，式中  $a$  为一常量，则电场中任意点的场强为：\_\_\_\_\_。

答案：  $-2ax\vec{i} - a\vec{j}$

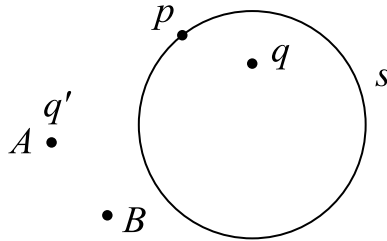
解析：  $E = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} = -2ax\vec{i} - a\vec{j}$





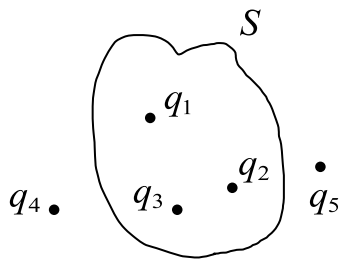
## 课时十 练习题

1. 如图所示，闭合曲面 $s$ 内有一点电荷 $q$ ， $p$ 为 $s$ 面上任一点， $s$ 面外有另一点电荷 $q'$ ，设通过 $s$ 的电通量为 $\Phi$ ， $p$ 点的场强为 $\vec{E}_p$ ，当 $q'$ 从 $A$ 点移动到 $B$ 点时（ ）。



- A.  $\Phi$  改变， $\vec{E}_p$  不变  
 B.  $\Phi$ 、 $\vec{E}_p$  都不变  
 C.  $\Phi$ 、 $\vec{E}_p$  都改变  
 D.  $\Phi$  不变， $\vec{E}_p$  改变

2. 点电荷 $q_1$ 、 $q_2$ 、 $q_3$ 、 $q_4$ 和 $q_5$ 在真空中的分布如图所示，图中为闭合曲面，则通过该闭合曲面的电场强度通量为（ ）。



- A.  $(q_1 + q_3 + q_4)/\epsilon_0$   
 B.  $(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5)/\epsilon_0$   
 C.  $(q_2 + q_3 + q_4)/\epsilon_0$   
 D.  $(q_1 + q_2 + q_3)/\epsilon_0$

3. 在高斯定理中 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$ ， $S$ 和 $q$ 的物理意义是（ ）。

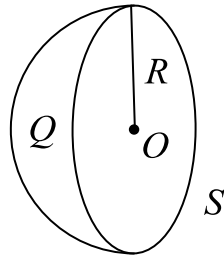
- A.  $S$ 为闭合面， $q$ 为 $S$ 内总电量  
 B.  $S$ 为闭合面， $q$ 为空间总电量  
 C.  $S$ 为任意曲面， $q$ 为 $S$ 上分布的电量  
 D.  $S$ 为任意曲面， $q$ 为空间总电量

4. 高斯定理 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV/\epsilon_0$

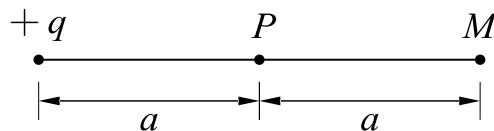
配套课程 习题答案



- A. 适用于任何静电场
  - B. 只适用于真空中的静电场
  - C. 只适用于具有球对称性、轴对称性和平面对称性的静电场
  - D. 只适用于虽然不具有C中所述的对称性、但可以找到合适的高斯面的静电场
5. 半径为 $R$ 的均匀带电球体，其电荷体密度为 $\rho$ ，利用高斯定理求球体内外的电场强度分布。
6. 如图所示，一个半径为 $R$ 的半球面 $S$ 上均匀分布有正电荷 $Q$ ，以无限远处为电势零点，则球心处 $O$ 点的电势为\_\_\_\_\_。



7. (1) 描述静电场的两个基本物理量是\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_。
- (2) 静电场的环路定理表明静电场的电场力是\_\_\_\_\_。（保守力或非保守力）。
- (3) 将电量 $q = 1.7 \times 10^{-8} C$ 的点电荷从静电场中的 $A$ 点移动到 $B$ 点，外力需做功 $5.0 \times 10^{-6} J$ ，则 $A$ 、 $B$ 两点间的电势差为 $U =$ \_\_\_\_\_  $V$ ，电势高的是\_\_\_\_\_点。
8. 如图所示，在点电荷 $+q$ 的电场中，若取 $P$ 点处为电势零点，则 $M$ 点的电势为\_\_\_\_\_。

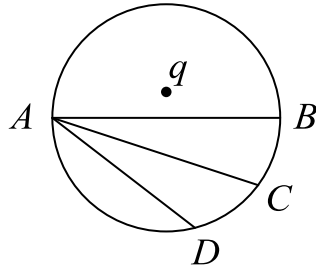


9. 电场线越密集的地方（ ）。
- A. 电场强度越大
  - B. 电场强度越小
  - C. 电势越高
  - D. 电势越低

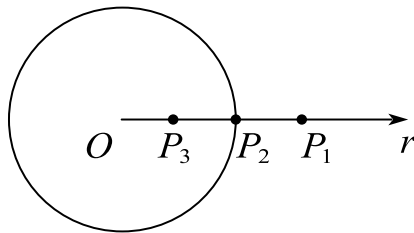


10. 一电量为  $-q$  的点电荷位于圆心  $O$  处， $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  为同一圆周上的四点，现将一试验电荷从  $A$  点分别移动到  $BCD$  各点，则（ ）。

- A. 从  $A$  至  $B$  电场力做功最大
- B. 从  $A$  至  $D$  电场力做功最大
- C. 从  $A$  至各点电场力做功相等
- D. 无法确定



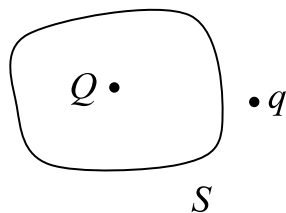
11. 真空中有一半径为  $R$  的均匀带电球面，电荷为  $q$ ，如图所示。求  $P_1$ 、 $P_2$  及  $P_3$  点的电势（以无限远处为电势零点）。



12. 关于高斯定理的理解有下面几种说法，其中正确的是（ ）。

- A. 如果高斯面上  $E$  处处为零，则该面内必无电荷。
- B. 如果高斯面内无电荷，则高斯面上  $E$  处处为零。
- C. 如果高斯面上  $E$  处处不为零，则高斯面内必有电荷。
- D. 如果高斯面内有净电荷，则通过高斯面的电场强度通量必不为零。

13. 点电荷  $Q$  被曲面  $S$  所包围，从无穷远处引入另一点电荷  $q$  至曲面外一点，如下图所示，则引入前后（ ）。



- A. 穿过曲面  $S$  的电场强度通量不变，曲面上各点场强不变

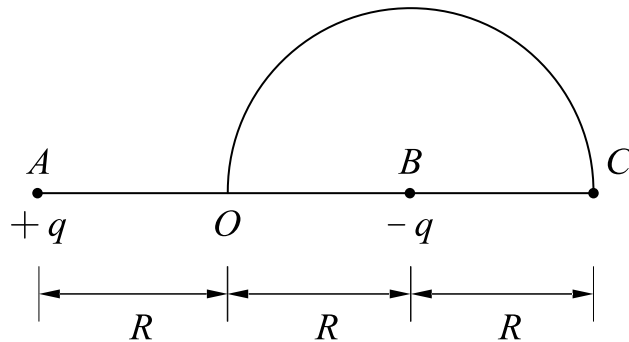


- B. 穿过曲面 $S$ 的电场强度通量不变，曲面上各点场强变化  
 C. 穿过曲面 $S$ 的电场强度通量变化，曲面上各点场强变化  
 D. 穿过曲面 $S$ 的电场强度通量变化，曲面上各点场强不变

14. 一半径为 $R$ 的带电球体，其电荷体密度分布为 $\rho = Ar$  ( $r \leq R$ ) ( $A$ 为一常量)， $\rho = 0$  ( $r > R$ )。

试求：球体内外的场强分布。

15. 如图所示，在 $A$ ， $B$ 两点处有电量分别为 $+q$ ， $-q$ 的点电荷， $AB$ 间的距离为 $2R$ ，现将另一正试验点电荷 $q_0$ 从 $O$ 点经半圆弧路径移到 $C$ 点，电场力所做的功为\_\_\_\_\_。



16. 一绝缘细棒弯成半径为 $R$ 的半圆形，使之均匀带正电，电荷线密度为 $+\lambda$ ，设无穷远处为电势零点，则半圆环圆心 $O$ 处的电势为（ ）。

- A.  $\frac{\lambda}{8\epsilon_0}$       B.  $\frac{\lambda}{\epsilon_0}$       C.  $\frac{\lambda}{2\epsilon_0}$       D.  $\frac{\lambda}{4\epsilon_0}$



## 课时十一 静电场中的导体

知识点	重要程度	题型
1. 静电场中的导体	★★★	选填、简答、计算
2. 电容器的电容	★★★★★	选填、简答、计算

### 1. 静电场中的导体

#### 1) 导体的静电平衡

**静电感应：**当把一个不带电的导体放入静电场，在最初极短暂的时间内，导体内会有电场存在。这个电场将驱使导体内的自由电子相对于晶格点阵作宏观的定向运动，从而引起导体中正负电荷的重新分布，结果使导体的一端带正电荷，另一端带负电荷。导体表面所带的这种电荷称作感应电荷。

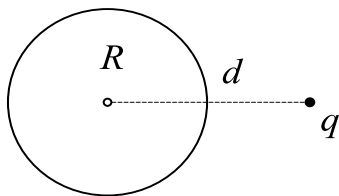
**静电平衡状态：**静电感应改变了导体内的电荷分布并削弱导体内的电场强度，最终使导体内的电场强度都等于零。

**静电平衡的必要条件：**导体内任一点的电场强度都等于零。

相关推论：

- (1) 是等势体，其表面是等势面；
- (2) 导体表面的电场强度垂直于导体表面。

**题 1.** 如图所示将一个电量为  $q$  的点电荷放在一个半径为  $R$  的不带电的导体球附近，点电荷距导体球球心为  $d$ 。设无穷远处为零电势，则在导体球球心  $O$  点有 ( )



A.  $E = 0, V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$

B.  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}, r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$

C.  $E = 0, V = 0$

配套课程 习题答案



$$D. E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}, V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

答案：A

解析：B, D 静电平衡的导体内部电场为 0；C 静电平衡的导体为等势体，由于电荷守恒定律，感生电荷在圆心处产生的总电势为 0，因此只考虑  $q$  在  $O$  的电势

## 2) 导体上的电荷分布

当带电导体处于静电平衡状态时，导体内部处处没有净电荷存在，电荷只能分布于导体的外表面上。带电导体附近的总场强与该表面的电荷面密度成正比，电场强度的方向垂直于表面，即：（可由高斯定理求得）

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

孤立导体的电荷分布由导体表面的曲率决定：

- (1) 凸出而尖锐的地方，曲率大，电荷面密度较大；（尖端放电）
- (2) 平坦的地方，曲率小，电荷面密度较小；
- (3) 凹陷的地方，曲率为负，电荷面密度最小。

题 3. 半径分别为  $R$  和  $r$  的两个金属球，相距很远。用一根细长导线将两球连接在一起并使它们带电。在忽略导线的影响下，两球表面的电荷面密度之比  $\sigma_R/\sigma_r$  为 ( )

- A.  $R/r$                       B.  $R^2/r^2$                       C.  $r^2/R^2$                       D.  $r/R$

答案：选 D

解析：静电平衡条件下，电荷分布在导体表面，导体变为等势体。

题中两球相距很远，可以将两个球看电荷均匀分布的球面，利用高斯定理相关结论以及电势相等条件进行求解

配套课程 习题答案



由高斯定理易得：

$$E_R = \begin{cases} \frac{\sigma_R R^2}{\varepsilon_0 l^2}, & l \geq R \\ 0, & l < R \end{cases}$$

$$E_r = \begin{cases} \frac{\sigma_r r^2}{\varepsilon_0 l^2}, & l \geq r \\ 0, & l < r \end{cases}$$

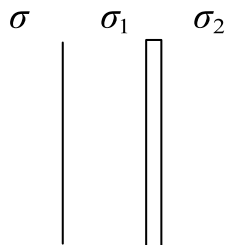
$$\therefore V_R = \int \vec{E}_R \cdot d\vec{l} = \frac{\sigma_R}{\varepsilon_0} R$$

$$V_r = \int \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = \frac{\sigma_r}{\varepsilon_0} r$$

$$\text{由 } V_R = V_r \Rightarrow \frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{r}{R}$$

题 4. 如图所示，一无限大均匀带电平面附近放置一与之平行的无限大导体平板。已知带电平面的电荷面密度为  $\sigma$ ，则导体板左右表面 1 和 2 感应电荷的面密度分别为( )

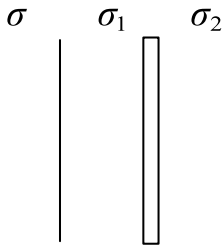
- A.  $\sigma_1 = -\sigma, \sigma_2 = +\sigma$   
 B.  $\sigma_1 = -\sigma/2, \sigma_2 = +\sigma/2$   
 C.  $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = -\sigma$   
 D.  $\sigma_1 = +\sigma/2, \sigma_2 = -\sigma$



答案：B

解析：利用无限大均匀带电平面电场公式，以及静电平衡条件





设  $\sigma > 0$ , 显然  $\sigma_2 > 0, \sigma_1 < 0$

$$\text{在导体中 } E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{|\sigma_1|}{2\epsilon_0} - \frac{|\sigma_2|}{2\epsilon_0} = 0$$

$$\therefore |\sigma_2| + |\sigma_1| = \sigma$$

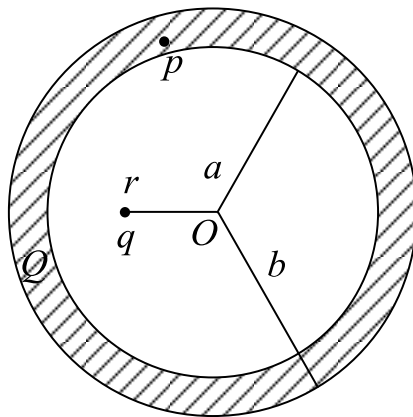
$$\therefore \text{电荷守恒 } \sigma_2 s + \sigma_1 s = 0$$

$$\therefore \sigma_2 + \sigma_1 = 0$$

$$\therefore \sigma_2 = \frac{\sigma}{2}, \sigma_1 = -\frac{\sigma}{2}$$

题 6. 如图所示，一内半径为  $a$ ，外半径为  $b$  的金属球壳，带有电荷  $Q$ ，在球壳空腔内距离球心  $r$  处有一点电荷  $q$ ，设无限远处为电势零点，试求：

- (1) 此题能用高斯定理求场强吗？为什么？
- (2) 球壳内、外表面上的电荷。
- (3) 球心  $O$  点处的总电势。
- (4) 若金属球壳中有一点  $p$ ， $p$  点离点电荷  $q$  的距离为  $c$ ，求金属球壳内、外表面上的电荷在  $p$  点产生的合电场强度的大小和方向？（方向请在图中标出）



解：(1) 不能用高斯定理求，因为场强分布不具有对称性，无法求解

配套课程 习题答案





(2) 由静电平衡，导体内表面电荷为  $-q$

由电荷守恒，外表面电荷为  $Q + q$

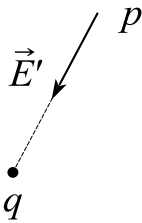
(3)  $U_O = U_q + U_{-q} + U_{Q+q}$

$$U_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, U_{-q} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$U_{a+q} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 b} = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

$$\therefore U_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

(4)



$$\therefore E_p = 0 = \vec{E}_q + \vec{E}'$$

$$\therefore E_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 C^2}$$

$$\therefore E' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 C^2}$$

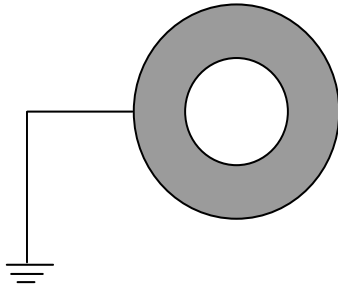
### 3) 空腔导体内外的静电场与静电屏蔽

在静电平衡状态下，空腔内的电场不受外界的影响；一个接地的空腔导体，空腔内的带电体对外界的物体不会产生影响。这种使导体空腔内的电场不受外界的影响或利用接地的空腔导体将腔内带电体对外界的影响隔绝的现象，称为静电屏蔽。（外不对内；接地，内不对外）

题 7. 如图所示，带电体  $Q$  靠近一个接地空腔导体，空腔内无电荷。在静电平衡后，下列说法中错误的是：（ ）

配套课程 习题答案





- A. 导体空腔内任意点的电场强度为零
- B. 导体空腔内任意点的电势为零
- C. 导体空腔内表面的电荷量为零
- D. 导体外表面的电荷量为零

答案：C

解析：A 由于静电平衡，导体空腔内电场为 0；

B 导体为等势体，接地电势为 0；

D 由于接地，外表面电荷为 0；

C 因为要平衡掉  $Q$  产生的电势，所以空腔内表面电荷量不为 0。

## 2. 电容器的电容

### 1) 孤立导体的电容

孤立导体的电容是表征导体储电能力的物理量，表示使导体升高单位电势所需的电荷量，即

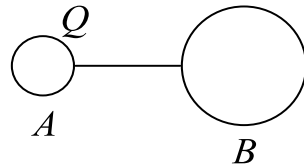
$$C = \frac{q}{V}$$

电容是标量，只与导体的大小、形状和周围介质有关，与  $q, V$  均无关，单位是法拉(F)，且  $1F = 1C/V$ ， $1F = 10^6 \mu F$

题 1. 半径分别为  $R_1, R_2$  的两个导体球  $A, B$  相距很远，可将两球视为孤立导体球，原来  $A$  球带电  $Q, B$  球不带电。现用一根细长导钱将两球连接，静电平衡后忽略导线中的电荷。求：

配套课程 习题答案





(1)  $A$ 、 $B$  球上各带多少电量？

(2) 两球的电势？

(3) 该系统的电容？

解：(1)  $q_A + q_B = Q$

$$V_A = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 R_1}; V_B = \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$V_A = V_B$$

$$\therefore q_A = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q; q_B = \frac{R_2}{R_1 + R_2} Q$$

$$(2) V_A = V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)}$$

$$(3) C = \frac{q}{V} = 4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)$$

## 2) 电容器的电容

### (1) 电容器：

由导体壳  $B$  和壳内导体  $A$  以及两者之间的电介质构成的可以存储电荷的系统称为电容器。一般的电容器中  $A, B$  两导体（称极板）的相对表面上带等量异号电荷  $\pm q$ ，两导体的电势差为  $U = V_A - V_B$ ，将比值： $C = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{q}{U}$  定义为电容器的电容，其值只取决于两极板的大小，形状、相对位置及极板间电介质。孤立导体可看作孤立导体与无限远组成的特殊电容器。

如果两极板带电不为  $\pm q$ ，而是分别带电  $q_1, q_2$ ，那么：

$$q = \frac{|q_1 - q_2|}{2}$$

配套课程 习题答案



(2) 充有电介质的电容器电容：

$$C = \varepsilon_r C_0$$

式中， $\varepsilon_r$  为该介质的相对电容率或相对介电常量； $C_0$  为两极板间为真空时的电容。此外还有介质的介电常量  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

对任何电容器，电容量都只和它们的几何结构以及两板间的电介质有关，与它们是否带电无关。

计算任意形状电容器的电容时，总是要先假定极板带电，然后求出两带电极板间的电场强度，再由电场强度与电势差的关系求两极板间的电势差，最后由电容的定义式就可求出电容量。

题 2. 平行板真空电容器的电容为  $C_0$ ，充电后两极板间的电场强度大小为  $E_0$ ，断开电源，并在两极板间充满介电常数为  $\varepsilon$  的均匀电介质，此时的电容为  $C$ ，两极板间的电场强度大小为  $E$ ，则  $C:C_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $E:E_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案： $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ ； $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$

解析：由于极板与电源是断开的，因此极板的电荷量不会改变

$$C = \varepsilon_r C_0 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} C_0$$

$$E_0 = \frac{U_0}{d} = \frac{Q}{C_0 d}$$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{Q}{Cd}$$

$$\therefore \frac{E}{E_0} = \frac{C_0}{C} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$$

(3) 几种典型电容器的电容

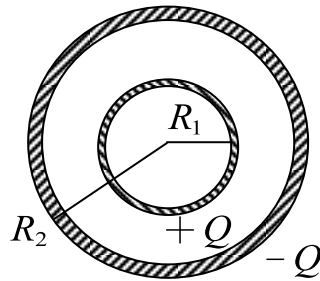
配套课程 习题答案



在电容器两极板之间充满相对介电常数为 $\varepsilon_r$ 的某种电介质，那么平板电容器、圆柱形电容器和球形电容器的电容分别是

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}, \quad C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r l}{\ln \frac{R_B}{R_A}}, \quad C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}$$

题 3. 如图所示，球形电容器两同心金属球面的半径分别为 $R_1, R_2$ ，各自带有等量异号电荷 $+Q$ 和 $-Q$ ，置于真空当中。求：



- (1) 两球面间的电场强度？
- (2) 两球面间的电势差？
- (3) 该电容器的电容？

解：利用高斯定理进行求解

(1) 由高斯定理：

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$\therefore E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ 方向沿径向向外}$$

$$(2) \quad U = \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}$$

$$(3) \quad C = \frac{Q}{u} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

配套课程 习题答案



## 3) 电容器的串联与并联

(1)  $n$ 个电容器串联： $n$ 个电容器的串联，设它们的电容值分别为 $C_1, C_2, \dots, C_n$ ，组合的等效电容值为 $C$ ，根据电容计算公式得

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum \frac{1}{C_i}$$

(2)  $n$ 个电容器并联： $n$ 个电容器的并联，设电容器 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 根据电容计算公式得

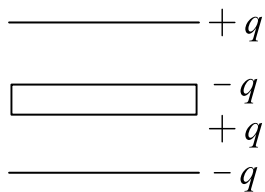
$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n = \sum C_i$$

题 4. 一空气平行板电容器，两极板面积均为 $S$ ，板间距离为 $d$ （ $d$ 远小于极板线度），在两极板间平行地插入一面积也是 $S$ ，厚度为 $t$ （ $t < d$ ）的金属片，求

(1) 电容 $C$ 等于多少？

(2) 金属片放在两极板间的位置对电容值有无影响？

解：结合静电平衡的知识进行求解



假定上极板带 $+q$

(1) 由于静电平衡，导体上表面带点 $-q$

导体下表面带电 $+q$ ，导体内 $E_i = 0$

$$\text{导体外两区域： } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$$

$$u = E(d_1 + d_2) + E_i t = \frac{q(d-t)}{\epsilon_0 S}$$

$$\therefore C = \frac{q}{u} = \frac{\epsilon_0 S}{d-t}$$

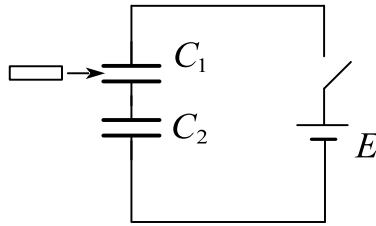
配套课程 习题答案



## (2) 无影响

可见，在电容器中插入导体相当于减小了两板间距，同时也可以将电容器看成两个电容器串联，导体内部简化成一根导线。今后遇到的选择、填空问题可以直接使用此结论。

题 5.  $C_1$  和  $C_2$  两空气电容器串联起来接上电源充电，然后将电源断开，再把一电介质板入  $C_1$  中，如图所示则 ( )



- A.  $C_1$  上电势差减小， $C_2$  上电势差增大。
- B.  $C_1$  上电势差减小， $C_2$  上电势差不变。
- C.  $C_1$  上电势差增大， $C_2$  上电势差减小。
- D.  $C_1$  上电势差增大， $C_2$  上电势差不变。

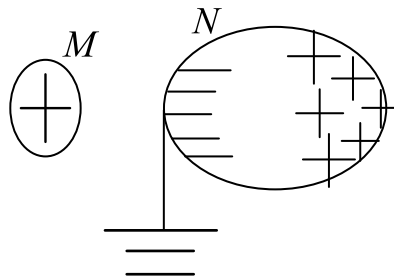
答案：B

解析：电源断开  $Q$  不变，插入电介质  $C_1$  变大，因此  $C_1$  上电势减小，另一个电容器  $C_2$  无变化



## 课时十一 练习题

1. 当一个带电导体达到静电平衡时：( )
  - A. 表面上电荷密度较大处电势较高
  - B. 表面上电荷密度较小处电势较高
  - C. 导体是等势体，导体表面是等势面
  - D. 导体内部的电势比导体表面的电势高
  
2. 一孤立导体球壳带有正电荷，若将远处一带电荷，移至导体球壳外附近，则以下正确的是：( )
  - A. 导体球壳外附近的场强仍与其表面垂直；
  - B. 导体球壳面上的电荷仍为均匀分布；
  - C. 导体球壳的电势仍保持不变；
  - D. 由于静电屏蔽，球壳外的带电体在球壳内产生的场强处处为零。
  
3. 一带正电荷的物体  $M$ ，靠近一原不带电的金属导体  $N$ ， $N$  的左端感生出负电荷，右端感生出正电荷，若将的左端接地，如图所示，则



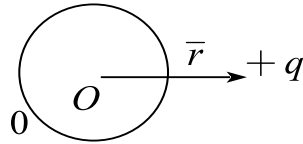
- A.  $N$  上有负电荷入地
  - B.  $N$  上有正电荷入地
  - C.  $N$  上的电荷不动
  - D.  $N$  上所有电荷都入地
4. 在一个孤立的导体球壳内，若在偏离球中心处放一个点电荷，则在球壳内外表面上将出现感应电荷，其分布将是：( )
    - A. 内表面均匀，外表面也均匀
    - B. 内表面不均匀，外表面均匀
    - C. 内表面均匀，外表面不均匀



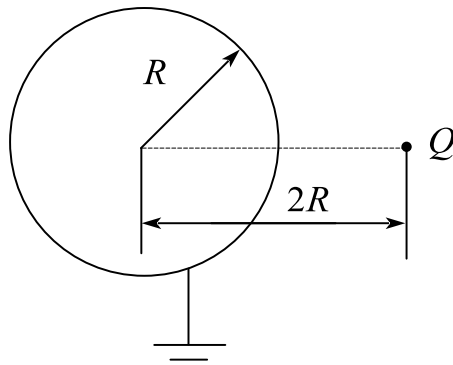


D. 内表面不均匀，外表面也不均匀

5. 如图所示，在电荷为  $+q$  的点电荷电场中，放入一不带电的金属球，从球心  $O$  到点电荷所在处的矢径为  $r$ ，金属球上的感生电荷净电荷  $q' = \underline{\hspace{2cm}}$ ，这些感生电荷在球心处产生的电场强度  $\underline{\hspace{2cm}}$



6. 如图所示，一个接地导体球外有一点电荷  $Q$ ，导体球的半径为  $R$ ， $Q$  距球心为  $2R$ ，则在导体球内球心处的电势为  $\underline{\hspace{2cm}}$



7. (判断) 电容器的电容值正比于两极板的电荷。

8. 一平行板电容器，两极板相距为  $d$ ，对它充电后与电源断开，然后把电容器两极板之间的距离增大到  $2d$ ，如果电容器内电场边缘效应忽略不计，则电容器两极板间的电场强度是原来的  $\underline{\hspace{2cm}}$

9. 如果在空气平行板电容器的两极板间平行地插入一块与极板面积相同的金属板，则由于金板的插入及其相对极板所放位置的不同，对电容器电容的影响为：

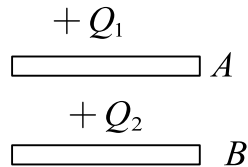
- A. 使电容减小，但与金属板相对极板的位置无关。
- B. 使电容减小，且与金属板相对极板的位置有关。
- C. 使电容增大，但与金属板相对极板的位置无关。
- D. 使电容增大，且与金属板相对极板的位置有关。



10. 平行板电容器的电容是 $C$ ，两板间距为 $d$ ，然后插入一块厚度为 $d/3$ 的大金属板，并且插入的金属板与电容器的极板平行，则电容器的电容变为（ ）

- A.  $0.5C$                       B.  $1.5C$                       C.  $3C$                       D.  $C/3$

11.  $A, B$ 为两导体大平板，面积均为 $S$ ，平行放置，如图所示， $A$ 板带电荷 $+Q_1$ ， $B$ 板带电荷 $+Q_2$ ，如果使 $B$ 板接地，则 $AB$ 间电场强度的大小 $E$ 为（ ）



- A.  $\frac{Q_1}{2\epsilon_0 S}$                       B.  $\frac{Q_1 - Q_2}{2s_0 S}$                       C.  $\frac{Q_1}{\epsilon_0 S}$                       D.  $\frac{Q_1 + Q_2}{2s_0 S}$

12. 有一平行板电容器，两个极板面积为 $S$ ，相距为 $d$ ，两极板间充满相对电容率为 $\epsilon_r$ 的电介质。若将两极板的面积变为 $2S$ ，并同样充满相同的电介质，此时电容是本来的\_\_\_\_倍；若将两极板的间距变为 $2d$ ，并同样充满相同的电介质，此时电容是本来的\_\_\_\_倍。

13. 一空气平行板电容器，电容为 $C$ ，两极板间距离为 $d$ 。充电后，两极板间相互作用力为 $F$ 。则两极板间的电势差为\_\_\_\_；极板上的电荷为\_\_\_\_。

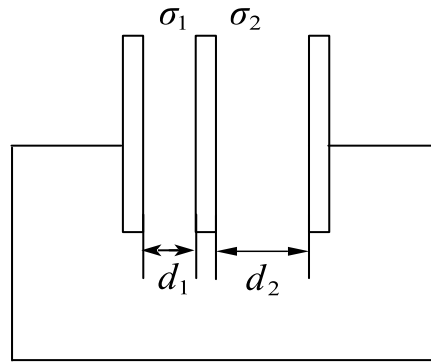
14. 一空气平行板电容器，两极板间距离为 $d$ ，充电后板间电压为 $U$ ，将电源断开。然后在两板间平行地插入一厚度 $\frac{d}{2}$ 的金属板，则板间电压 $U'$ 变为（ ）

- A.  $U$                                       B.  $\frac{U}{2}$                                       C.  $2U$                                       D.  $0$

15. (判断) 高压设备中的金属部件一般使用球状外形，是为了避免棱角伤人。

16. 三块互相平行的导体板，相互之间距离 $d_1$ 和 $d_2$ 比板面积线度小得多，外面二板用导线连接。中板上带电，设左右两面上电荷面密度分别为 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ ，如图所示，则比值 $\sigma_1/\sigma_2$ 为（ ）





A.  $d_2/d_1$

B.  $d_2/d_1$

C. 1

D.  $d_2^2/d_1^2$

17. 一平行板电容器，板间相距  $d$ ，两板间电势差为  $U$ ，一个质量为  $m$ ，电荷为  $-e$  的电子，从负极板由静止开始飞向正极板，它所需的时间为（ ）



## 课时十二 静电场中的电介质

知识点	重要程度	题型
1.静电场中的电介质	★★	选填
2.有电介质时的高斯定理 电位移	★★★★	选填、计算
3.静电场的能量	★★★★	选填、计算

### 1. 静电场中的电介质

#### 1) 电介质的电结构

有极分子：正、负电荷的中心不重合的分子，等效于一个电偶极子。

无极分子：正、负电荷的中心重合的分子，其等效电偶极矩等于零。

#### 2) 电介质的极化

##### (1) 自由电荷 极化电荷

自由电荷：指在电场作用下能移动一宏观距离的电荷。

极化电荷：指不能离开电介质，也不能在电介质中自由移动的电荷，也成为束缚电荷。

##### (2) 电介质的极化

电介质的极化是指在外电场的作用下，在电介质中出现极化电荷的现象，无论是无极分子还是有极分子都要发生变化。

##### (3) 电介质极化的两种类型

###### ①位移极化

无极分子或有极分子在外电场的作用下正、负电荷中心发生微小的相对位移。极化程度取决于外电场的强弱。

###### ②取向极化

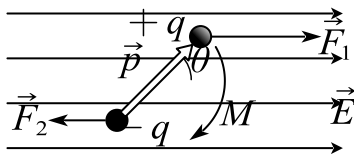
有极分子在外电场作用下等效电偶极子转向外电场的方向。取向程度取决于外电场的强弱和环境温度。

题 1. 一电矩为  $\vec{p}$  的电偶极子在场强为  $\vec{E}$  的均匀电场中， $\vec{p}$  与  $\vec{E}$  间的夹角为  $\theta$ ，则

它所受的电场力  $\vec{F} = ( \quad )$ ，力矩的大小  $M = ( \quad )$ 。

配套课程 习题答案





答案：0； $pE \sin \theta$

解析：设在在均匀外电场中，电偶极子的电矩  $\vec{p}$  的方向与场强  $\vec{E}$  方向的夹角为  $\theta$ ，

根据电场强度公式，作用在电偶极子正负电荷上的力  $F_1$  和  $F_2$  的大小均为

$$F_1 = F_2 = qE$$

由  $F_1$  和  $F_2$  大小相等，方向相反，合力为零，电偶极子没有平动；但由于作用力不在同一直线上，所以电偶极子要受到力矩的作用

$$\vec{M}_1 = \frac{1}{2} \vec{l} \times q\vec{E}, \quad \vec{M}_2 = \frac{1}{2} (-\vec{l}) \times (-q)\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{l} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

则  $M = Fl \sin \theta = qEl \sin \theta = pE \sin \theta$ 。

### 3) 电极化强度

单位体积内分子电偶极矩的矢量和，即

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V}$$

作为量度电介质极化程度的基本物理量，称为该点( $\Delta V$ 所包围的一点)的电极化强度  $\vec{P}$  矢量，只出现在电介质内部，在国际单位制中，电极化强度的单位是  $C/m^2$ 。

### 4) 电极化强度与极化电荷的关系

在一般情况下，设  $\vec{e}_n$  为薄片表面的单位法向矢量，那么

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{e}_n = P_n$$



即介质极化所产生的极化电荷密度等于电极化强度沿介质表面外法线的分量。在薄片侧面，由于 $\vec{P}$ 的方向与侧面法线垂直，所以侧面上的极化电荷面密度为零。

## 5) 介质中的静电场

### (1) 电极化强度与总电场的关系：

对于大多数常见的电介质，电极化强度 $\vec{P}$ 与作用于介质内部的合电场强度 $\vec{E}$ 成正比，而且两者方向相同，在国际单位制中可表示为

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

式中， $\chi_e$ 和电介质的性质有关，称为电介质的电极化率。满足上式极化规律的电介质称为各向同性的线性电介质。

### (2) 介电常数与电极化率的关系

相对介电常量和电极化率的关系：

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

介电常数与电极化率的关系：

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = (1 + \chi_e) \varepsilon_0$$

电极化率 $\chi_e$ ，相对介电常量 $\varepsilon_r$ ，和介电常数 $\varepsilon$ ：都是表征电介质性质的物理量，三者中知道任何一个即可求得其他两个。

## 6) 铁电体 压电体 永电体

### (1) 铁电体

铁电性是指一些电介质在一定的温度范围内电容率随电场强度变化，在撤去外电场后，仍留有剩余的极化的性质；

铁电体是具有铁电性的电介质。

### (2) 压电体

压电效应是指某些离子型晶体的电介质在发生机械变形时产生的电极化现象；

压电体是具有压电效应的电介质。



电致伸缩是指在晶体带电时或在电场中时，晶体的大小会伸长或缩短的逆现象。

### (3) 永电体

永电体是指在外界条件撤销后，仍能长期保留其极化状态，且不受外电场影响的一类物体，又称驻极体。

性质类似永磁体，分割后表面同时出现并保持正负电荷。

## 2. 有电介质时的高斯定理 电位移

### 1) 有电介质时的高斯定理 电位移

#### (1) 电位移矢量

定义：

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

式中， $\vec{P}$  为电极化强度， $\vec{D}$  的单位是  $C/m^2$ 。

#### (2) 有电介质时的高斯定理

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

通过电介质任意闭合曲面的电通量等于闭合曲面所包围的自由电荷量的代数和，与极化电荷无关。

#### (3) 小结：

电场线起于正电荷、止于负电荷，包括自由电荷和极化电荷。

电位移线起于正自由电荷，止于负自由电荷。

电极化强度线起于正极化电荷，止于负极化电荷。只在电介质内部出现。

### 2) $\vec{D}$ ， $\vec{E}$ ， $\vec{P}$ 三矢量间的关系

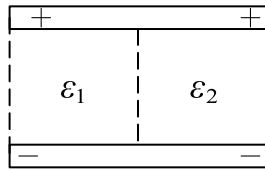
如果由高斯定理能算出  $\vec{D}$ ，再利用其他关系式，就有可能较为方便地算出电介质中的电场强度：



$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E} \\ \Rightarrow \vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}\end{aligned}$$

适用于各向同性介质。

题 1. 如图，平行板电容器带电，左、右分别充满介电常数为  $\varepsilon_1$  与  $\varepsilon_2$  的各向同性均匀介质，则两种介质内：( )。



- A. 场强相等，电位移相等
- B. 场强相等，电位移不等
- C. 场强不等，电位移相等
- D. 场强、电位移均不等

答案：C

解析：选立方体为高斯面，由高斯定理  $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sigma S$ ,

$$\therefore D = \sigma$$

$\therefore$  两边电位移相同，

$$\therefore D = \varepsilon E,$$

$$\therefore E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1}; E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}, \text{ 显然电场不同。}$$

### 3. 静电场的能量

#### 1) 电场的能量密度

电场中每单位体积的能量，即电场能量密度

配套课程 习题答案





$$w_e = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} DE,$$

式中，能量密度的单位为  $J/m^3$ 。

在一般情况下，电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E},$$

在各向同性线性介质中， $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ ，电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$

2) 任意带电体系的总能量

$$E_{\text{总}} = \iiint_V w_e dV$$

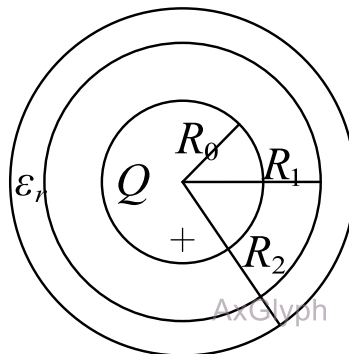
题 1. 半径为  $R_0$  的导体球带有电荷  $+Q$ ，球外有一层均匀电介质的同心球壳，其内外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ，相对电容率为  $\varepsilon_r$ （如图），求：

(1) 电介质中的电位移  $\vec{D}$  和电场强度  $\vec{E}$ ；

(2) 介质内的极化强度  $\vec{P}$  和内外表面上的极化电荷面密度  $\sigma'_1$ ， $\sigma'_2$ ；

(3) 导体球的电势；

(4)  $R_1$  和  $R_2$  之间电介质中的总电场能量。



解：选同心球面做高斯面

(1) 由高斯定理：
$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q,$$



$$\therefore D = \frac{Q}{4\pi r^2} (R_1 < r < R_2),$$

$$\therefore D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E,$$

$$\therefore E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}, \text{ 方向均沿半径向外。}$$

$$(2) P = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E = \frac{Q(\varepsilon_r - 1)}{4\pi \varepsilon_r r^2}, \text{ 方向沿半径向外,}$$

$$\sigma'_1 = -P_{n_1} = -\frac{Q(\varepsilon_r - 1)}{4\pi \varepsilon_r R_1^2},$$

$$\sigma'_2 = P_{n_2} = \frac{Q(\varepsilon_r - 1)}{4\pi \varepsilon_r R_2^2}.$$

$$(3) E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}, & r > R_2 \text{ 或 } R_0 < r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore V &= \int_{R_0}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

$$(4) W = \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

$$= \frac{4\pi Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{Q^2 (R_2 - R_1)}{8\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r R_1 R_2}$$

### 3) 几种典型带电体的静电能

(1) 真空中均匀带电体，半径  $R$ ，电荷量  $q$

$$W = \frac{3q^2}{20\pi \varepsilon_0 R},$$

配套课程 习题答案



(2) 真空中均匀带电球面，半径  $R$ ，电荷量  $q$

$$W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

(3) 电容器储存的能量

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU$$

题 2. 一平行板电容器充电后仍与电源（端电压保持不变）相连，若用绝缘手柄将电容器的两极板距离拉大，则两极板间的电场强度大小  $\vec{E}$  将（ ）（填“增大”、“减小”或“不变”），电容器存储的静电能  $W$  将（ ）（填“增大”、“减小”或“不变”）。

答案：减小；减小；

解析：连接电源，极板电压不变，极板间距增大，电容  $C$  减小，电场强度  $E$  减小，

电场能量  $W$  减小：

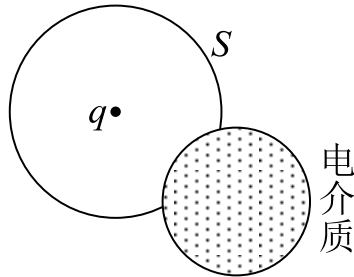
$$E = \frac{U}{d}, \quad d \uparrow, \quad U \text{ 不变} \Rightarrow E \downarrow;$$

$$W = \frac{1}{2}CU^2, \quad C \downarrow, \quad U \text{ 不变} \Rightarrow W \downarrow。$$



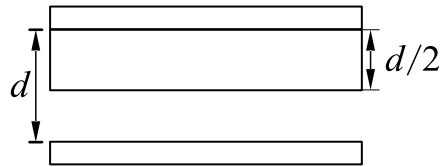
## 课时十二 练习题

1. (判断) 在外电场作用下电介质发生极化现象，极化电场总是起着削弱外电场的作用。( )
2. 在一点电荷 $q$ 产生的静电场中，一块电介质如图放置，以点电荷所在处为球心作一球形闭合面 $S$ ，则对此球形闭合面：( )



- A. 高斯定理成立，且可用它求出闭合面上各点的场强；
  - B. 高斯定理成立，但不能用它求出闭合面上各点的场强；
  - C. 由于电介质不对称分布，高斯定理不成立；
  - D. 即使电介质对称分布，高斯定理也不成立。
3. 在静电场中，作闭合曲面 $S$ ，若有 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$  (式中 $\vec{D}$ 为电位移矢量)，则 $S$ 面内必定 ( )。
    - A. 既无自由电荷，又无束缚电荷
    - B. 没有自由电荷
    - C. 自由电荷和束缚电荷的代数和为零
    - D. 自由电荷的代数和为零
  4. 一平行板电容器，两板间距离为 $d$ ，若插入一面积与极板面积相同而厚度为 $d/2$ 的。相对电容率为 $\epsilon_r$ 的各向同性均匀电介质板 (如图所示)，则插入介质后的电容值与原来的电容值之比 $C/C_0$ 为 ( )。





- A.  $\frac{1}{\epsilon_r + 1}$       B.  $\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1}$
- C.  $\frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1}$       D.  $\frac{2}{\epsilon_r + 1}$

5. 一空气平板电容器，空气层厚度  $d = 1.5\text{cm}$ ，两极板间电压为  $40\text{kV}$ ，已知空气的击穿场强为  $3.0 \times 10^6\text{V/m}$ ，则该电容器会被击穿么？现将一厚度为  $\delta = 0.3\text{cm}$  的玻璃板插入此电容器，并与两级平行，若该玻璃板的相对电容率  $\epsilon_r = 7.0$  为，击穿电场强度为  $20\text{MV/m}$ 。则此时电容器会被击穿么？

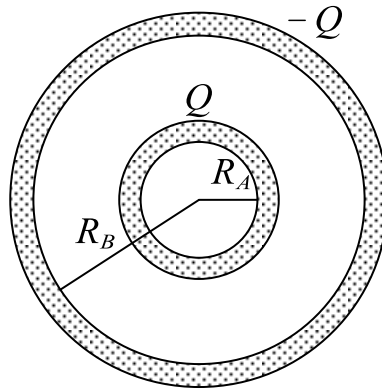
6. 两个点电荷在真空中相距为  $r_1$  时的相互作用力等于它们在某一“无限大”各向同性均匀电介质中相距为  $r_2$  时的相互作用力，则该电介质的相对介电常量  $\epsilon_r =$  ( )。

7. 一个带电量为  $q$ ，半径为  $R$  的薄金属壳里充满了相对介电常数为  $\epsilon_r$  的均匀介质，球壳外为真空，则球壳的电势为 ( )。

- A.  $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$
- B.  $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R}$
- C.  $U = 0$
- D.  $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r} (r > R)$

题 8. 如图所示，球形电容器的内、外半径分别为  $R_A$  和  $R_B$ ，所带电荷为  $+Q$  和  $-Q$ ，两球壳间为真空。求：

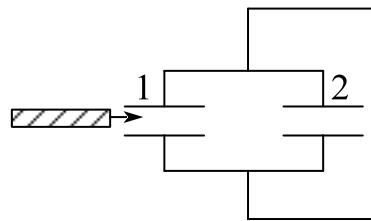




- (1) 此电容器贮存的电场能量为多少；
- (2) 电容器的电容为多少。

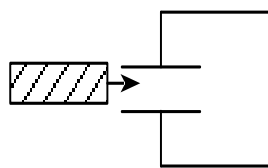
9. 一空气平行板电容器，充电后把电源断开，这时电容器中储存的能量为  $W_0$ ，然后在两极板间充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的各向同性均匀电介质，则该电容器中储存的能量为 ( )。

10. 如图，1、2是完全相同的空气电容器，将其充电后与电源断开，再将一块各向同性均匀电介质板插入电容器的两极板间，则电容器的电压将 ( )，电场能量将 ( )。(填增大，减小或不变)



11. 两个平行板电容器的电容之比  $C_1:C_2 = 3:1$  为，把它们串联起来接电源充电，则它们的电场能量之比  $W_1:W_2 =$  ( )。

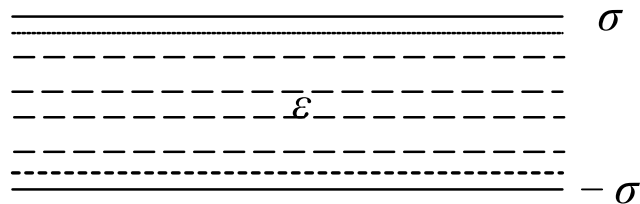
12. 电容为  $C_0$  的平板电容器，接在电路中，如图所示。若将相对介电常数为  $\epsilon_r$  的各向同性均匀电介质插入电容器中 (填满空间)，此时电容器的电容为原来的 ( ) 倍，电场能量是原来的 ( ) 倍。



13. 一平行板电容器，充电后与电源断开，当用绝缘手柄将电容器两极板间距离拉大，则两极板间的电势差 $U_{12}$ ，电场强度的大小 $E$ ，电场能量 $W$ 将发生如下变化：（ ）。

- A.  $U_{12}$  减小， $E$  减小， $W$  减小
- B.  $U_{12}$  增大， $E$  增大， $W$  增大
- C.  $U_{12}$  增大， $E$  不变， $W$  增大
- D.  $U_{12}$  减小， $E$  不变， $W$  不变

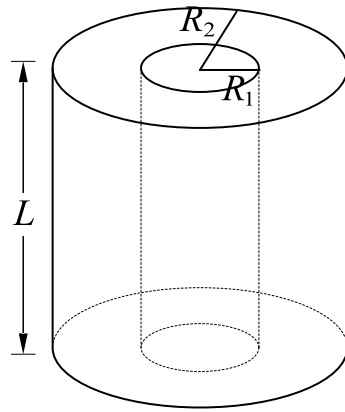
14. 一平行板电容器两极板间充满了介电常数为 $\epsilon$ 的均匀介质，已知两极板上电荷量的面密度分别为 $\sigma$ 和 $-\sigma$ ，如图所示。略去边缘效应，试求介质中的电位移 $\vec{D}$ 和电场强度 $\vec{E}$ ，极化强度 $\vec{P}$ 和极化电荷面密度 $\sigma$ 。



15. 一电容器由两个同轴长直金属圆筒构成，内外筒半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ ，长为 $L$ ，且 $L \gg R_2$ ，内外筒带有等量异号电荷，其电量分别为 $\pm Q$ 。

- (1) 两圆筒间的电场分布；
- (2) 两圆筒之间的电势差；
- (3) 柱形电容器的电容；
- (4) 电容器贮存的电场能量。





16. 将一平行板电容器充电后切断电源，用相对介电常数为的各向同性均匀电介质充满其内，下列有关说法是否正确？如有错误请改正。

- (1) 极板上的电荷保持不变；
- (2) 介质中的场强是原来的  $\frac{1}{\epsilon_r}$  倍；
- (3) 介质中的电场能量是原来的  $\frac{1}{\epsilon_r^2}$  倍。

17. 常用的圆柱形电容器，是由半径为  $R_1$  的长直圆柱导体和同轴的半径为  $R_2$  的薄导体圆筒组成，并在直导体与导体圆筒之间充以相对电容率为  $\epsilon_r$  的电介质，设直导体和圆筒单位长度上的电荷分别为  $+\lambda$  和  $-\lambda$ 。求 (1) 电介质中的电场强度和电位移；(2) 电介质内、外表面的极化电荷面密度。





## 课时十三 稳恒磁场基本定理

知识点	重要程度	题型
1. 恒定电流	★★	选填
2. 磁感应强度	★★★	选填、简答
3. 毕奥-萨伐尔定律	★★★★★	选填、简答、计算
4. 稳恒磁场的高斯定理与安培环路定理	★★★★★	选填、简答、计算

### 1. 恒定电流

#### 1) 电流 电流密度

##### (1) 电流

电流是电荷作定向运动形成的。电荷的携带者叫载流子，这些载流子形成的电流叫做传导电流。

电流的强弱用电流（电流强度）这一物理量来描述，用符号 $I$ 表示。电流定义为在单位时间内通过导体截面的电荷量

$$I = \frac{dq}{dt}$$

单位：安培（ $A$ ）。方向：正电荷运动方向，电流是有方向的标量。

恒定电流：电流的大小和方向不随时间变化。

##### (2) 电流密度

电流密度是矢量，用符号 $\vec{j}$ 表示。电流密度矢量的方向与该点正电荷运动的方向一致，大小等于通过垂直于电流方向的单位面积的电流，记作

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS} \vec{e}_n$$

单位： $A/m^2$ ，方向与该点正电荷运动方向（截面法向）一致。电流密度是空间位置的矢量函数，它能精确地描述导体中电流分布的情况。

#### 2) 电源电动势

电动势：电源把单位正电荷经内电路从负极移到正极的过程中，非静电力所作的功。定义式：

配套课程 习题答案



$$\varepsilon = \frac{dW}{dq}$$

单位： $J/C$ ，即 $V$ 。反映电源作功能力，与外电路无关。是有方向标量，规定其方向为电源内部指向正极。

非静电力对应非静电场 $\vec{E}_k$ 。非静电场场强沿整个闭合回路的环流等于电源电动势

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_k d\vec{l}$$

“非静电性场的场强”沿整个闭合电路的环流不等于零，而等于电源的电动势。这是非静电性场的场强与静电场的区别，后者的电场强度环流为零。

### 3) 欧姆定律

(1) 一段含源电路的欧姆定律

$$I = \frac{V_2 - V_1}{R}, \quad R = \rho \frac{l}{S}$$

式中， $\rho$ 为电阻率，单位为 $\Omega \cdot m$ ； $\gamma$  ( $\gamma = \frac{1}{\rho}$ )为电导率，单位为 $S/m$ 。

闭合电路欧姆定律的一般形式：

$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{\sum R_j + \sum R_{ij}}$$

一段含源电路的欧姆定律：

$$V_A - V_B = \sum IR + \sum IR_i - \sum \varepsilon$$

右边各项选取正负号的规则：先任意设定电路顺序方向，若电阻中的电流流向与设定电路顺序方向相同，则该电阻上的电势降取“+”号，反之则取“-”号；若电动势的指向和设定的顺序方向相同，该电动势 $\varepsilon$ 取“+”号，反之则取“-”号。

**题 1. 电源的电动势为 $4.5V$ ，内阻为 $0.5\Omega$ ，外电路的电阻为 $4.0\Omega$ ，路端电压是多大？如果在外电路上再并联一个 $6.0\Omega$ 的电阻，路端电压变为多大？**

配套课程 习题答案



$$\text{解: } I_1 = \frac{E}{R+r} = \frac{4.5}{4.5} = 1A,$$

$$U = IR = 4V;$$

$$R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2.4\Omega,$$

$$I_2 = \frac{E}{R_2 + r} = \frac{4.5}{2.9} = \frac{45}{29} A,$$

$$U_2 = I_2 R_2 = 3.72V。$$

(2) 欧姆定律的微分形式

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

## 2. 磁感应强度

### 1) 基本磁现象

电荷(不论静止或运动)在其周围空间激发电场, 而运动电荷在周围空间还要激发磁场。电流或运动电荷之间相互作用的磁力是通过磁场而作用的, 故磁力也称为磁场力。

电流(运动电荷)  $\iff$  磁场  $\iff$  电流(运动电荷)

### 2) 磁感应强度

由正电荷所受力的方向出发, 按右手螺旋法则, 沿小于 $\pi$ 的角度转向正电荷运动速度 $v$ 的方向, 这时螺旋前进的方向便是该点 $B$ 的方向。其大小为:

$$B = \frac{F_m}{qv}$$

方向:  $\vec{F}_m \times \vec{v}$  的方向;

单位:  $N/(A \cdot m)$ , 称为特斯拉 ( $T$ ); 高斯 ( $Gs$ )。换算:  $1T = 10^4 Gs$ 。

配套课程 习题答案



### 3) 磁感应线和磁通量

#### (1) 磁感应线

为形象描述磁场分布情况，用一些假想的有方向的闭合曲线——磁感应线代表磁场的强弱和方向。

每一条磁感应线都是和闭合电流相互套链的无头无尾的闭合线，而且磁感应线的环绕方向和电流流向形成右手螺旋的关系。

规定通过磁场中某点处垂直于  $B$  矢量的单位面积的磁感应线数就等于该点  $B$  矢量的量值。因此，磁场较强的地方，磁感应线较密；反之，磁感应线就较疏。同时，磁感应线上任一点的切线方向与该点处的磁场方向一致。

#### (2) 磁通量 $\Phi$ ：穿过磁场中任一给定曲面的磁感线总数。

对于表面上的非均匀磁场，一般采用微元分割法求其磁通量；对所取微元，磁通量通量：

$$d\Phi = BdS\cos\theta = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

对于整个曲面，磁通量：

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

单位：韦伯 ( $Wb$ )：

$$B = \frac{d\Phi}{dS}$$

即磁场中某处磁感应强度  $B$  的大小就是该处的磁通量密度，所以磁感应强度也称作磁通量密度。方向为面的法向分量。

题 1. 如图所示，在磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场中作一半径为  $r$  的半球面  $S$ ， $S$  边线所在平面的法线方向单位矢量  $\vec{n}$  与  $\vec{B}$  的夹角为  $\alpha$ ，则通过半球面  $S$  的磁通量（取弯面向外为正）为（ ）。

A.  $\pi r^2 B$

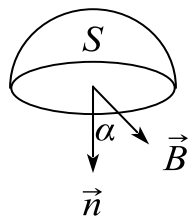
B.  $2\pi r^2 B$

配套课程 习题答案



C.  $-\pi r^2 B \cos \alpha$

D.  $-\pi r^2 B \sin \alpha$



答案：C

解析：根据  $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$ ，把曲面投影在磁场方向即可得出。

### 3. 毕奥-萨伐尔定律

#### 1) 毕奥-萨伐尔定律

电流元在空间任一点  $P$  处所激发的磁感应强度的大小与  $Idl$  成正比，与到电流元的距离平方成反比，与电流元和矢径夹角的正弦成正比：

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

其中  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ ，称为真空中的磁导率。 $\vec{e}_r$  是电流元指向场点的单位矢量。

磁感应强度  $B$  叠加原理：

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

题 1. 真空中有一根半径为  $R$  的半圆形细导线，流过的电流为  $I$ ，则圆心处的磁感应强度为（ ）。

A.  $\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$

B.  $\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

C.  $\frac{\mu_0 I}{4R}$

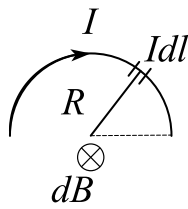
D. 0

答案：C

配套课程 习题答案



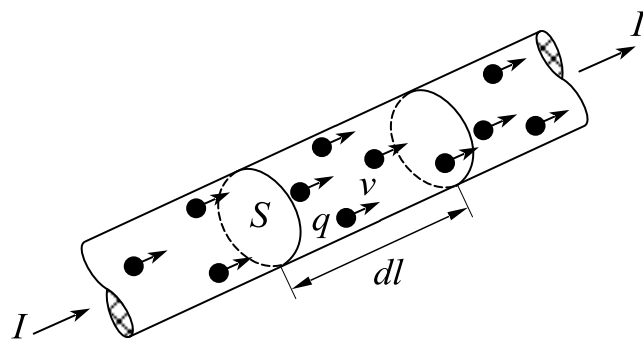
解析：各电流元在圆心处产生的磁感应强度方向相同，运用毕萨定律。



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{R^2},$$

$$\begin{aligned} \therefore B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{\pi R} dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{4R} \end{aligned}$$

## 2) 电荷的磁场



电流元中的运动电荷

设电流元  $I d\vec{l}$ ，横截面积  $S$ ，单位体积内有  $n$  个定向运动的正电荷，每个电荷电量为  $q$ ，速度为  $v$ 。单位时间内通过横截面  $S$  的电量即为电流强度  $I$ ：

$$I = qnvS$$

每个带电量为  $q$  的粒子以速度  $\vec{v}$  通过电流元所位置时，在  $P$  点产生的磁感应强度为：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

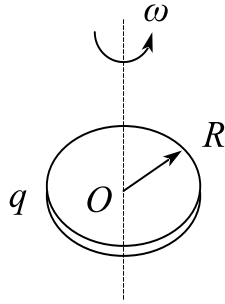
其方向根据右手螺旋法则， $\vec{B}$  垂直  $\vec{v}$ 、 $\vec{r}$  组成的平面。 $q$  为正， $\vec{B}$  为  $\vec{v} \times \vec{r}$  的

配套课程 习题答案



方向； $q$ 为负， $\vec{B}$ 与 $\vec{v} \times \vec{r}$ 的方向相反。

题 4. 一个塑料带电圆盘，半径为 $R$ ，电荷 $q$ 均匀分布于表面，圆盘绕通过圆心垂直于直盘面的轴转动，角速度为 $\omega$ 。试求圆盘中心处的磁感应强度大小。



解：可以将运动的圆盘看成无数个半径为 $r$ 的圆电流，圆电流上每一个电流元在圆心处产生的磁感应强度相同，因此将这样的圆电流看成电流元。

$$dB_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{dq \cdot \omega r}{r^2},$$

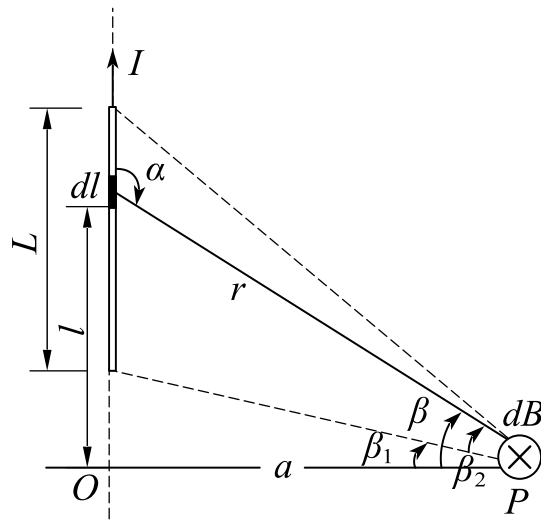
$$dq = \frac{q}{\pi R^2} \cdot 2\pi r dr,$$

$$\therefore B = \int dB_r = \int_0^R \frac{2\mu_0 q \omega}{4\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 q \omega}{2\pi R}.$$

### 3) 毕奥—萨伐尔定律的应用

#### (1) 载流长直导线的磁场





载流长直导线附近磁场的计算

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin\beta_2 - \sin\beta_1)$$

导线无限长

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

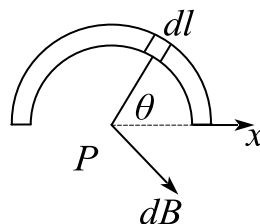
导线半无限长，场点与一端的连线垂直于导线

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

$P$  点位于导线延长线上， $B = 0$ 。

**题 2. 在半径为  $R$  的“无限长”半圆柱形金属薄片，有电流  $I$  自下而上通过。试求圆柱轴线上一点  $P$  处的磁感应强度。**

解：将每一小段无限长的直电流看成电流元。



由对称性， $P$  点磁感应强度方向向右。

配套课程 习题答案





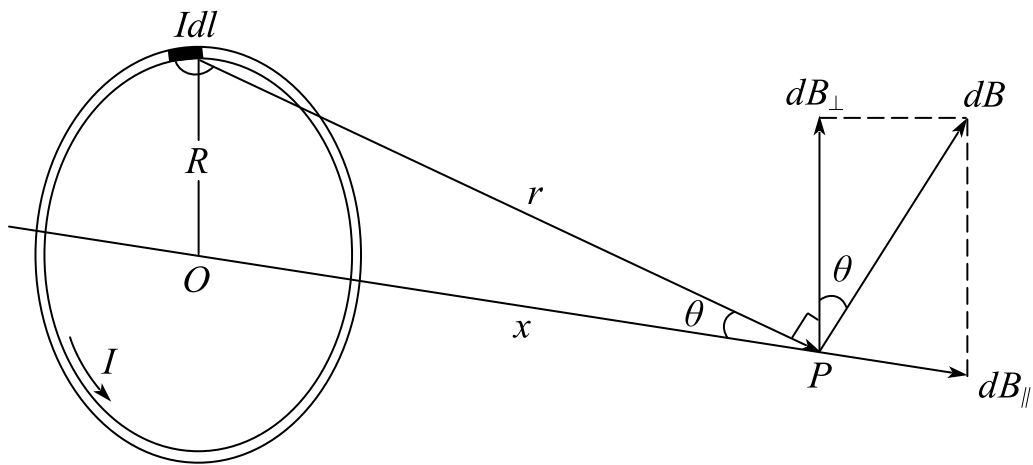
由无限长导线结论： $dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R}$ ，

$$dI = \frac{dl}{\pi R} I, \quad dl = R d\theta,$$

$$\therefore dB_x = dB \sin\theta,$$

$$\therefore B = \int dB_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \int \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}.$$

## (2) 载流圆线圈轴线上的磁场



### 圆电流轴线上磁场的计算

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

在圆心处

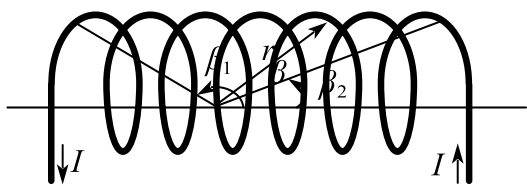
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

在远离线圈处

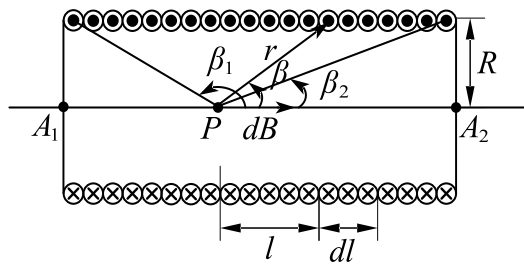
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{r^3}$$

## (3) 载流直螺线管内部的磁场





(a) 载流直螺线管



(b) 直螺线管轴上各点磁感应强度的计算用图

载流直螺线管内部的磁场计算

螺线管的半径为  $R$ ，电流为  $I$ ，每单位长度有线圈  $n$  匝。螺线管内轴线上  $P$  点的电磁感应强度。

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

螺线管无限长

$$B = \mu_0 n I$$

半无限长螺线管的端点圆心处

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}$$

#### 4. 稳恒磁场的高斯定理与安培环路定理

##### 1) 稳恒磁场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

穿过任意闭合曲面  $S$  的总磁通必然为零，这是稳恒磁场的高斯定理。

激发静电场的场源(电荷)是电场线的源头或结尾，所以静电场是属于发散式的场，可称作有源场；而磁场的磁感线无头无尾，恒是闭所以磁场可称作无源场。

在静电场中，由于自然界有单独存在的正、负电荷，因此通过一闭合曲面的

配套课程 习题答案



电通量可以不为零，这反映了静电场是有源场。而在磁场中磁力线的连续性表明，像正、负电荷那样的磁单极子是不存在的，磁场是无源场。

## 2) 安培环路定理

在磁场中，沿任何闭合曲线 $\vec{B}$ 矢量的线积分等于真空的磁导率乘以穿过以该闭合曲线为边界所张任意曲面的各恒定电流的代数和，即

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \Sigma I$$

注意：

任意形状稳恒电流，安培环路定理都成立。环流虽然仅与所围电流有关，但磁场却是所有电流在空间产生磁场的叠加。安培环路定理仅仅适用于恒定电流产生的恒定磁场，恒定电流本身总是闭合的，因此安培环路定理仅仅适用于闭合的载流导线。

静电场的高斯定理说明静电场为有源场，环路定理又说明静电场无旋；稳恒磁场的环路定反映稳恒磁场有旋，高斯定理又反映稳恒磁场无源。

## 3) 安培环路定理的应用

应用安培环路定理的解题步骤：

- (1) 分析磁场的对称性；
- (2) 过场点选择适当的路径；
- (3) 求出环路积分；
- (4) 用右手螺旋定则确定所选定的回路包围电流的正负。

**题 1. 利用安培环路定理求真空中无限长载流直导线周围的磁场分布？（无限长直导线通有电流 $I$ ）**



配套课程 习题答案



解：选取和导线同轴的圆环作为回路。

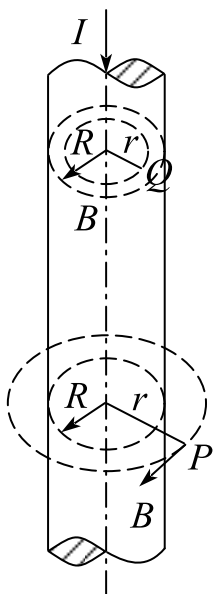
$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I,$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = B \cdot 2\pi r,$$

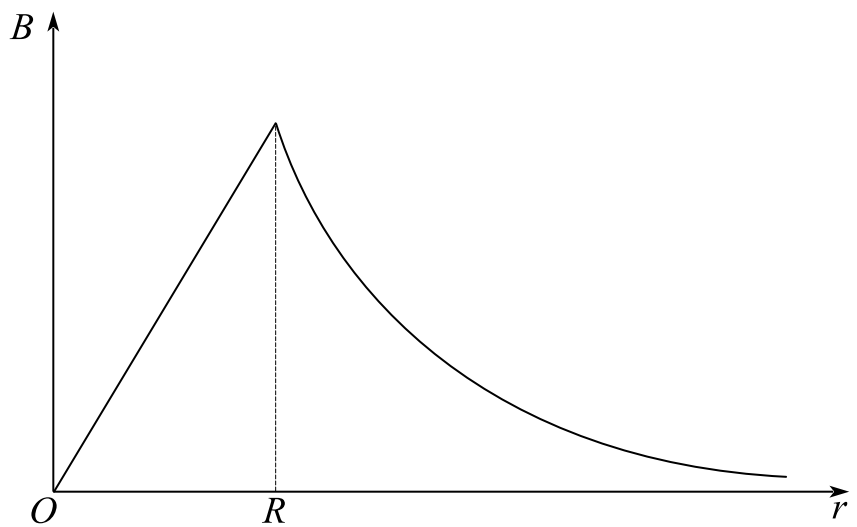
$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

俯视方向逆时针。

长直圆柱形载流导线内外的磁场



(a)



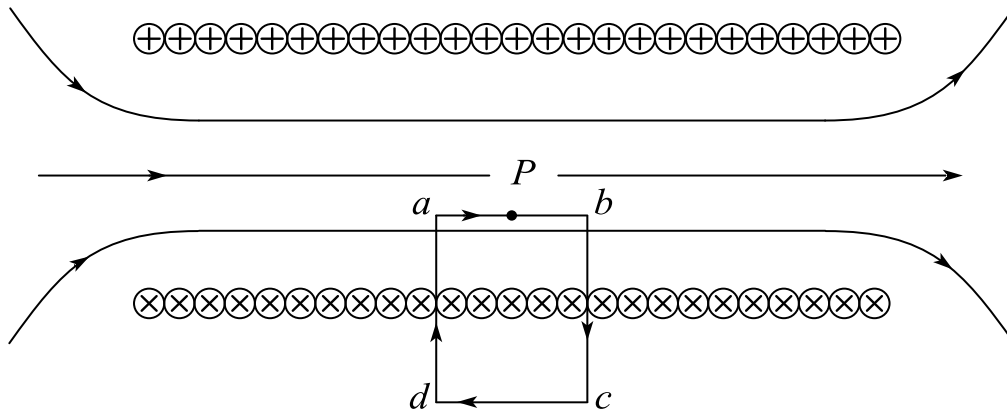
(b)

圆柱形电流的磁场的计算

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (r > R) , \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} (r < R)$$

载流长直螺线管内的磁场

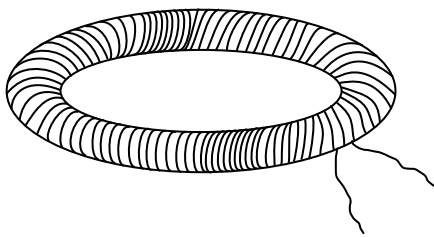




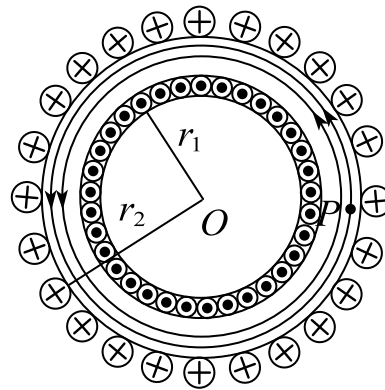
长螺线管内磁场的计算

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI$$

载流螺绕环内的磁场



(a) 螺绕环



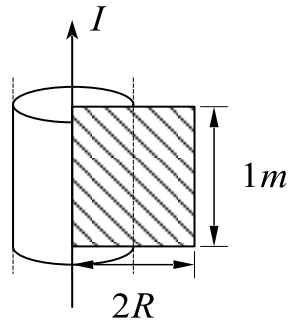
(b) 螺绕环内磁场的计算

载流螺绕环内磁场的计算

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \mu_0 nI$$

题 5. 一无限长圆柱形铜导体 (磁导率为  $\mu_0$ )，半径为  $R$ ，通有均匀分布的电流  $I$ ，今取一矩形平面  $S$  (长为  $1m$ ，宽为  $2R$ )，位置如右图所示，求通过该矩形平面的磁通量。





解：先通过安培环路定理求磁场分布，显然可以选取同轴圆作为回路，再求磁通量。

由安培环路定理：

$$r > R: \oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I,$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \text{ 俯视为逆时针。}$$

$$0 < r \leq R: \oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I,$$

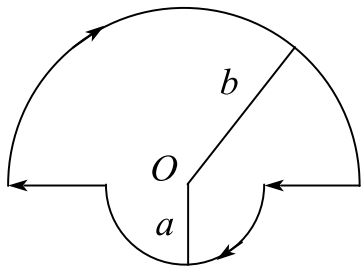
$$\therefore B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2},$$

$$\begin{aligned} \therefore \Phi &= \iint \vec{B} d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \int_0^R r dr + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_R^{2R} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln 2 \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} (1 + 2 \ln 2). \end{aligned}$$



## 课时十三 练习题

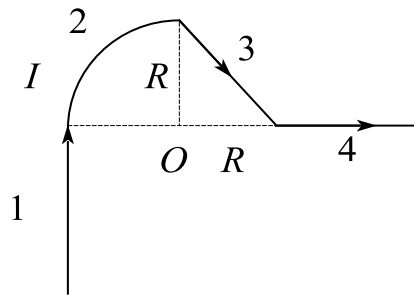
1. 电源的电动势大小等于 ( )。
  - A. 电源把单位正电荷从负极经内电路移到正极时所做的功
  - B. 电源把单位负电荷从负极经内电路移到正极时所做的功
  - C. 电源把单位负电荷从负极经外电路移到正极时所做的功
  - D. 电源把单位正电荷从负极经外电路移到正极时所做的功
  
2. 穿过某个面上的电场线的根数，称为该面上的 ( )。
  - A. 电通量
  - B. 电场强度
  - C. 电势
  - D. 电动势
  
3. 关于地磁场，下列说法正确的是 ( )。
  - A. 地理的南、北极即地磁场的南北极
  - B. 地磁场的磁感线是不闭合的
  - C. 赤道上的小磁针静止时  $N$  极指向地理南极
  - D. 赤道上的小磁针静止时  $N$  极指向地理北极
  
4. 磁力线总是闭合的曲线。 ( )
  
5. 在如图所示的回路中，两共面半圆的半径分别为  $a$  和  $b$ ，且有公共圆心  $O$ ，当回路中通有电流  $I$  时，圆心  $O$  处的磁感强度：方向\_\_\_\_\_，大小为\_\_\_\_\_。



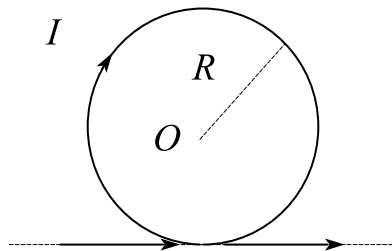
6. 一无限长导线弯成如图形状，设各线段都在同一平面内（纸面内），其中第二段是半径为  $R$  的四分之一圆弧，其余为直线，导线中通有电流  $I$ ，求图中  $O$  点处的磁感应强度的大小、方向。

配套课程 习题答案





7. 无限长载流直导线通以电流  $I$ ，弯成如图所示的形状，则圆心  $O$  点的磁感应强度方向为\_\_\_\_\_，大小为  $B =$ \_\_\_\_\_。



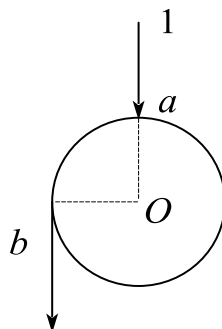
8. 在真空中，电流曲线1沿半径方向经  $a$  点流入一由电阻均匀的导线构成的圆环，再由  $b$  点流出，经沿切线方向的长直导线2返回电源（如图所示）。已知直导线上的电流强度为  $I$ ，圆环半径为  $R$ ， $\angle aOb = 90^\circ$ ，则圆心  $O$  点处的磁感应强度的大小为（ ）。

A.  $\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

B.  $\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$

C.  $\frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{3\mu_0 I}{4R}$

D.  $\frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R}$



9. 如图，六根无限长导线互相绝缘，通过电流均为  $I$ ，区域 I、II、III、IV 均为相等的正方形，哪一个区域指向纸面内的磁通量最大？（ ）

A. 区域 I

B. 区域 II

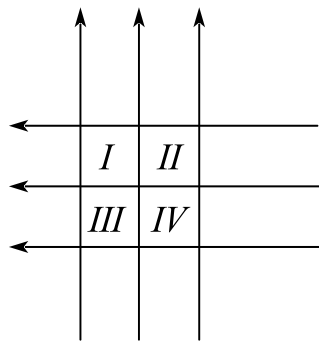
配套课程 习题答案





C. 区域III

D. 区域IV



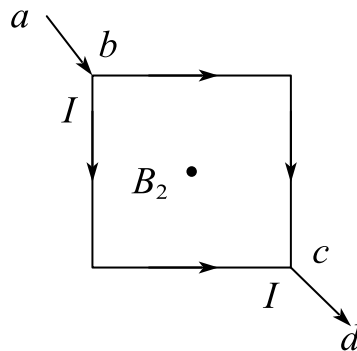
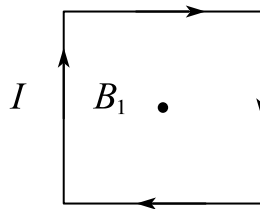
10. 边长为 $l$ 的正方形线圈，分别用图示两种方式通以电流 $I$ （其中 $ab$ 、 $cd$ 与正方形共面），在这两种情况下，线圈在其中心产生的磁感应强度的大小分别是多少？（ ）

A.  $B_1 = 0$  ,  $B_2 = 0$

B.  $B_1 = 0$  ,  $B_2 = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$

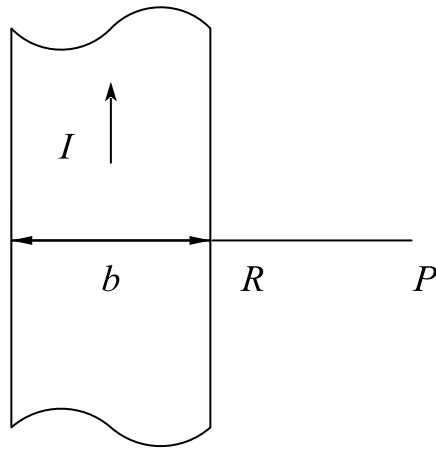
C.  $B_1 = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$  ,  $B_2 = 0$

D.  $B_1 = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$  ,  $B_2 = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$



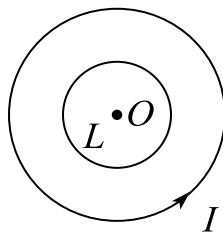
11. 如图，一个宽为 $b$ 的薄金属板，其电流为 $I$ ，且在金属表面均匀分布，试求在薄板所在平面上，金属板右侧 $P$ 点的磁感应强度，其中 $P$ 点到金属板右侧的垂直距离为 $R$ 。





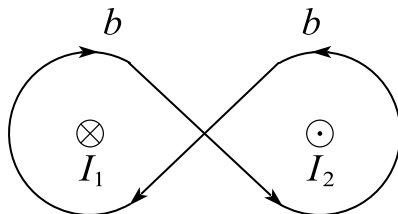
12. 如图，在一圆形电流  $I$  所在的平面内，选取一个同心圆闭合回路  $L$ ，则由安培环路定理可知 ( )。

- A.  $\oint_L \vec{B}d\vec{l} = 0$ ，且环路上任意一点  $B = 0$
- B.  $\oint_L \vec{B}d\vec{l} = 0$ ，且环路上任意一点  $B \neq 0$
- C.  $\oint_L \vec{B}d\vec{l} \neq 0$ ，且环路上任意一点  $B \neq 0$
- D.  $\oint_L \vec{B}d\vec{l} \neq 0$ ，且环路上任意一点  $B = \text{常量}$



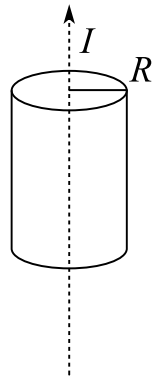
13. 如图所示，两导线的电流  $I_1$  和  $I_2$  均为  $3A$ ，对于环路  $b$ ，积分  $\oint_b \vec{B}d\vec{l}$  为 ( )。

- A. 0
- B.  $3\mu_0 I$
- C.  $6\mu_0 I$
- D.  $9\mu_0 I$



14. 设载流导体为一无限长直圆柱形导体，半径为  $R$ ，电流  $I$  均匀分布在导体的横截面上，如图所示，求圆柱体内外磁场分布。

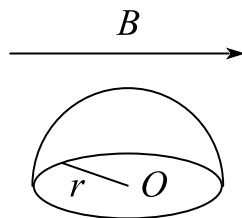




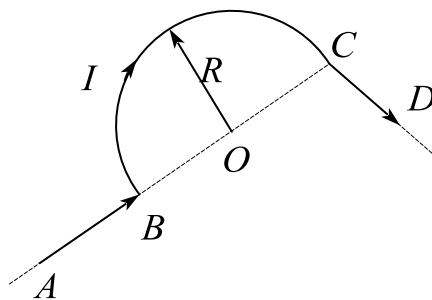
15. 一根粗细均匀的电阻线，电阻是 $48\Omega$ ，把它截成相等的 $N$ 段，再绞合在一起后测得其总电阻为 $3\Omega$ ，则 $N$ 等于（ ）。

- A. 3                      B. 4                      C. 8                      D. 16

16. 如图所示，一个半径为 $r$ 的半球面放在均匀磁场中，则通过半球面的磁通量为\_\_\_\_\_。



17. 如图所示，真空中有一无限长导线 $ABCD$ ，通过电流 $I$ ， $BC$ 段被弯成半径为 $R$ 的半圆环， $CD$ 段垂直于半圆环所在的平面， $AB$ 的延长线通过圆心 $O$ 和 $C$ 点，试求圆心 $O$ 处的磁感应强度的大小和方向。



18. 于边长为 $2a$ 的正方形的四个角顶，每条导线的电流方向如图所示，则正方形中心 $O$ 点的磁感应强度大小为（ ）。

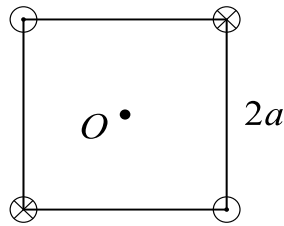
- A.  $\frac{2\mu_0 I}{a\pi}$                       B. 0

配套课程 习题答案



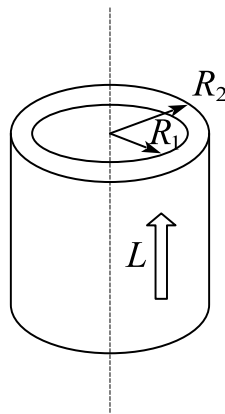
C.  $\frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{2a\pi}$

D.  $\frac{\mu_0 I}{a\pi}$

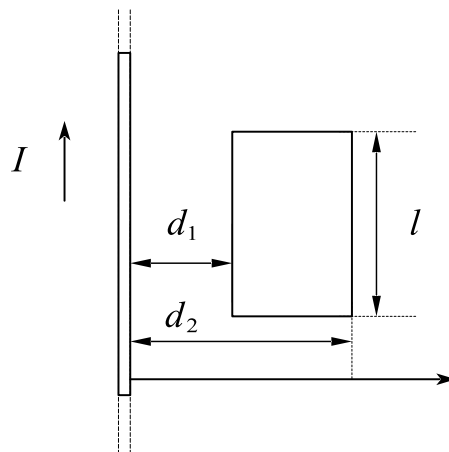


19. 有一长直流导体圆管，其内、外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ，其中通有电流  $I$ ，且均匀分布在横截面上，试计算下列各区域中磁感强度大小  $B$  的分布。

- (1)  $r < R_1$ ;
- (2)  $R_1 < r < R_2$ ;
- (3)  $r > R_2$ 。

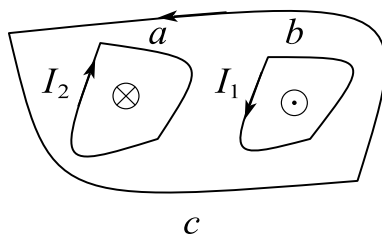


20. 如图，“无限长”直载流导线的电流为  $I$ ，有一矩形线圈与导线共面，线圈长为  $l$ ，线圈左侧与导线相距为  $d_1$ ，右边与导线相距  $d_2$ ，求通过矩形线圈的磁通量。



21. 设图中两导线中的电流  $I_1$ 、 $I_2$  均为  $8A$ ，对在它们的磁场中的三条闭合曲线  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，分别回答：

- (1) 安培环路定理等式右边电流的代数和；
- (2) 各条闭合曲线上，各点的磁感强度  $B$  的量值是否相等？
- (3) 在闭合曲线  $c$  上各点的  $B$  值是否为零？为什么？



## 课时十四 载流子在磁场中的受力

考点	重要程度	题型
1. 带电粒子在电场和磁场中的运动	★★★★	选填、计算
2. 磁场对截流导线的作用	★★★★	选填、计算

### 1. 带电粒子在电场和磁场中的运动

#### 1) 洛伦兹力

一般情况下，如果带电粒子 $q$ 在磁场中以速度 $\vec{v}$ 运动时，磁场对运动电荷产生力的作用，此磁场力叫洛伦兹力。

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

方向：正电荷 $\vec{v} \times \vec{B}$ 的方向，负电荷 $-\vec{v} \times \vec{B}$ 的方向；大小为

$$F = qvB \sin\theta$$

式中， $\theta$ 为 $\vec{v}$ 和 $\vec{B}$ 的夹角

#### (1) 带电粒子在匀强磁场中的运动

设有一均匀磁场，磁感应强度为 $\vec{B}$ ，一电荷量为 $q$ 质量为 $m$ 的粒子，以初速 $\vec{v}_0$ 进入磁场中。

如果 $\vec{v}_0$ 与 $\vec{B}$ 相互平行，作用于带电粒子的洛伦兹力等于零，进入磁场后仍作匀速直线运动。

如果 $\vec{v}_0$ 与 $\vec{B}$ 垂直，带电粒子将作匀速圆周运动，而洛伦兹力起着向心力的作用，因此

$$qv_0B = m \frac{v_0^2}{R}$$

带电粒子作圆周运动的轨道半径为

$$R = \frac{mv_0}{qB}$$

带电粒子绕圆形轨道一周所需的时间（周期）是

配套课程 习题答案

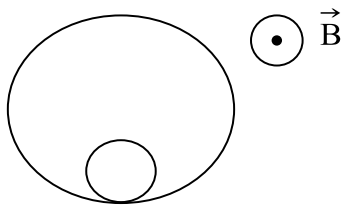


$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi m}{qB}$$

带电粒子作匀速圆周运动的角频率是

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}$$

题 1. 一匀强磁场，其磁感强度方向垂直于纸面（指向如图），两带电粒子在该磁场中的运动轨迹如图所示，则（ ）



- A. 两粒子的电荷必然同号。
- B. 粒子的电荷可以同号也可以异号。
- C. 两粒子的动量大小必然不同。
- D. 两粒子的运动周期必然不同。

答案：B

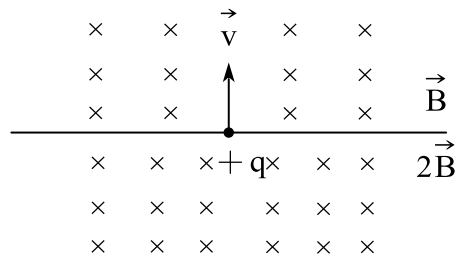
解析：A，B 轨迹运动方向不清楚，无法确定两粒子的具体符号，因此可以同号也可以异号；C 只能判断出来两轨迹的半径不同，影响半径的因素有动量和电荷量，动量相等，电荷量不相等也可能半径不同，因此动量可能相等；D 运动周期和粒子的荷质比（电荷质量比）相关，周期相同如果速度不同，也可能会导致轨迹半径不同，因此周期可能相同。

题 2. 一质量为  $m$  的带电粒子电量为  $+q$ ，由下图所示位置以速度  $\vec{v}$  进入磁场。已知上方磁感应强度为  $\vec{B}$ ，下方为  $2\vec{B}$ ，则带电粒子的运动周期为\_\_\_，并在图上画出带电粒子在一个完整周期内的运动轨迹。

（此题需写出必要的分析过程）

配套课程 习题答案





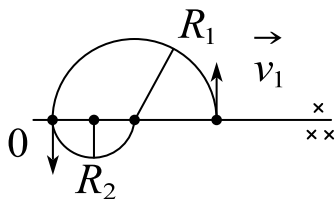
答案:  $T = \frac{3\pi m}{2qB}$

解析:  $qvB = m \frac{v^2}{R}$

上半部分:  $T_1 = \frac{2\pi R_1}{v} = \frac{2\pi m}{qB}, R_1 = \frac{mv}{qB}$

下半部分:  $T_2 = \frac{\pi m}{qB}, R_2 = \frac{mv}{2qB}$

$T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \frac{3\pi m}{2qB}$



如果  $\vec{v}_0$  与  $\vec{B}$  斜交成  $\theta$  角，带电粒子合运动的轨道是一螺旋线，即粒子作螺旋运动，螺旋线的半径以及周期是

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv_0 \sin \theta}{qB}, T = \frac{2\pi m}{qB}$$

螺距是

$$h = v_{\parallel} T = v_{\parallel} \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m v_0 \cos \theta}{qB}$$

螺距仅与平行于磁场方向的初速度有关。

(2) 带电粒子在非均匀磁场中运动

配套课程 习题答案





带电粒子在非均匀磁场中运动时，半径和螺距都将随磁场增大而减小，将作变半径的螺旋线运动；当粒子向磁场增强的方向运动时，粒子所受的磁场力，恒有一指向磁场较弱方向的分力，这个分力阻止带电粒子向磁场较强的方向运动。这样有可能使粒子沿磁场增强方向的速度逐渐减小到零，从而迫使粒子掉向反转运动。粒子的这种反转运动就好象光线遇到镜面的反射一样，所以这种装置称为磁镜。

## 2) 带电粒子在电磁场中的运动和应用

带有电荷量  $q$  的粒子在静电场  $\vec{E}$  和磁场  $\vec{B}$  的复合场中以速度  $\vec{v}$  运动时受到的作用力将是：

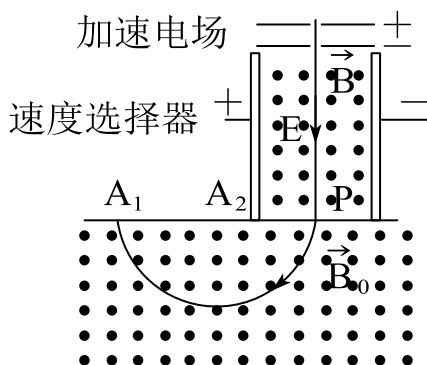
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

上式叫做洛伦兹关系式。

实例：磁聚焦、回旋加速器、质谱仪。

题 3. 如图所示为质谱仪原理图，若干不同的带电粒子，通过加速电场狭缝进入速度选择器，速度选择器中加有自左向右的匀强电场，其大小为  $E$ ，还加有垂直纸面向外的均匀磁场  $B$ 。速度选择器下方有另一均匀磁场  $B_0$ ，其方向也为垂直纸面向外。用  $R$  表示粒子旋转半径，证明能穿过速度选择器下方小孔打在  $R$  处粒子的荷质比为：

$$\frac{q}{m} = \frac{E}{RB_0}$$



解析：在加速电场中通过： $qE = qvB \Rightarrow v = \frac{E}{B}$

在磁场  $B_0$  中： $qvB_0 = m \frac{v^2}{R}$

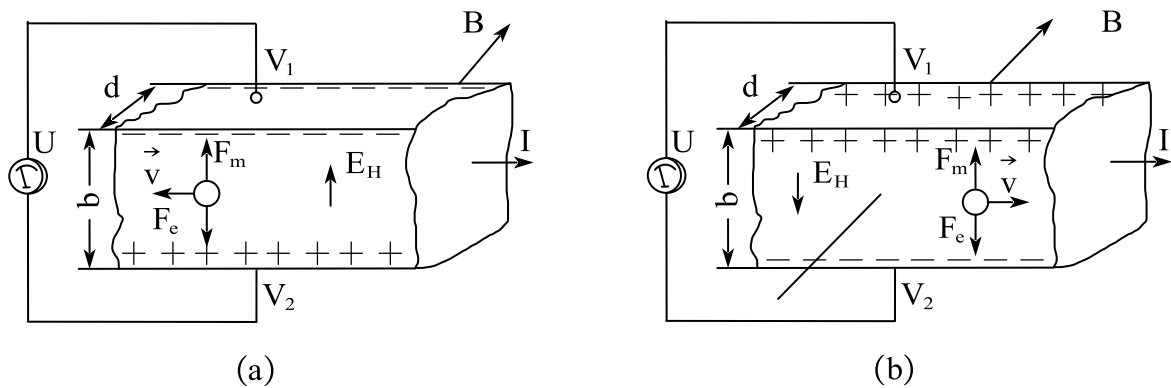
$$\therefore \frac{q}{m} = \frac{v}{B_0 R} = \frac{E}{B_0 R B}$$

### 3) 霍尔效应

在一个通有电流的导体板上，垂直于板面施力加一磁场，则平行磁场的两面出现一个电势差，称为霍尔效应。该电势差称为霍尔电势差。

$$U = V_2 - V_1 = R_H \frac{BI}{d}$$

$R_H$  称为霍尔系数，仅与材料有关。



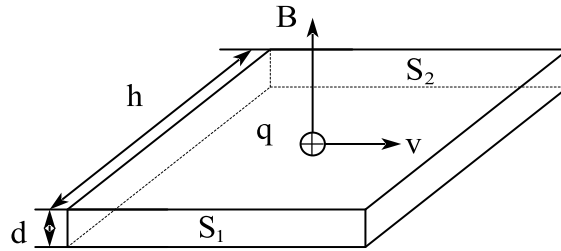
霍尔效应图

题 5. 一铜片厚度  $d = 2.0 \times 10^{-3} m$ ，放在  $B = 3.0 T$  的匀强磁场中，已知磁场方向与铜片表面垂直，铜的载流子密度  $n = 8.4 \times 10^{28} m^{-3}$ ，当铜片中通有与磁场方向垂直的电流  $I = 200 A$  时 ( $I = nqSv$ ， $q = 1.6 \times 10^{-19} c$ )，在铜片  $S_1$ 、 $S_2$  两侧面产生了一个电压  $U$ 。

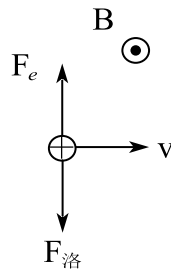
(1) 请问正电荷在铜片中受哪两个力的作用？画出受力方向；



- (2) 当铜片中电荷累积达到稳定时，请写出铜片中电场强度大小的表达式；  
 (3) 请计算铜片  $S_1$ 、 $S_2$  两侧面电压  $U$  的大小。



解析：(1)



受到电场力和洛伦兹力

$$(2) \quad qvB = qE$$

$$\therefore E = vB = \frac{IB}{nqS}$$

$$(3) \quad U = Eh = vBh$$

$$I = nqSv = nqdhv$$

$$\therefore U = \frac{IB}{nqd} = \frac{1}{44800} V$$

#### 4) 量子霍尔效应

量子霍尔效应是指霍尔电阻呈现出与外磁场的梯形函数关系，这些梯形关系的阻值与样品无关。

量子霍尔电阻：

$$R_H^* = \frac{h}{ie^2}, \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

配套课程 习题答案



## 2. 磁场对截流导线的作用

### 1) 安培定律

安培力：载流导线在磁场中受到的磁场力。 $d\vec{F}$ 的方向垂直于 $I d\vec{l}$ 与 $\vec{B}$ 所决定的平面

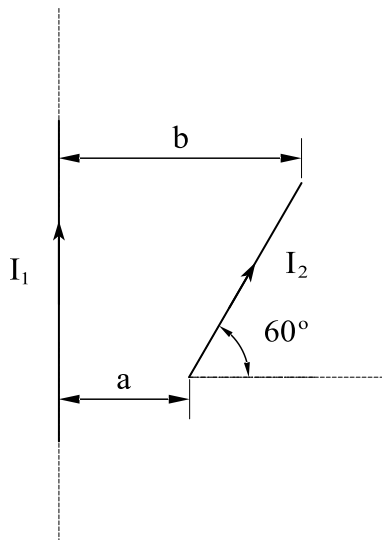
$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$d\vec{F}$ 方向判断：右手螺旋定则。上式称为安培定律。

一段任意形状载流导线受到的安培力等于各电流元所受安培力的矢量和

$$\vec{F} = \int_L d\vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B}$$

题 7. 无限长直线电流  $I_1$  和直线电流  $I_2$  共面，几何位置如何所示，求直线电流  $I_2$  受到电流  $I_1$  磁场的作用力。



解析：由安培环路定理  $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$

$dF = I_2 dl \cdot B$  方向垂直  $I_2$  向右

$$\therefore F = \int dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_a^b \frac{2dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \ln \frac{b}{a}$$

### 2) 磁场对载流线圈的作用

配套课程 习题答案



若一个线圈的各个部分都处在同一平面上，则称为平面线圈。在均匀磁场中，平面载流线圈所受的安培力的合力为零（各电流元都受到力，使整个线圈受到张力或压力），但所受的磁力矩不为零，即

$$M = F_2 l_1 \cos \theta = B I l_1 l_2 \cos \theta = B I S \cos \theta = B I S \sin \varphi$$

若线圈为  $N$  匝，则线圈所受力偶矩为

$$M = N B I S \sin \varphi$$

$m = N I S$  为线圈磁矩的大小，磁矩方向和电流流向成右手关系。力矩的方向为线圈磁矩与磁感应强度的矢量积；用矢量式表示磁场对线圈的力矩

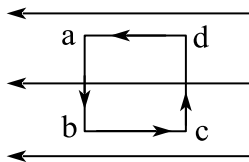
$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

上式不仅对矩形线圈成立，对于均匀磁场中的任意形状的平面线圈也成立。对于带电粒子在平面内沿闭合回路运动以及带电粒子自旋所具有的磁矩，在磁场中受到的力矩都适用。

当  $\varphi = \pi/2$ ，亦即线圈平面与磁场方向相互平行时，线圈所受到的磁力矩为最大，这一磁力矩有使  $\varphi$  减小的趋势。

当  $\varphi = 0$ ，亦即线圈平面与磁场方向垂直时，线圈磁矩  $\vec{m}$  的方向与磁场方向相同，线圈所受到的磁力矩为零，这是线圈稳定平衡的位置。

**题 9.** 如图，匀强磁场中有一矩形通电线圈，它的平面与磁场平行，在磁场作用下，线圈发生转动，其方向是（ ）。



- A.  $ab$  边转入纸内， $cd$  边转出纸外。
- B.  $ab$  边转入纸外， $cd$  边转出纸内。
- C.  $ad$  边转入纸内， $bc$  边转出纸外。
- D.  $ad$  边转入纸外， $bc$  边转出纸内。

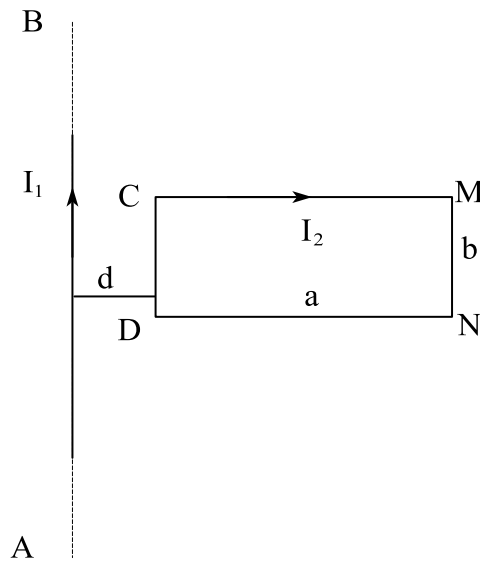


答案：A

解析：直接运用磁场对载流线圈的磁矩公式，判断磁矩方向为垂直纸面向外，力矩方向从下面看是逆时针，因此 $ab$ 边转入纸内， $cd$ 边转出纸外。

题 10. 如图所示，在长直导线  $AB$  内通以电流  $I_1$ ，在长为  $a$  宽为  $b$  的矩形线圈  $CDMN$  中通有电流  $I_2$ ， $AB$  与线圈共面， $CD$ 、 $MN$  都与  $AB$  平行且  $CD$  边与导线  $AB$  之间的距离为  $d$ 。求：

- (1) 导线  $AB$  的磁场对矩形线圈各边作用力；
- (2) 矩形线圈所受的合力及合力矩。



解析：(1) 由安培定理： $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$

$$CD: F = I_2 BL = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi d} \text{ 向左}$$

$$DN: F = \int I_2 B dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \ln \frac{a+d}{d} \text{ 向下}$$

$$MN: F = I_2 BL = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(a+d)} \text{ 向右}$$

$$CM: F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a+d}{d} \text{ 向上}$$

配套课程 习题答案



$$(2) F_{\text{合}} = F_{CD} - F_{MN} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 ab}{2\pi d(a+d)} \text{ 向左}$$

$$M = \vec{m} \times \vec{B} = 0$$

### 3) 电流单位“安培”的定义

两条平行的载流直导线  $AB$  和  $CD$  间距为  $a$ ，两者电流分别为  $I_1$  和  $I_2$ ，方向相同，间距远小于导线长，可将两导线视做无限长导线。载流导线  $CD$  所受的力方向指向  $AB$ 。载流导线  $CD$  单位长度所受的力为

$$\frac{dF_{21}}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

“安培”的定义：真空中相距  $1m$  的两个无限长而圆截面极小的平行直导线中载有相等的电流时，若每米长度导线上的相互作用力正好为  $2 \times 10^{-7} N$ ，则导线中的电流定义为  $1A$ 。

在国际单位制中，真空磁导率  $\mu_0$  是导出量。根据安培的定义，在上式中  $a = 1m$ ， $I_1 = I_2 = 1A$ ， $dF_{21}/dl = 2 \times 10^{-7} N$ ，从而可得

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N \cdot A^{-2} = 4\pi \times 10^{-7} \Omega \cdot s/m = 4\pi \times 10^{-7} H/m$$

其中  $\Omega \cdot s$  是自感  $L$  的单位，叫做亨利，用符号  $H$  表示。

### 4) 磁场力的功

#### (1) 载流导线在磁场中运动时磁力所作的功

磁力所作的功为：

$$W = I(\Phi_1 - \Phi_0) = I\Delta\Phi$$

上式说明当载流导线在磁场中运动时，如果电流保持不变，磁力所作的功等于电流乘以通过回路所环绕的面积内磁通量的增量，即磁力所作的功等于电流乘以载流导线在移动中所切割的磁感应线数。

#### (2) 载流线圈在磁场内转动时磁场力所作的功

配套课程 习题答案



一线圈在磁场中转动，其中电流保持不变。设线圈转过极小的角度  $d\varphi$ ，使  $\vec{e}_n$  与  $\vec{B}$  间的夹角从  $\varphi$  增为  $\varphi + d\varphi$ ，磁力矩  $M = BIS \sin\varphi$  所以磁力矩所作的功为：

$$W = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} Id\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi$$

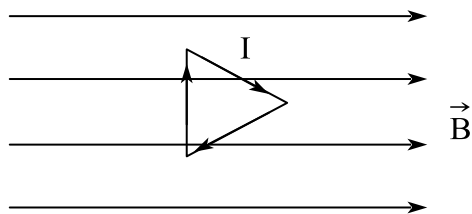
$\Phi_1$  与  $\Phi_2$  分别表示线圈在  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  时通过线圈的磁通量。

一个任意的闭合电流回路在磁场中改变位置或形状时，如果保持回路中电流不变，则磁场力或磁力矩所作的功都可按此公式计算

$$W = I\Delta\Phi$$

恒定磁场不是保守力场，磁力的功不等于磁场能的减少，而且，洛伦兹力是不做功的，磁场所作的功是消耗电源的能量来完成的。

题 11. 如图，边长为  $a$  的等边三角形，通过电流为  $I$ ，放在磁感应强度为  $B$  的匀强磁场中，磁场方向与线圈平行，当线圈在磁力矩作用下转过  $180$  度时，磁力矩所作的功为\_\_\_。



答案：0

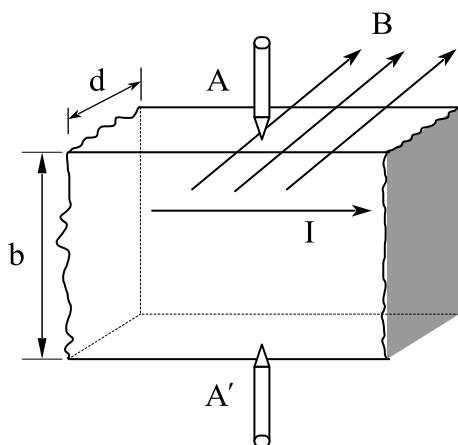
解析：直接运用做功公式，可以判断出  $\Delta\Phi = 0$ ，因此做功为0。





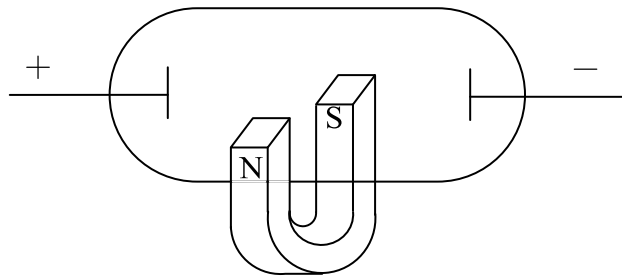
## 课时十四 练习题

- 两个带电粒子，以相同的速度垂直磁感线飞入匀强磁场，它们的质量之比是1:4，电荷之比是1:2，它们所受的磁场力之比是\_\_\_，运动轨迹半径之比是\_\_\_。
- 关于磁场中磁感应强度 $\vec{B}$ 的定义，下列说法中正确的是：（ ）
  - 磁场中某点磁感应强度的方向是运动的正电荷在该点受磁场力的方向。
  - 磁场中某点磁感应强度的大小是单位电荷在该点受磁场力的大小。
  - 磁场中某点磁感应强度的方向始终与运动电荷在该点受磁场力的方向垂直。
  - 磁场中某点磁感应强度定义为单位正电荷在该点所受的磁场力。
- 如图所示，将一导体板放在垂直于它的磁场中，当有电流通过它时，在导体板的A、A'两侧会产生一个电势差 $U_{AA'}$ ，这现象叫做（ ）。



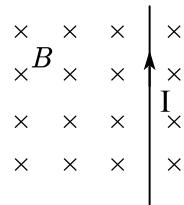
- 趋肤效应；      B. 光电效应；      C. 霍尔效应；      D. 电流的磁效应。
- 回旋加速器中，磁感应强度一定时，则被加速电子获得速度的决定因素是（ ）。
    - 加速电场的电压；                      B. 加速电场的变化周期；
    - D形盒半径；                              D. 和以上三种因素都有关
  - 在阴极射线管外，如图所示放置一个蹄形磁体，则阴极射线将（ ）。





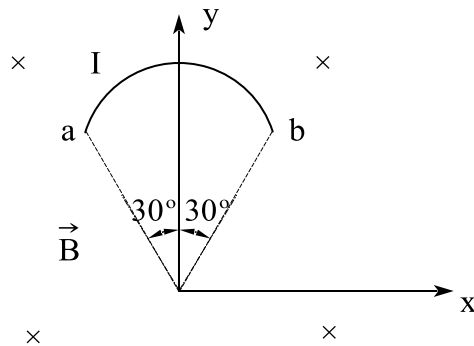
- A. 向下偏；    B. 向上偏；    C. 向纸外偏；    D. 向纸内偏。

6.右图中无限长直载流导线处在均匀磁场中，其所受磁场力方向为（ ）。



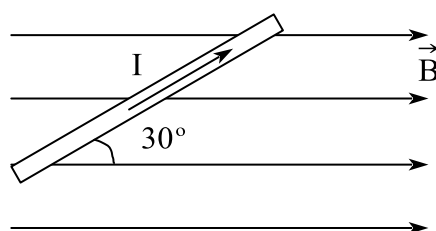
- A. 竖直向上；    B. 竖直向下；    C. 水平向左；    D. 水平向右。

7.如图，一根载流导线被弯成半径为  $R$  的  $1/6$  圆弧，放在磁感强度为  $B$  的均匀磁场中，设电流由  $a$  流向  $b$ ，则载流导线  $ab$  所受磁场的作用力的大小为（ ）



- A.  $\sqrt{2} IBR$ ；    B.  $IBR$ ；    C.  $\frac{\sqrt{2}}{2} IBR$ ；    D.  $2IBR$ 。

8.一根长为  $L$  的载流直导线位于大小为  $B$  的匀强磁场中，已知导线与磁场方向之间的夹角为  $30^\circ$ ，导线中的电流强度为  $I$ ，则导线受到安培力为（ ）。

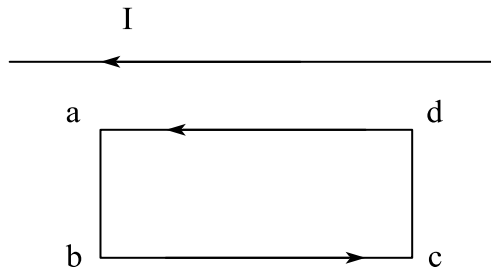


配套课程 习题答案



A.  $BIL$  ;    B.  $BIL/2$  ;    C.  $\sqrt{3}BIL/2$  ;    D. 0。

9. 在一固定的通电长直导线正下方有一矩形线框，线框与直导线在同一平面内，线框可以自由运动，如下图所示。当线框内通有逆时针方向的电流后，关于线框的运动情况，下面说法中正确的是（ ）

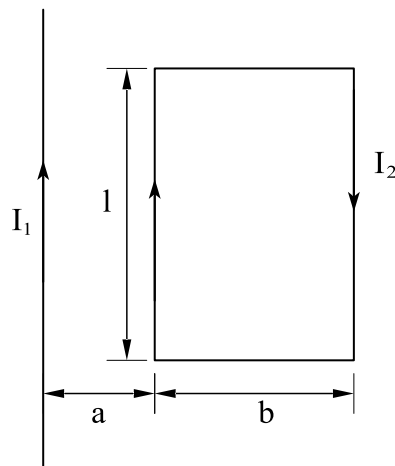


- A. 线框将远离通电直导线但不转动。
- B. 线框将靠近通电直导线但不转动。
- C.  $ab$  边向纸面外转动但不靠近直导线。
- D.  $ab$  边向纸面内转动但不靠近直导线。

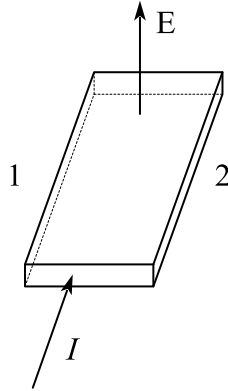
10. 真空中有一根无限长直导线载有电流  $I_1 = 20A$ ，一矩形回路载有电流  $I_2 = 10A$ ，二者共面，电流流向如图所示。已知  $a = 0.01m$ ， $b = 0.08m$ ， $l = 0.12m$ 。

求：

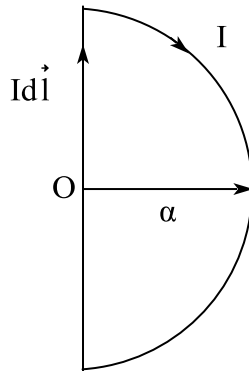
- (1) 作用在矩形回路上的合力；
- (2)  $I_2 = 0$  时，通过矩形面积的磁通量。（真空磁导率  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} T \cdot m \cdot A^{-1}$ ）



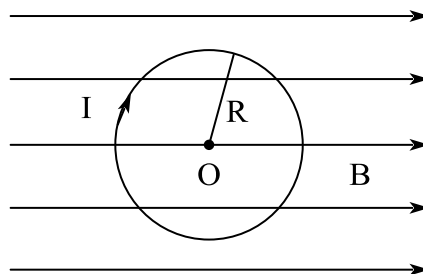
11. 用  $P$  型半导体薄片做霍尔效应实验，电流、磁场方向如图，此时可以判断出载流子收到向\_\_\_的磁场力（填“左”或“右”），并使运动的载流子向该方向偏转，样品的两侧会产生霍尔电势差，\_\_\_侧电势高（填“左”或“右”）。



12. 如图，真空中有一半圆形闭合线圈，半径为  $\alpha$ ，流过稳恒电流  $I$ ，则圆心  $O$  处的电流元  $I d\vec{l}$  所受的安培力  $d\vec{F}$  方向为\_\_\_，  $d\vec{F}$  大小为\_\_\_。



13. 如图，磁感应强度为  $B$  的匀强磁场中有一圆形单匝通电线圈，其半径为  $R$ ，电流为  $I$ ，它的平面与磁场平行，则此刻线圈受到的磁力矩大小为\_\_\_。



## 课时十五 有磁介质时的磁场

考点	重要程度	题型
1. 磁场中的磁介质	★★	选填、简答
2. 有磁介质时的安培环路定理-磁场强度	★★★★	选填、简答、计算
3. 铁磁质	★★	选填、简答

### 1. 磁场中的磁介质

#### 1) 磁介质

##### (1) 磁介质

如果磁场中有实物物质存在，则由于磁场和实物之间的相互作用，实物物质的分子状态发生变化，从而改变原来磁场的分布。

磁介质：在磁场作用下，其内部状态发生变化，并反过来影响磁场分布的物质。

磁化：磁介质在磁场作用下内部状态的变化称为磁化。

##### (2) 磁化后介质内部的磁场与附加磁场和外磁场的关系：

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

其中  $\vec{B}$  为介质内部的磁场， $\vec{B}_0$  为外磁场， $\vec{B}'$  为附加磁场。

##### (3) 磁性物质分类

顺磁质（锰、铬、铂、氧、氮等） $B > B_0$

抗磁质（铜、铋、硫、氢、银等） $B < B_0$

抗磁质和大多数的顺磁质的一个共同点是它们所激发的附加磁场极其微弱

铁磁质（铁、钴、镍等） $B \gg B_0$

题 1. 按照磁介质在磁场中产生的效果不同，可将磁介质分为\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_、和\_\_\_\_\_三大类，其中能大大的增强磁场的是\_\_\_\_\_。

答案：顺磁质；抗磁质；铁磁质；铁磁质



## 2) 分子电流和分子磁矩

### (1) 分子电流

把分子或原子看作一个整体，分子或原子中各个电子对外界所产生磁效应的总和，用一个等效的圆电流表示，即分子电流。

### (2) 分子磁矩

分子磁矩是指分子电流具有的磁矩，用符号  $m_{\text{分子}}$  表示。

### (3) 附加磁矩

不论电子原来的磁矩与磁场方向之间的夹角是何值，在外磁场  $\vec{B}_0$  中，电子角动量  $\vec{L}$  进动的转向总是和  $\vec{B}_0$  的方向构成右手螺旋关系。电子的进动相当于一个圆电流，这种等效圆电流的磁矩的方向永远与  $\vec{B}_0$  的方向相反。因电子进动而产生的磁效应可用附加磁矩表示。

附加磁矩是指因进动而产生的等效电流的磁矩，用  $\Delta m_{\text{分子}}$  表示。

## 3) 抗磁质的磁化

抗磁材料在外磁场的作用下，在磁体内激发一个和外磁场方向相反的附加磁场，即为抗磁性的起源，抗磁性是一切磁介质所共有的性质。

## 4) 顺磁质的磁化

顺磁材料在外磁场的作用下，在宏观上呈现出一个与外磁场同方向的附加磁场，即为顺磁性的来源。

## 2. 有磁介质时的安培环路定理 磁场强度

### 1) 磁化强度

#### (1) 磁化强度

单位体积内所有分子固有磁矩矢量和  $\Sigma \vec{m}_{\text{分子}}$  加上附加磁矩的矢量和  $\Sigma \Delta \vec{m}_{\text{分子}}$ ，称为磁化强度，用  $\vec{M}$  表示。反映磁介质磁化程度(大小与方向)的物理量。



$$\vec{M} = \frac{\Sigma \vec{m}_{\text{分子}} + \Sigma \Delta \vec{m}_{\text{分子}}}{\Delta V}$$

磁化强度的单位： $A/m$

## (2) 不同材料的磁化强度

对顺磁质  $\Sigma \Delta \vec{m}_{\text{分子}}$  可以忽略；

对抗磁质  $\Sigma \Delta \vec{m}_{\text{分子}} = 0$

对于真空， $\vec{M} = 0$

外磁场为零，磁化强度为零。

外磁场不为零：顺磁质  $\vec{M}$ 、 $\vec{B}_0$  同向，抗磁质  $\vec{M}$ 、 $\vec{B}_0$  反向。

## (3) 磁化电流

介质内部任一点总有两个方向相反的分子电流通过，各分子电流相互抵消，而在介质表面各分子电流相互叠加，在磁化圆柱的表面出现一层电流，好像一个载流螺线管，称为磁化面电流(或安培表面电流)。介质表面沿轴线方向单位长度上的磁化电流为  $\alpha_s$  (面磁化电流密度)

$$\therefore M = \frac{|\Sigma \vec{m}_{\text{分子}}|}{\Delta V} = \frac{\alpha_s S l}{S l} = \alpha_s$$

即磁介质表面某处的磁化面电流线密度的大小等于该处磁化强度的量值，上述结果是从均匀磁介质被均匀磁化的特例导出的，在一般情况下，应该是磁介质表面上磁化面电流线密度应等于该处磁化强度的切线分量。而且在不均匀磁介质内部，由于排列着的分子电流未能相互抵消，此时磁体内各点都有磁化电流。

磁化强度对闭合回路的线积分等于通过回路所包围的面积内的总磁化电流。

$$\oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{M} \cdot d\vec{l} = M \cdot \overline{AB} = M l = \alpha_s l = I_s$$

上式虽是从均匀磁化介质及长方形闭合回路的简单特例导出的，但却是在任何情况下都普遍适用的关系式。

## 2) 有磁介质时的安培环路定理-磁场强度

### (1) 磁场强度：

配套课程 习题答案



$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

(2) 磁介质中的安培环路定理

$$\therefore \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Sigma I$$

磁场强度沿闭合路径的线积分等于穿过该路径的所有传导电流的代数和，而与磁化电流无关。即，磁场强度 $\vec{H}$ 矢量的环流和传导电流有关，而在形式上与磁介质的磁性无关。

(3) 磁介质的磁化率

$$\chi_m = \frac{M}{H}$$

为，是一与磁介质的性质有关的物理量，位为1的量。如果磁介质是均匀的，则 $\chi_m$ 是常量；如果磁介质是不均匀的，则 $\chi_m$ 是空间位置的函数。对于顺磁质 $\chi_m > 0$ ，磁化强度 $\vec{M}$ 和磁场强度 $\vec{H}$ 的方向相同；对于抗磁质， $\chi_m < 0$ ，磁化强度 $\vec{M}$ 和磁场强度 $\vec{H}$ 的方向相反，上式还可以写为

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

磁介质的相对磁导率

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

磁介质的磁导率

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

真空中各点处的磁场强度等于该点磁感应强度的 $1/\mu_0$ ，即

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

所有顺磁性、抗磁性材料的磁化率的值都很小，其相对磁导率几乎等于1，这说明它们对电流的磁场只产生微弱的影响。



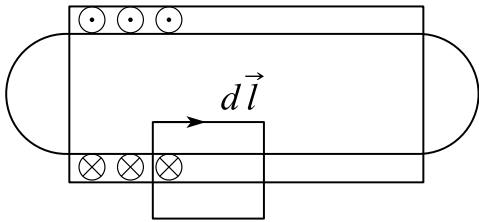


题 1. 一个单位长度上密绕有  $n$  匝线圈的长直螺线管，线圈中通有稳恒电流  $I$ ，管内充满相对磁导率为  $\mu$  的均匀磁介质，则管内轴线附近的磁场强度大小为( )。

- A.  $nI$                       B.  $\mu_0 nI$                       C.  $\mu_r nI$                       D.  $\mu_r \mu_0 nI$

答案：A

解析：



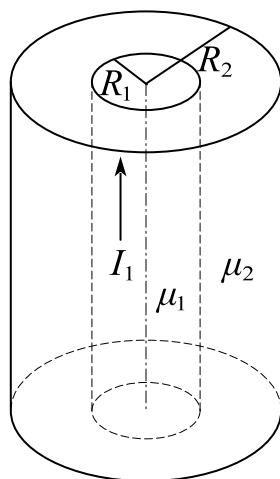
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = nI \Rightarrow H = nI$$

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r nI$$

题 2. 一磁导率为  $\mu_1$ 、半径为  $R_1$  的无限长圆柱形导体中均匀的通有电流  $I_1$ 。导线外包一层磁导率为  $\mu_2$ 、半径为  $R_2$  的圆柱形不导电的顺磁介质。介质外为真空(如图)，求：

(1) 磁场强度  $H$  和磁感应强度  $B$  的分布；

(2) 半径为  $R_2$  处表面上磁化面电流线密度。



解析：(1) 由安培环路定理：

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{r^2}{R_1^2} I, \quad r \leq R_1$$

配套课程 习题答案



$$H = \frac{Ir}{2\pi R_1^2}, \quad B = \mu_1 H = \frac{\mu_1 Ir}{2\pi R_1^2}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I, \quad R_1 < r < R_2$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \mu_2 H = \frac{\mu_2 I}{2\pi r}$$

$$r \geq R_2: \quad H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

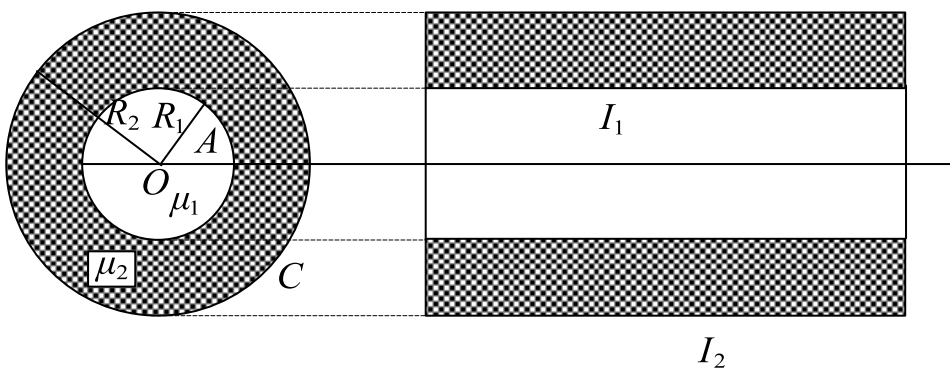
方向从上面看均为逆时针。

$$(2) \alpha_s = M$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{I(\mu_2 - \mu_0)}{2\pi r \cdot \mu_0}$$

$$\therefore M(R_2) = \frac{I(\mu_2 - \mu_0)}{2\pi\mu_0 R_2}$$

题 3. 如图所示，磁导率为  $\mu_1$  的无限长磁介质圆柱体  $A$ ，半径为  $R_1$ ，其中均匀通有电流  $I_1$ ，其外有半径为  $R_2$  的无限长同轴圆柱面  $C$ ， $AC$  之间充满着磁导率为  $\mu_2$  的无限大均匀磁介质，在圆柱面  $C$  上通有相反的电流  $I_2$ 。试求该系统磁感强度  $B$  的分布。



解析：选取同轴环路

由安培环路定理： $I_1$  磁场为正方向

$$r > R_2 \text{ 有: } \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2)$$



$$\therefore B = \frac{\mu_0(I_1 - I_2)}{2\pi r}$$

$$R_1 \leq r \leq R_2 \text{ 有: } \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_1$$

$$\therefore H = \frac{I_1}{2\pi r}$$

$$B = \mu_2 H = \frac{\mu_2 I_1}{2\pi r}$$

$$r < R_1 \text{ 有: } \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{r^2}{R_1^2} I_1$$

$$\therefore H = \frac{I_1 r}{2\pi R_1^2}$$

$$B = \mu_1 H = \frac{\mu_1 I_1 r}{2\pi R_1^2}$$

### 3. 铁磁质

铁磁质的性质：

- (1) 能产生特别强的附加磁场  $\vec{B}'$ ；
- (2) 磁化强度  $\vec{M}$  和磁感应强度  $\vec{B}$  不再是常矢量，没有简单的正比关系；
- (3) 磁化强度随外磁场而变，它的变化落后于外磁场的变化，在外磁场停止作用后，铁磁质仍能保留部分磁性；
- (4) 一定的铁磁材料存在一特定的临界温度，称为居里点，温度达到居里点后，它们的磁性发生突变，转化为顺磁质。

#### 1) 磁化曲线和磁滞回线

##### (1) 磁化曲线

磁化曲线是指磁感应强度  $\vec{B}$  与磁场强度  $\vec{H}$  的关系曲线。

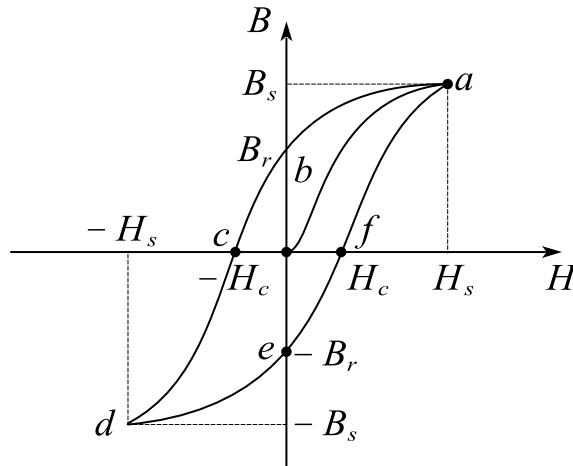
##### (2) 磁滞



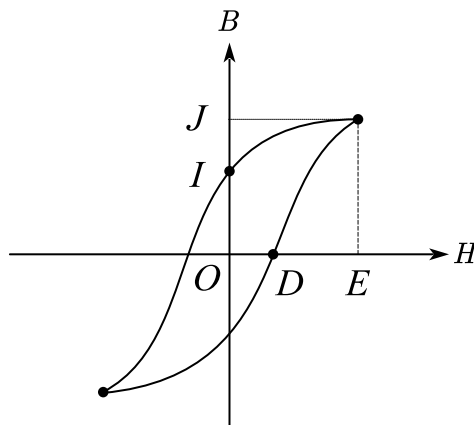
磁滞是指磁感应强度  $\vec{B}$  值的变化总是落后于磁场强度  $\vec{H}$  的变化的现象。

(3) 磁滞回线

磁滞回线是指  $B-H$  的闭合曲线，其磁滞回线的形状特征反映了铁磁质的磁性质。



题 1. 如图所示为一铁磁材料的磁滞回线，则能够代表饱和磁感强度的是 ( )。



- A. 线段 OJ
- B. 线段 OD
- C. 线段 OE
- D. 线段 OI

答案：A

解析：OD 是矫顽力，OI 是剩磁，OJ 是饱和磁感应强度。

2) 磁畴

配套课程 习题答案



磁畴是指在铁磁质中，相邻铁原子中的电子间的交换耦合作用使相邻原子中电子的自旋磁矩平行排列形成的一个达到自发磁化饱和状态的微小区域。

### 3) 磁性材料的分类

根据磁滞回线的不同，可以将铁磁性材料区分为软磁材料和硬磁材料。

#### (1) 软磁材料

- ①磁滞回线成细长条形状；
- ②矫顽力小( $H_c < 10^2 A/m$ )；
- ③磁滞特性不显著，容易磁化，也容易退磁。

适用于交变磁场，可用来制造变压器、继电器、电磁铁、电机的铁芯。

#### (2) 硬磁材料

- ①矫顽力大( $H_c > 10^2 A/m$ )，剩磁 $B_r$ ，也大；
- ②磁滞特性显著，磁滞回线面积大，磁滞损耗大；
- ③经磁化后保留有很强的剩磁，且不易消除。

不适合在交变磁场中应用，适合于制成永久磁铁。

题 2. 磁介质有三种，用相对磁导率 $\mu_r$ 表征它们各自的特性时，( )。

- A. 顺磁质 $\mu_r > 0$ ，抗磁质 $\mu_r < 0$ ，铁磁质 $\mu_r \gg 1$
- B. 顺磁质 $\mu_r > 1$ ，抗磁质 $\mu_r = 1$ ，铁磁质 $\mu_r \gg 1$
- C. 顺磁质 $\mu_r > 0$ ，抗磁质 $\mu_r < 0$ ，铁磁质 $\mu_r > 1$
- D. 顺磁质 $\mu_r > 1$ ，抗磁质 $\mu_r < 1$ ，铁磁质 $\mu_r \gg 1$

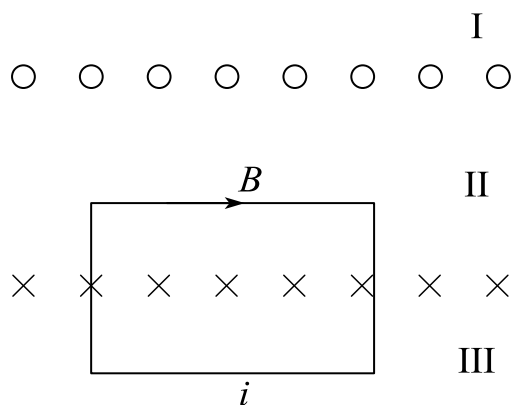
答案：D

解析：
$$\mu_r = \frac{B}{B_0}$$

题 3. 两块厚度均可忽略的无限大导体薄板，互相平行放置，两板上均匀地通有等值反向电流，电流面密度为 $1000 A/m$ 。在两块导体板之间充满相对磁导率为



500 的软磁介质，求：空间各处的磁感应强度、磁场强度和磁化强度的大小。



解析：根据对称性，只有 II 区域有磁场

$$\therefore B_{\text{I}} = B_{\text{II}} = 0 ; H_{\text{I}} = H_{\text{II}} = 0$$

II 中磁场方向向右，由安培环路定理

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = Hl = \lambda l$$

$$\Rightarrow H = 1000 A/m$$

$$B = \mu H = 5 \times 10^5 \cdot \mu_0$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = 4.99 \times 10^5 A/m$$



## 课时十五 练习题

1. 将半径为 $R$ 的圆柱形无限长直导线置于均匀无限大磁介质之中，若有恒定电流为 $I$ 均匀地流过导线的横截面，磁介质的相对磁导率为 $\mu_r$  ( $\mu_r < 1$ )，则与导线接触的磁介质表面上的磁化电流面密度为 ( )。

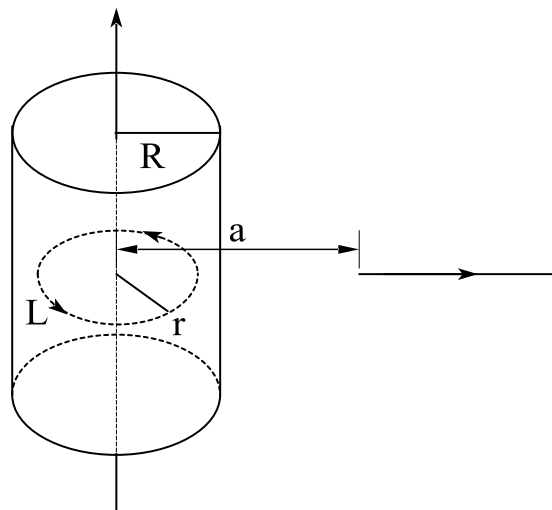
A.  $\frac{(1-\mu_r)I}{2\pi R}$       B.  $\frac{\mu_0 I}{2\pi\mu_r R}$       C.  $\frac{\mu_r I}{2\pi R}$       D.  $\frac{I}{2\pi\mu_r R}$

2. 一天限长直导线半径为 $R_1$ ，通有电流 $I$ ，直导线外紧裹一层相对磁导率为 $\mu_r$ 的磁介质，磁介质为圆筒形外径达到 $R_2$ 。则距离直导线轴线为 $r$  ( $R_1 < r < R_2$ )处的磁场强度的大小 $H =$ \_\_\_\_\_。

3. 无限长载流圆柱体，电流为 $I_1$ ，半径为 $R$ ，内部充填相对磁介质为 $\mu_r$ ，外面为真空。

(1) 求无限长载流圆柱体内，外部磁场大小？

(2) 有一有限长导线长为 $L$ ，电流为 $I_2$ ，从左流向右，距无限长载流圆柱体轴心为 $a$ ，求有限长导线安培力？



4. 长直电缆由一个圆柱导体和一共轴圆筒状导体组成，两导体中有等值反向均匀电流 $I$ 通过，其间充满磁导率为 $\mu$ 的均匀磁介质，介质中离中心轴距离为 $r$ 的某点处的磁场强度的大小 $H =$ \_\_\_\_\_；磁感强度的大小 $B =$ \_\_\_\_\_。



5. 一个绕有500匝导线的平均周长为50cm的细环，载有0.3A电流时，铁芯的相对磁导率为600。

(1) 铁芯中的磁感强度  $B$  为\_\_\_\_\_；

(2) 铁芯中的磁场强度  $H$  为\_\_\_\_\_。 ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ )





## 课时十六 电磁感应定律

考点	重要程度	题型
1. 电磁感应定律	★★★★★	选填、简答
2. 动生电动势	★★★★	选填、简答、计算
3. 感生电动势 感生电场	★★★	选填、简答、计算

### 1. 电磁感应定律

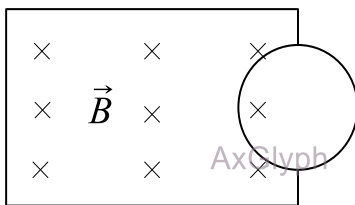
#### 1) 电磁感应现象

当穿过一个闭合导体回路所包围的面积内的磁通量发生变化时，不管这种变化是由什么原因引起的，在导体回路中就会产生感应电流，这种现象称为电磁感应现象。

#### 2) 楞次定律

闭合回路中感应电流的方向，总是使得它所激发的磁场来阻止引起感应电流的磁通量的变化(增加或减少)。

**题 1.** 一个圆形线环，它的一半放在一分布在正方形区域的匀强磁场中，另一半位于磁场之外，如图所示，磁场  $\vec{B}$  的方向垂直纸面向里，欲使圆线环中产生逆时针方向的感应电流，应使 ( )。



A. 线环向左平移

B. 线环向上平移

C. 线环向右平移

D. 磁感应强度减弱

答案：A

解析：根据楞次定律，线圈中产生和图中  $B$  方向相反的感应电流，因此线圈向里的  $B$  的磁通量要增大，选项 B 的磁通量不变，选项 C 和 D 的向里的磁通量减小。

配套课程 习题答案



### 3) 法拉第电磁感应定律

#### (1) 法拉第电磁感应定律

通过回路所包围面积的磁通量发生变化时回路中产生的感应电动势与磁通量对时间的变化率成正比。采用国际单位制，则此电磁感应定律可表示为

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

在约定的正负符号规则下，式中的负号反映了感应电动势的方向，它是楞次定律的数学表现。

#### (2) 感应电动势的方向

感应电动势  $\varepsilon_i$  的方向的符号规则如下：

在回路上先任意选定一个方向作为回路的绕行正方向，再用右手螺旋法则确定此回路所围面积的正法线单位矢量  $\vec{e}_n$  的方向；然后确定通过回路面积的磁通量的正负，凡穿过回路面积的  $\vec{B}$  的方向与正法线方向相同者为正，相反者为负；最后再考虑  $\Phi$  的变化，感应电动势  $\varepsilon_i$  的正负只由  $d\Phi/dt$  决定。

用这种方法确定感应电动势方向的方法和用楞次定律确定的方向完全一致，但在实际问题中用楞次定律来确定感应电动势的方向比较简便。

#### (3) $N$ 匝线圈中的总电动势

回路是由  $N$  匝导线串联而成，如果每匝中通过的磁通量都是相同的，则  $N$  匝线圈中的总电动势应为各匝中电动势的总和，即

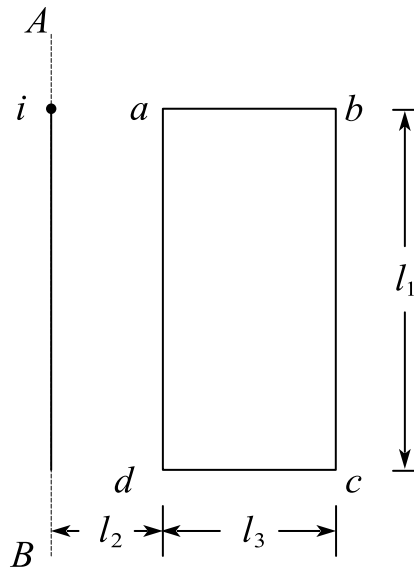
$$\varepsilon_i = - N \frac{d\Phi}{dt}$$

$N\Phi$  称为线圈的磁通量匝数或磁链。如果每匝中的磁通量不同，就应该用各圈中磁通量的总和  $\Sigma\Phi$  来代替  $N\Phi$ 。

题 2. 如图所示，无限长直导线中电流为  $i = I_0 \cos \omega t$ ，矩形导线框  $abcd$  与长直导



线共面，且  $ad \parallel AB$ ，求：1) 无限长载流导线外任一点的磁感应强度表达式；2) 线框  $abcd$  中磁通量；3) 线框  $abcd$  中的感应电动势大小。



解：1) 由安培环路定理： $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$  (同轴，半径为  $r$ )  $\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$$2) d\Phi = Bds = Bl_1 dr$$

$$\therefore \Phi = \frac{\mu_0 I l_1}{2\pi} \int_{l_2}^{l_2+l_3} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l_1}{2\pi} \ln \frac{l_2+l_3}{l_2}$$

$$3) \varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I l_1}{2\pi} \ln \frac{l_2+l_3}{l_2} \cdot \frac{di}{dt}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 \omega l_1}{2\pi} \ln \frac{l_2+l_3}{l_2} \cdot \sin \omega t$$

#### (4) 感生电荷量

在  $t_1$  到  $t_2$  这段时间内通过导线的任一截面的感生电荷量为

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = - \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} d\Phi = \frac{1}{R} (\Phi_1 - \Phi_2)$$

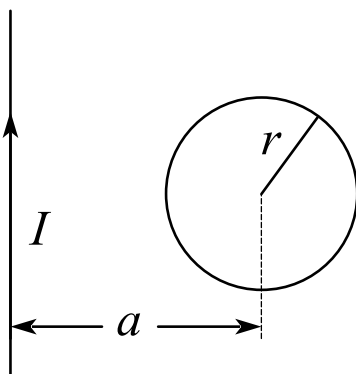
式中  $\Phi_1$ ， $\Phi_2$  分别是  $t_1$ ， $t_2$  时刻通过导线回路所包围面积的磁通量。

上式表明，在一段时间内通过导线截面的电荷量与这段时间内导线回路所包围的磁通量的变化值成正比，而与磁通量变化的快慢无关。

配套课程 习题答案



题 3. 在一通有电流  $I$  的无限长直导线所在平面内，有一半径为  $r$ ，电阻为  $R$  的导线小环，环中心距直导线为  $a$ ，如图所示，且  $a \gg r$ ，当直导线的电流被切断后，沿着导线环流过的电荷为\_\_\_\_\_.



$$\text{解: } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad \varepsilon = \frac{\pi r^2 \mu_0}{2\pi a} \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$q = \int \frac{\varepsilon}{R} dt = \int_0^I \frac{\mu_0 \pi r^2}{2\pi a R} dI = \frac{\mu_0 \pi r^2 I}{2\pi a R}$$

(5) 法拉第电磁感应定律积分形式

用  $\vec{E}_k$  表示等效的非静电力场的场强，则感应电动势  $\varepsilon_i$  可表示为

$$\oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

式中积分面  $S$  是以闭合回路为边界的任意曲面。

## 2. 动生电动势

法拉第电磁感应定律告诉我们，只要通过回路所围面积中的磁通量发生变化，回路中就会产生感应电动势。由式  $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  可知，使磁通量发生变化的方法是多种多样的，但从本质上讲，可归纳为两类：

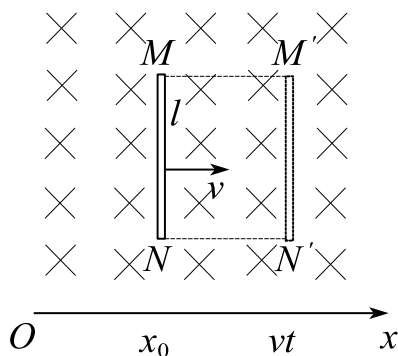


一类是磁场保持不变，导体回路或导体在磁场中运动，由此产生的电动势称作动生电动势；

另一类是导体回路不动，磁场发生变化，由此产生的电动势称作感生电动势。

### 1) 在磁场中运动的导线内的感应电动势

如下图所示，导线  $MN$  长度为  $l$ ，在磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场中以速度  $\vec{v}$  向右作匀速直线运动，为简单计，假定  $MN$ ， $\vec{v}$  和  $\vec{B}$  三者互相垂直。若在  $t$  时间内，导线  $MN$  从  $x_0$  的位置平移到  $x = x_0 + vt$  的位置。



根据法拉第电磁感应定律，在运动导线  $MN$  段上产生的动生电动势即为

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - Blv$$

导线在磁场中以速度  $\vec{v}$  扫过，在图像上看等价于导线在切割磁感应线，因此，上式也说明导体在磁场中运动所产生的动生电动势在量值上等于在单位时间内导线所切割的磁感应线数。式中的负号是由楞次定律确定的，动生电动势的方向从  $N$  指向  $M$ ， $M$  端相当于电源的正极， $N$  端相当于负极。

另一种理解方式：当导线  $MN$  以速度  $\vec{v}$  向右运动时，导线内每个自由电子也就获得向右的定向速度  $\vec{v}$ ，由于导线处在磁场中，自由电子受到的洛伦兹力  $\vec{F}$  为

$$\vec{F} = - e\vec{v} \times \vec{B}$$

式中  $e$  为电子电荷量的绝对值。

$\vec{F}$  的方向沿导线从  $M$  指向  $N$ ，电子在这个力作用下，将沿导线从  $M$  端向  $N$



端运动.电子在导线内的这个运动可以看作是电子受到一个非静电性场强  $\vec{E}_k$  所驱动,这个非静电性力就是洛伦兹力  $\vec{F}$ ,因此,按照电动势的定义,导线  $MN$  上的感应电动势  $\varepsilon_i$  是这段导线内非静电性力场做功的结果,方向为  $N$  到  $M$ , 所以

$$\varepsilon_i = \int_N^M \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_N^M \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = Blv$$

这表明形成动生电动势的实质是运动电荷受洛伦兹力的结果。

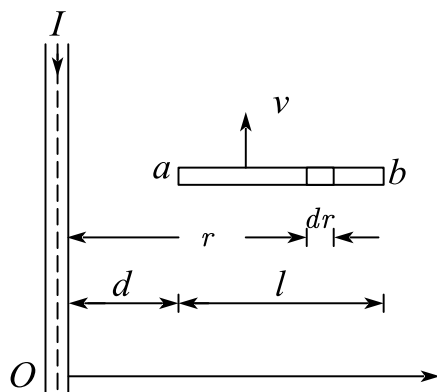
在一般情况下,磁场可以不均匀,导线在磁场中运动时各部分的速度也可以不同,  $\vec{v}$ 、 $\vec{B}$  和  $d\vec{l}$  也可以不相互垂直,这就是说,  $\vec{v}$  和  $\vec{B}$  之间可以有任意的夹角  $\theta$ , 所以在  $d\vec{l}$  段产生的动生电动势应为

$$d\varepsilon_i = \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

那么运动导线内总的动生电动势就要用下式来计算:

$$\varepsilon_i = \int_L \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

**题 4. 有一长载流导线通有电流为  $I$ , 其附近有一金属棒  $ab$ , 以速度  $v$  作平行于该导线的匀速运动, 如图所示, 求金属棒中的动生电动势 (设  $I = 10A, l = 0.2m, d = 0.1m, v = 2.0m/s$ ).  $\mu = 4\pi \times 10^{-3} T \cdot m/A$**



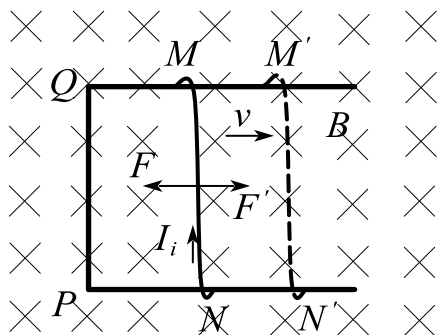
解: 由安培环路定理有  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$$\varepsilon = \int_d^{d+l} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d} = 4 \ln \frac{3}{2} \times 10^{-6} V \quad \text{方向 } b \rightarrow a$$

配套课程 习题答案



一根导线在磁场中切割磁感应线运动能产生电动势，但没有恒定电流，仅当构建一个闭合回路后才能建立起感应电流：



导线在磁场中运动的功能关系

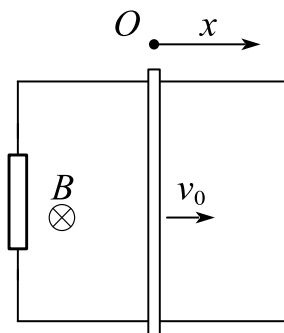
此时载流导线  $MN$  段在外磁场中又要受到安培力  $F$  的作用，其大小为

$$F = BI_i l$$

方向在纸面内垂直于导线向左。

所以,要维持  $MN$  向右作匀速运动,使之在  $MN$  段导线中产生恒定的电动势,就要在  $MN$  段上施加一同样大小但方向向右的外力  $F'$ 。因此,在维持  $MN$  段导线作匀速运动过程中,外力必须克服安培力而做功,电源(即“运动导线  $MN$ ”)向回路中提供的电能来源于外界供给的机械能。

**题 5.** 一平行导轨处于均匀磁场  $B$  中,其上放置质量为  $m$ , 长度为  $l$  的金属杆  $ab$  (见图)。当杆以初速度  $v$  向右运动时,求杆  $ab$  能移动的最大距离  $x_{\max}$ 。

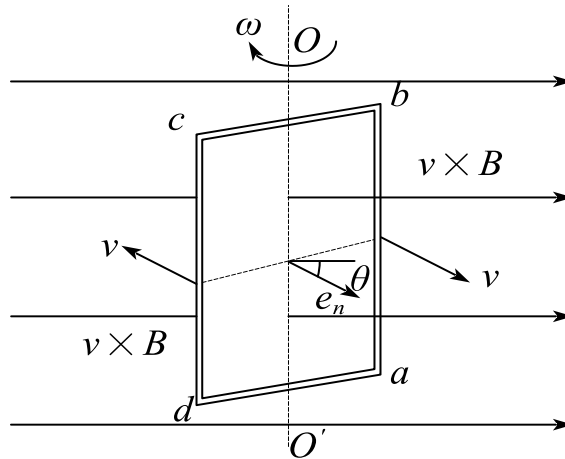


$$\text{解: } \varepsilon = Blv \quad F_{\text{安}} = B \frac{\varepsilon}{R} l = \frac{B^2 l^2 v}{R} = mv \frac{dv}{dx} \quad \therefore x_{\max} = \frac{mv_0 R}{B^2 l^2}。$$



## 2) 在磁场中转动的线圈内的感应电动势

一个在均匀磁场中作匀速转动的矩形线圈 $abcd$ 的匝数为 $N$ ，面积为 $S$ ，使这线圈在均匀磁场中绕固定的轴线 $OO'$ 转动，磁感应强度与 $OO'$ 轴垂直。当 $t=0$ 时，线圈平面的法线单位矢量 $\vec{e}_n$ 与磁感应强度 $\vec{B}$ 之间的夹角为零，经过时间 $t$ ，线圈平面的法线单位矢量 $\vec{e}_n$ 与 $\vec{B}$ 之夹角为 $\theta$ 。



通过每匝线圈平面的磁通量为

$$\Phi = BS\cos\theta$$

根据法拉第电磁感应定律， $N$ 匝线圈中所产生的动生电动势为

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = NBS\sin\theta \frac{d\theta}{dt} = NBS\omega\sin\omega t$$

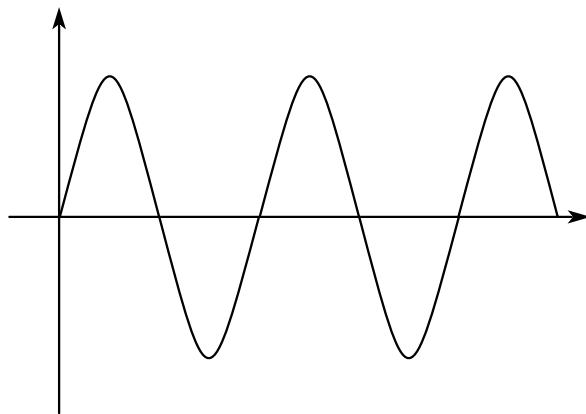
式中，线圈角速度 $\omega$ 为常量。

在均匀磁场内转动的线圈中所产生的电动势是随时间作周期性变化的，周期为 $2\pi/\omega$ 。在两个相邻的半周期中，电动势的方向相反，这种电动势叫做交变电动势。令 $\varepsilon_0 = NBS\omega$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 \sin\omega t$$

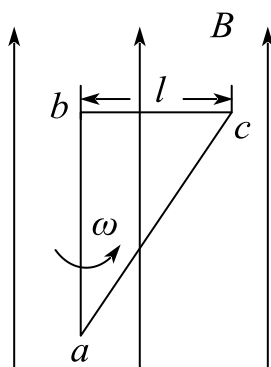






交变电动势与交变电流

题 6. 如下图所示, 直角三角形金属架  $abc$  放在均匀磁场中, 磁场  $B$  平行于  $ab$  边,  $bc$  长度为  $l$ 。当金属框架绕  $ab$  边以匀角速度  $\omega$  转动时,  $abc$  回路中的感应电动势  $\varepsilon$  为\_\_\_\_\_和  $a$ 、 $c$  两点间的电势差  $V_c - V_a$  为\_\_\_\_\_。



解:  $0; \frac{1}{2}\omega Bl^2$

$$\varepsilon_{ab} = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \varepsilon_{bc} = \int_0^l \omega r B dr = \frac{1}{2}\omega Bl^2$$

$$V_c - V_b = \frac{1}{2}\omega Bl^2$$

$$\therefore V_c - V_a = \frac{1}{2}\omega Bl^2$$



### 3. 感生电动势 感生电场

当导线回路固定不动，而磁通量的变化完全由磁场的变化所引起时，导线回路内也将产生感应电动势。这种由于磁场变化引起的感应电动势，称为感生电动势。

#### 1) 感生电场

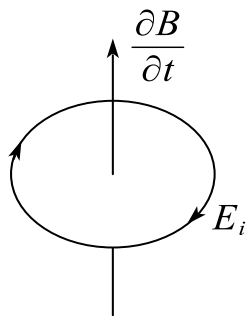
变化的磁场在其周围激发了一种电场，这种电场称为感生电场。

如用  $\vec{E}_i$  表示感生电场的场强，则当回路固定不动，回路中磁通量的变化全是由磁场的变化所引起时，法拉第电磁感应定律可表示为

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

上式明确反映出变化的磁场能激发电场、从场的观点来看，无论空间是否有导体回路存在，变化的磁场总是在空间激发电场。如果有导体回路存在时，感生电场的作用便驱使导体中的自由电荷作定向运动，从而显示出感应电流；如果不存在导体回路，就没有感应电流，但是变化的磁场所激发的电场还是客观存在的。

由静止电荷所激发的电场是保守力场(无旋场)，在该场中电场强度沿任一闭合回路的线积分恒等于零。但变化磁场所激发的感生电场沿任一闭合回路的线积分一般不等于零，而是满足上式，说明感生电场不是保守力场，其电场线既无起点也无终点，永远是闭合的，像旋涡一样。因此，感生电场又称为有旋电场。因为式中规定面元  $dS$  的法向与回路绕行方向成右手螺旋关系，所以式中的负号给出  $\vec{E}_i$  线的绕行方向和所围的的方向成左手螺旋关系。

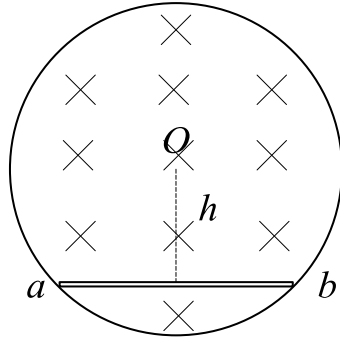


$E$  线和  $\frac{\partial B}{\partial t}$  成左手螺旋关系

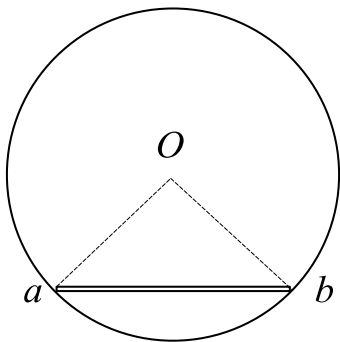
配套课程 习题答案



题 1. 在圆柱形空间内分布有沿圆柱轴线方向的均匀磁场，若磁场方向垂直纸面向里，其变化率  $\frac{\partial B}{\partial t} = \text{常数}$ ，且大于 0，把长度为  $L$  的直导线  $ab$  放在圆柱截面上，且距圆心的垂直距离为  $h$ ，如图所示，求此直导线  $ab$  上的感应电动势。



解：



显然，感生电场方向为逆时针且以  $O$  为圆心，连接  $Oa, Ob$ ，有

$$\varepsilon = \varepsilon_{Oa} + \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bO}$$

$$\because \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_{bO} = 0$$

$$\therefore \varepsilon_{Oa} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{ab} = -\frac{dB}{dt} S = -\frac{1}{2} k l h \quad , \quad \text{其中 } k = \frac{dB}{dt}$$

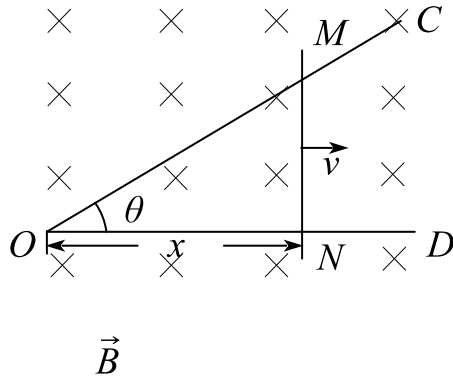
题 2. 弯成  $\theta$  角的金属架  $COD$  放在磁场中，磁感应强度  $B$  的方向垂直于金属架  $COD$  所在平面，一导体杆  $MN$  垂直于  $OD$  边，在金属架上以恒定速度  $v$  向右滑动，



$v$  与  $MN$  垂直， $t=0$  时， $x=0$ ，求下列两种情况时框架内的感应电动势  $\varepsilon$ 。

(1) 磁场分布均匀，且  $B$  不随时间改变；

(2) 非均匀的时变磁场  $B = kx \cos(\omega t)$ 。



解：(1)  $\varepsilon = vBl$ ， $l = x \tan \theta$

$$\therefore \varepsilon = vBx \tan \theta$$

(2)  $\Phi = BS = \frac{1}{2} kx^3 \cos \omega t \cdot \tan \theta$ ，取顺时针为正

$$\therefore \varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{1}{2} k \tan \theta (3x^2 \cdot v \cos \omega t - x^3 \cdot \omega \sin \omega t)$$

$$= - \frac{kx^2}{2} \tan \theta (3v \cos \omega t - x\omega \sin \omega t)$$

## 2) 电子感应加速器

### (1) 基本原理

利用变化的磁场所激发的电场来加速电子。

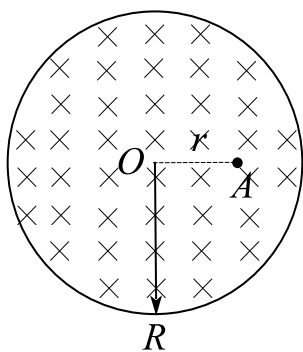
题 3. 如图所示，一个限定在半径为  $R$  的圆柱体内的均匀磁场以  $\frac{dB}{dt} = k$  的恒定变化率

减弱，则位于圆柱内距离轴线为  $r$  的  $A$  点的感生电场的大小为\_\_\_\_\_；若一电

子从  $A$  点静止释放，则电子获得的瞬时加速度方向为\_\_\_\_\_。

配套课程 习题答案





解:  $\frac{kr}{2}$ ; 垂直于  $OA$  向上

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int \frac{dB}{dt} ds \quad \therefore E_i = - \frac{kr}{2} \quad \text{方向为顺时针}$$

### 3) 涡电流

#### (1) 概念

在一些电器设备中常常遇到大块的金属体在磁场中运动，或者处在变化着的磁场中，此时在金属体内部也会产生感应电流，这种电流在金属体内部自成闭合回路，称为涡电流。

#### (2) 应用

产生焦耳热，可用来冶炼金属；

产生阻尼作用。

#### (3) 弊害

在变压器中，消耗了部分电能，降低了电机的效率，而且会因铁芯严重发热而不能正常工作。

#### (4) 减小涡流的方法

采用互相绝缘的薄片或细条叠合而成的铁芯，使涡流受绝缘的限制。

**题 4. 对于涡旋电场，下列说法中正确的是 ( ) .**

A. 涡旋电场对电荷没有力的作用

B. 涡旋电场是保守力场

配套课程 习题答案



*C*. 涡旋电场是由电荷激发的

*D*. 涡旋电场的电场线是闭合的

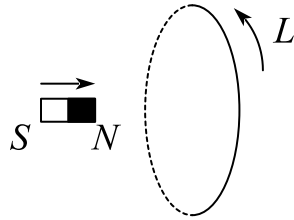
答案：*D*

解析：*A* 涡旋电场对电荷有力的作用；*B* 涡旋电场是非保守力场；*C* 涡旋电场是由变化的磁场激发的



## 课时十六 练习题

1. 在一线圈回路中，回路的绕行方向如图所示。若磁铁沿箭头方向进入线圈，则 ( )。



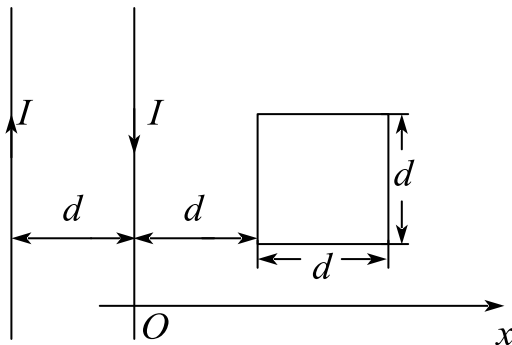
- A.  $d\Phi/dt > 0$  ,  $\varepsilon_i < 0$                       B.  $d\Phi/dt > 0$  ,  $\varepsilon_i > 0$   
 C.  $d\Phi/dt < 0$  ,  $\varepsilon_i > 0$                       D.  $d\Phi/dt < 0$  ,  $\varepsilon_i < 0$

2. 关于感应电动势大小的下列说法中，正确的是 ( )。

- A. 线圈中磁通量变化越大，线圈中产生的感应电动势一定越大  
 B. 线圈中磁通量越大，产生的感应电动势一定越大  
 C. 线圈放在磁感强度越强的地方，产生的感应电动势一定越大  
 D. 线圈中磁通量变化越快，产生的感应电动势越大

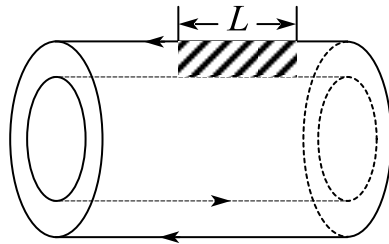
3. 有两根相距为  $d$  的无限长平行直导线，通以大小相等流向相反的电流，一边长为  $d$  的正方形线圈与两导线处于同一平面内，如图所示。求：

- 1) 两根载流导线在坐标为  $x (x > 0)$  处激发的磁感应强度大小、方向；
- 2) 通过该正方形线圈的磁通量；
- 3) 若电流均以  $\frac{dI}{dt} = 2$  的变化率增长，求线圈中的感应电动势大小方向。

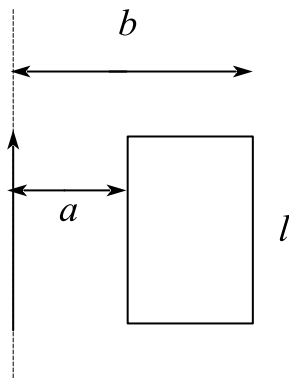


4. 一同轴空心直圆筒电缆，内、外筒半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  (筒壁厚度可以忽略)，电流  $I$  沿内筒流出去，沿外筒流回，如图所示。求：

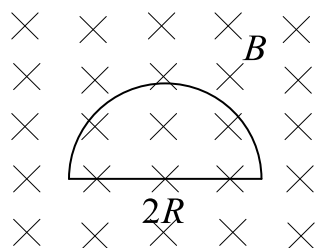
- 1) 磁感应强度的空间分布；
- 2) 通过长度为  $L$  的一段面 (图中画斜线的阴影部分) 的磁通量；
- 3) 若电流随时间  $t$  变化:  $I = I_0 \sin \omega t$ ，图中阴影回路中的感生电动势将多大？



5. 真空中一根无限长直导线中通有电流  $I = I_0 e^{-ct}$  ( $c$  和  $I_0$  为恒量)，一矩形线圈与长直导线共面放置，其边长与导线平行，如图所示，证明: 矩形线框中感应电动势的大小为  $\frac{\mu_0 I_0 c l}{2\pi} \ln \frac{b}{a} e^{-ct}$  (图中  $a$ 、 $b$ 、 $l$  为已知)。

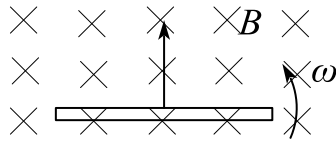


6. 如图，将一半径为  $R$  的半圆形导体线框放置在匀强磁场中，磁感应强度  $B = B_0 \cos \omega t$ ，则该线框中的感应电动势为\_\_\_\_\_。



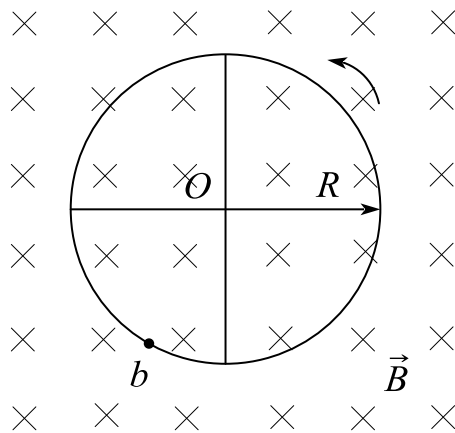


7. 长为 $L$ 的金属直导线在垂直于均匀磁场 $\vec{B}$ 的平面内以角速度 $\omega$ 转动。若转轴位于导线的端点，则整个导线上的电动势大小 $\varepsilon = \underline{\hspace{2cm}}$ ；若转轴位置是在导线的中点，整个导线上的电动势大小 $\varepsilon = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

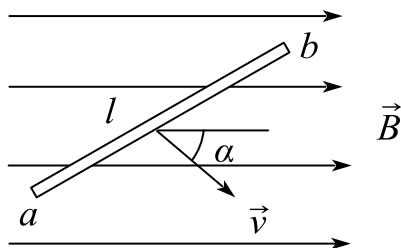


- A.  $\omega BL^2, 0$       B.  $\omega BL, 0$   
 C.  $\frac{1}{2}\omega BL^2, 0$       D.  $\frac{1}{2}\omega BL^2, \omega BL^2$

8. 四根辐条的金属轮子在均匀磁场 $\vec{B}$ 中转动，转轴与 $\vec{B}$ 平行，轮子和辐条都是导体，辐条长为 $R$ ，轮子转速为 $n$ ，则轮子中心 $O$ 与轮边缘 $b$ 之间的感应电动势为  $\underline{\hspace{2cm}}$ ；电势最高点是在  $\underline{\hspace{2cm}}$  处。



9. 如图，长度为 $l$ 的直导线 $ab$ 在均匀磁场 $\vec{B}$ 中以速度 $\vec{v}$ 移动，直导线 $ab$ 中的电动势为 ( )。

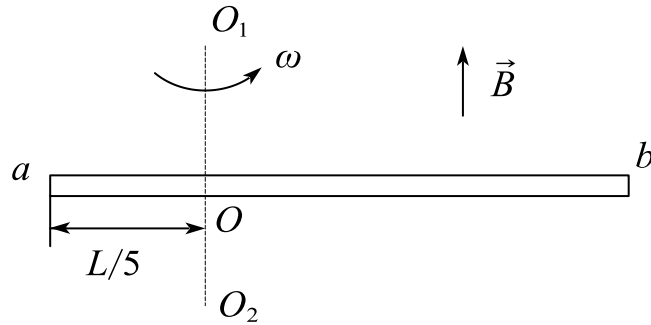


- A.  $Blv$       B.  $Blvsina$       C.  $Blvcosa$       D. 0

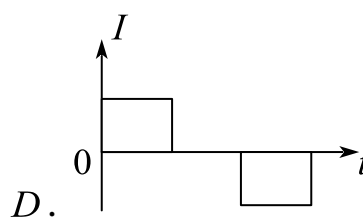
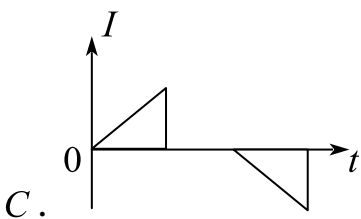
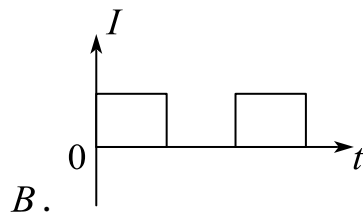
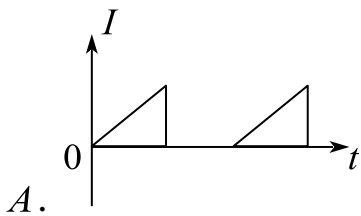
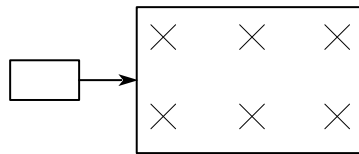
配套课程 习题答案



10. 如图所示，一根长为 $L$ 的金属细杆 $ab$ 绕竖直轴 $O_1O_2$ 以角速度 $\omega$ 在水平面内旋转。 $O_1O_2$ 在离细杆 $a$ 端 $L/5$ 处。若已知地磁场在竖直方向的分量为 $\vec{B}$ ，求 $ab$ 两端间的电势差 $U_a - U_b$ 。

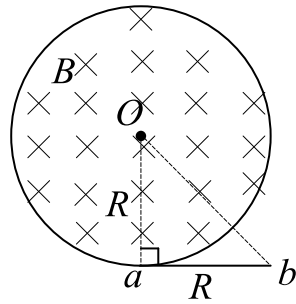


11. 如图所示，一矩形线圈，以匀速自无场区平移进入均匀磁场区，又平移穿出。在 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 各 $I-t$ 曲线中哪一种符合线圈中的电流随时间的变化关系（取逆时针指向为电流正方向，且不计线圈的自感）？（ ）



12. 在底面半径为 $R$ 的圆柱形空间内有一磁感应强度为 $B$ 的均匀磁场，磁感应强度的变化率 $\frac{dB}{dt} = \alpha$ 为常量，现在磁场附近放一根长为 $R$ 的导体棒 $ab$ ，如图所示，则导体棒上的感应电动势的大小为\_\_\_\_\_。

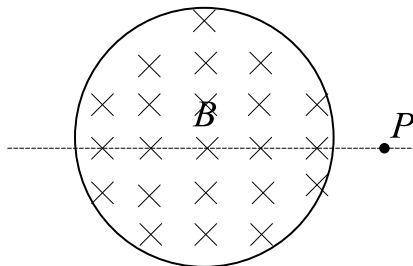




13. 关于动生电动势和感生电动势，下列说法错误的是 ( ) .

- A. 动生电动势是由回路边界的运动而引起的
- B. 感生电动势是由磁场的变化而引起的
- C. 感生电动势的非静电力是感生电场力
- D. 以上说法均不正确

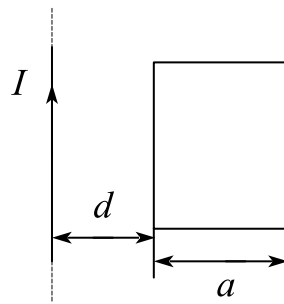
14. 如图所示，均匀磁场被局限在无限长圆柱形空间内，图为此磁场的截面，磁场按  $\frac{dB}{dt}$  随时间变化，圆柱体外一点 P 的感应电场  $E_i$  应 ( ) .



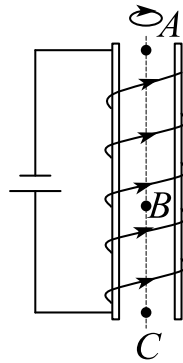
- A. 等于零
- B. 不为零，方向向上或向下
- C. 不为零，方向向左或向右
- D. 不为零，方向向内或向外

15. 如图所示，一无限长直导线通以交流电  $I = I_0 \sin \omega t$ ，其旁边同一平面内放一矩形导线框，导线框的电阻为  $R$ 。求：矩形线框中的感生电动势  $\varepsilon$ ，及感应电流  $I_i$  的大小。





16. 如图所示，有限长螺线管铅直放置，通有直流电流，螺线管正上方有一重导线圆环，沿螺线管轴线铅直落下，下落过程中圆环面保持水平，且环心在螺线管轴线上，则圆环经过螺线管外点  $A$ ，管内点  $B$  和端口点  $C$  时加速度大小为(忽略阻力)：( )。

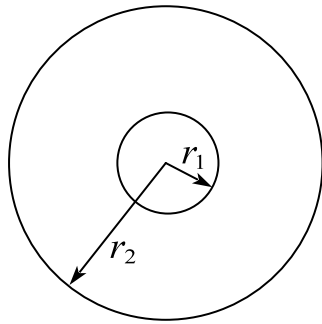


- A.  $a_A < a_B < a_C$
- B.  $a_A < a_C < a_B$
- C.  $a_C < a_A < a_B$
- D.  $a_B < a_A < a_C$

17. 如图所示，半径为  $r_1$  的小导线环，置于半径为  $r_2$  的大导线环中心，二者在同一平面内，且  $r_1 \ll r_2$ 。在大导线环中通有正弦电流  $I = I_0 \sin \omega t$ ，其中  $\omega$ 、 $I$  为常数， $t$  为时间，求：

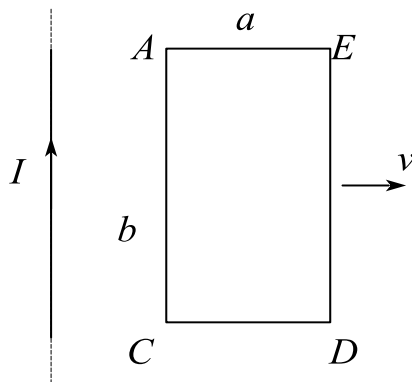
- 1) 任一时刻小导线环中感应电动势的大小；
- 2) 设小导线环的电限为  $R$ ，则在  $t = 0$  到  $t = \omega/(2\pi)$  时间内，通过小导线环某截面的感应电量。





18. 如图所示，一无限长直导线载有电流为 $I$ ，该导线与宽 $a$ 、长 $b$ 的矩形导线框 $ACDE$ 共面，且与 $AC$ 边平行。线框以恒定速率 $v$ 沿着与长直导线垂直的方向向右平移。求：

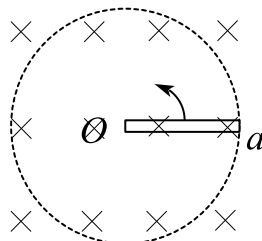
- 1) 线框与直导线相距 $x$ 时穿过线框的磁通量；
- 2) 线框总感应电动势的大小和方向；
- 3)  $AC$ 、 $AE$ 导线的感应电动势，并指出哪端电势高。



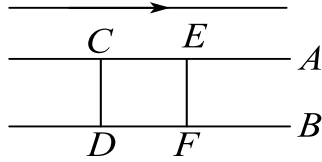
19. 电磁炉是常用的厨房用具，它主要用到以下哪项技术原理（ ）。

- A. 磁聚焦      B. 电流      C. 静电屏      D. 尖端放电

20. 一长为 $d$ 金属棒在均匀磁场中以角速度 $\omega$ 绕中心 $O$ 逆时针方向旋转，磁场的方向如图，大小为 $B$ ， $O$ 、 $a$ 两端电势高的一端是\_\_\_\_\_端。

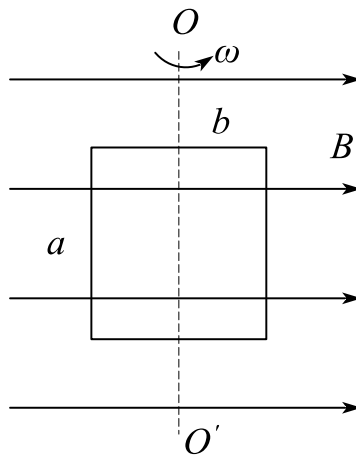


21. 位于载流长直导线近旁的两根平行铁轨  $A$  和  $B$ ，与长直导线平行且在同一水平面上，在铁轨  $A$ 、 $B$  上套有两段可以自由滑动的导体  $CD$  和  $EF$ ，如图所示，若用力使导体  $EF$  向左运动，则导体  $CD$  将 ( )。



- A. 保持不动                      B. 向右运动  
C. 向左运动                      D. 先向右运动，后向左运动

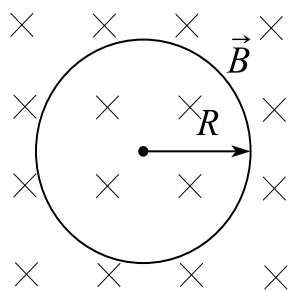
22. 一矩形线框长为  $a$  宽为  $b$ ，置于均匀磁场中，线框绕  $OO'$  轴，以角速度  $\omega$  旋转 (如图所示)。设  $t=0$  时，线框平面处于纸面内，则任一时刻感应电动势的大小为 ( )。



- A.  $2abB|\cos\omega t|$                       B.  $\omega abB$   
C.  $\frac{1}{2}\omega abB|\cos\omega t|$                       D.  $\omega abB|\cos\omega t|$

23. 均匀磁场  $\vec{B}$  被局限在圆柱形空间，半径为  $R$  的圆线圈置于其中， $\vec{B}$  垂直于线圈平面，如下图所示。如果磁感应强度方向不变，其大小随时间  $t$  发生变化： $B = 3t^2 + 2t + 1$ ，则线上各点的感生电场的大小为\_\_\_\_\_其方向为\_\_\_\_\_。





24. 记  $\vec{E}$  为静电场,  $\vec{E}_k$  为感生电场, 则下列与电场沿闭合回路积分相关的说法中正确的是 ( ).

A. 任意情况下都同时有  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ ,  $\oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = 0$

B. 某些情况下可能  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$

C. 任意情况下都同时有  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$ ,  $\oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} \neq 0$

D. 某些情况下可能  $\oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = 0$



## 课时十七 电磁场理论

知识点	重要程度	题型
1. 自感应和互感应	★★★★	选填、计算
2. 磁场的能量	★★★★	选填、计算
3. 位移电流 电磁场理论	★★★★★	选填、简答、计算
4. 电磁场的统一性和电磁场量的相对性	★	简答

### 1. 自感应和互感应

#### 1) 自感应

##### (1) 自感电动势

由于回路本身电流产生的磁通量发生变化，而在自己回路中激起感应电动势的现象，称为自感现象，相应的电动势称为自感电动势。

设有一无铁芯的长直螺线管，长为 $l$ ，截面半径为 $R$ ，管上绕组的总匝数为 $N$ ，当线圈中的电流 $I$ 变化时，在 $N$ 匝线圈中产生的感应电动势为：

$$\varepsilon_L = - \frac{d\Phi_N}{dt} = - \frac{\mu_0 \pi R^2 N^2}{l} \frac{dI}{dt}$$

##### (2) 自感系数

定义自感系数：

$$L = \frac{\mu_0 \pi R^2 N^2}{l}$$

自感电动势可以表示为：

$$\varepsilon_L = - L \frac{dI}{dt}$$

上式反映了自感电动势与电流变化率之间的关系，其中的负号表明，当线圈回路中的 $\frac{dI}{dt} > 0$ 时， $\varepsilon_L < 0$ ，即自感电动势与电流方向相反；反之，当 $\frac{dI}{dt} < 0$ 时， $\varepsilon_L > 0$ ，即自感电动势与电流方向相同。

##### (3) 自感





$$L = \frac{d\Phi_N}{dI}$$

定义为回路的自感。它等于回路中的电流变化为单位值时，在回路本身所围面积内引起磁链的改变值。

如果回路的几何形状保持不变，而且在它的周围空间没有铁磁性物质，那么通过回路所围面积的磁链  $\Phi_N$  与  $I$  成正比，这时上式可写成：

$$L = \frac{\Phi_N}{I}$$

如果回路周围有铁磁性物质存在，则通过回路所围面积的磁链和回路中的电流  $I$  不呈线性关系。

在国际单位制中，自感的单位为亨利，用符号  $H$  表示。  $1H = 1 \text{ Wb/A}$ 。常用毫亨和微亨作为自感的单位。

题 1. 一无限长密绕螺线管，单位长度上的匝数为  $n$ ，横截面面积为  $s$ ，管内外均为真空。当该螺线管通有恒定电流  $I$  时，（ ）。

- A. 电流恒定，则单位长度上自感为 0
- B. 单位长度上自感为  $\mu_0 n^2 s$ ，与电流无关
- C. 单位长度上自感为  $\mu_0 n s$ ，与电流无关
- D. 单位长度上储能与电流  $I$  成正比

答案： B.

解析：根据自感系数的表达式  $L = \frac{\mu_0 \pi R^2 N^2}{l} = \mu_0 S l n^2$ ，可知单位长度的自感。

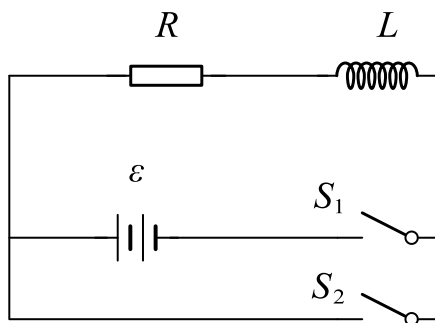
$$\text{自感的储能为 } W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

#### (4) $RL$ 电路

配套课程 习题答案



由于线圈自感的存在，当电路中的电流改变时，在电路中会产生自感电动势。根据楞次定律，自感电动势的出现总是要反抗电路中电流的变化。这就是说，自感现象具有使电路中保持原有电流不变的特性，它使电路在接通及断开时，电路中的电流不能突变，要经历一个短暂的过程才能达到稳定值。



$RL$  电路

如图所示是一个含有自感  $L$  和电阻  $R$  的简单电路。如电键  $S_1$  接通而  $S_2$  断开时， $RL$  电路接上电源后，由于自感的作用，在电流增长过程中电路中出现自感电动势  $\varepsilon_L$ ，它与电源的电动势  $\varepsilon$  共同决定电路中电流的大小。设某瞬时电路中的电流为  $I$ ， $RL$  电路接通电源后电路中电流  $I$  的增长规律。

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

说明了在接通电源后，由于自感的存在，电路中的电流不是立刻达到稳定值  $I_0 = I_{max} = \frac{\varepsilon}{R}$ ，而是由零逐渐增大到这一最大值的，与无自感时的情况比较，这里有一个时间的延迟。当  $t = \tau = \frac{L}{R}$  时，

$$I = 0.63 \frac{\varepsilon}{R} = 0.63 I_0$$

通常就用这一时间  $\tau = \frac{L}{R}$  来衡量自感电路中电流增长的快慢程度，称为  $RL$  回路的时间常数或弛豫时间。



当上述电路中的电流达到稳定值  $I_0$  后，迅速将电键  $S_2$  接通的同时断开电键  $S_1$ ，这时电路中虽然没有外电源，但由于线圈中自感电动势的出现，电路中的电流不会立即降到零。设电键  $S_2$  接通后某一瞬时电路中的电流为  $I$ ，线圈中的自感电动势为  $-L \frac{dI}{dt}$ 。

$$\therefore I = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

上式是  $RL$  电路切断电源后电路中电流的衰变规律，它说明了撤去电源后，由于自感的存在，电流是逐渐减小的，经过一段弛豫时间 ( $\tau = \frac{L}{R}$ )，电流降低为原稳定值的 0.37。

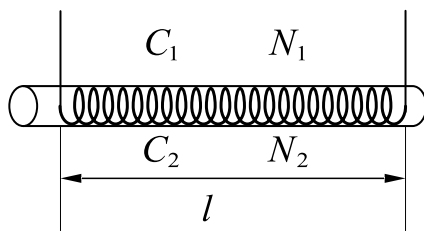
## 2) 互感应

### (1) 互感现象

由于一个回路中的电流变化而在邻近另一个回路中产生感应电动势的现象，称为互感现象。

互感现象与自感现象一样，都是由电流变化而引起的电磁感应现象。

### (2) 互感电动势



两个共轴螺线管的互感

如图所示是绕有  $C_1$  和  $C_2$  两层线圈的长直螺线管，长度均为  $l$ ，截面的半径都是  $r$ 。 $C_1$  线圈共有  $N_1$  匝，当其中通有电流  $I_1$  时，由  $I_1$  所激发的磁场通过  $C_2$  每匝线圈的磁通量为  $\frac{\mu_0 N_1 I_1}{L} \pi r^2$ ，当  $C_1$  中的电流  $I_1$  变化时，在  $C_2$  线圈回路中将产生互感电动势。



$$\varepsilon_{21} = - \frac{d\Phi_{21}}{dt} = - \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2 \frac{dI_1}{dt}$$

同样，当  $C_2$  线圈中所通有的电流  $I_2$  变化时，在  $C_1$  线圈回路中也将产生互感电动势。

$$\varepsilon_{12} = - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = - \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2 \frac{dI_2}{dt}$$

### (3) 互感系数

定义互感系数

$$M = M_{21} = M_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi r^2$$

它反映了两个相邻回路各在另一回路中产生互感电动势的能力，称为两个回路的互感系数，简称互感。

如果两个回路的相对位置固定不变，而且在其周围没有铁磁性物质，则两个回路的互感等于其中一个回路中单位电流激发的磁场通过另一回路所围面积的磁链，即

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$$

在这种情况下，互感和自感一样只和两个回路的形状、相对位置及周围介质的磁导率有关，而与电流无关。

在确定了两回路的互感后，任一回路通有变化的电流  $I$  在另一回路产生的互感电动势就可写为

$$\varepsilon_{21} = - M \frac{dI_1}{dt}, \quad \varepsilon_{12} = - M \frac{dI_2}{dt}$$

### (4) 耦合线圈互感系数

由前面的讨论可知两线圈的自感分别为

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{L} \pi r^2, \quad L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{l} \pi r^2$$

$$\therefore M^2 = L_1 L_2$$

配套课程 习题答案



必须指出，只有这样耦合的线圈（即一个回路中电流所产生的磁感应线全部穿过另一回路）才有上述关系，一般情形有

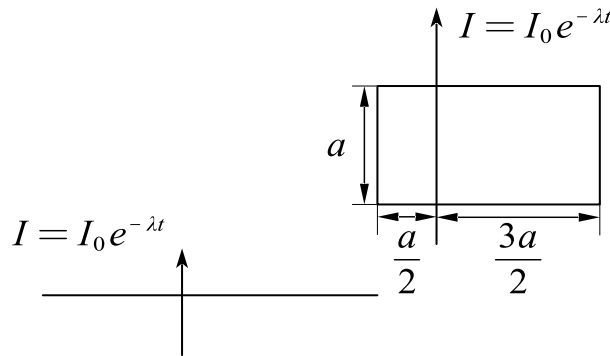
$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

$k$  称为耦合系数， $0 \leq k \leq 1$ 。两线圈相距很远，毫无耦合关系时  $k = 0$ 。

题 4. 一无限长直导线通有电流  $I = I_0 e^{-\lambda t}$ ，（式中  $I_0$ 、 $\lambda$  为恒量），与一矩形线框共面，并相互绝缘，线框的尺寸及位置如图所示。试求：

（1）直导线与线框间的互感系数；

（2）线框中的互感电动势。



解：（1）由安培环路定理， $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$ ，

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x},$$

左侧垂直纸面向外，右侧垂直于纸面向内，

根据对称性，在  $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$  范围磁通量抵消，

$$\Phi = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{2}} B a dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 3,$$

$$\therefore M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 3.$$

（2）取顺时针方向为正，

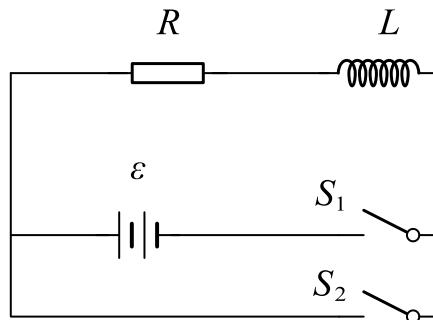


$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 a \lambda}{2\pi} \ln 3 e^{-\lambda t}。$$

## 2. 磁场的能量

### 1) 磁场的能量

使电能转化为载流回路的能量和回路电流间的相互作用能，也就是磁场的能量。



RL 电路

一个自感为  $L$  的回路，当其中通有电流  $I_0$  时，其周围空间磁场的能量为：

$$W_m = \frac{1}{2} L I_0^2$$

上式是用线圈的自感及其中电流表示的磁能，经过变换，磁能也可用描述磁场本身的量  $B$ 、 $H$  来表示。

$$W_m = \frac{1}{2} \mu n^2 V \left( \frac{\beta}{\mu n} \right)^2 = \frac{1}{2} B H V$$

题 1. 一线圈载有电流  $I$ ，电流  $I$  在线圈自身中产生的磁通量为  $\Phi_m$ ，则线圈中贮存的磁能为  $W_m =$  \_\_\_\_\_。

答案：  $\frac{\Phi_m I}{2}$

解析：  $L = \frac{\Phi_m}{I}$ ，  $W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\Phi_m I}{2}$ 。



## 磁场能量密度

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2$$

上述磁场能量密度的公式是从螺线管中均匀磁场的特例导出的，但在一般情况下，磁场能量密度可以表达为：

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

磁场能量密度的公式说明，在任何磁场中，某一点的磁场能量密度只与该点的磁感应强度  $\vec{B}$  及介质的性质有关，这也说明了磁能是定域在磁场中的这个客观事实。

如果知道磁场能量密度及均匀磁场所占的空间，可用上式计算出磁场的总磁能。倘若磁场是不均匀的，那么可以把磁场划分为无数体积元  $dV$ ，在每个小体积内，磁场可以看成是均匀的，因此就能表示这些体积元内的磁场能量密度，于是体积为  $dV$  的磁场能量为：

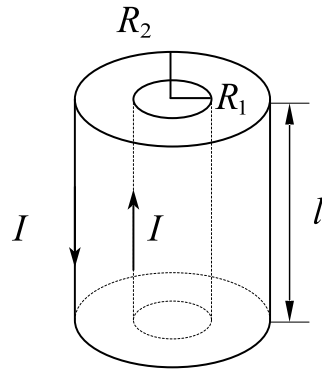
$$dW_m = w_m dV$$

对整个磁场不为零的空间积分，即得磁场的总能量为：

$$W_m = \iiint_V w_m dV = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

**题 4. 电缆由同轴的两个薄壁金属圆筒组成，两者半径分别为  $R_1$ 、 $R_2$ ，两圆筒之间充以磁导率为  $\mu$  的均匀磁介质，电缆内层导体通电流  $I$ ，由外层圆筒流回，如图所示，求长度为  $l$  的一段电缆贮藏的磁场能量及自感系数。**





解：由安培环路定理， $\oint \vec{H} d\vec{l} = I$ ，

$$\therefore H = \frac{I}{2\pi r} (R_1 \leq r \leq R_2),$$

$$\therefore B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r},$$

$$W_m = \int \frac{1}{2} BH dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I^2 l dr}{4\pi r} = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\therefore L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}。$$

### 3. 位移电流 电磁场理论

#### 1) 位移电流

把电位移通量对时间的变化率看作是一种电流，称作是位移电流，记作

$$I_d = S \frac{dD}{dt} = \frac{d\Psi_D}{dt}$$

位移电流存在于面积为 \$S\$ 的两电容器极板之间。

位移电流密度

$$j_D = \frac{1}{S} I_d = \frac{dD}{dt}, \quad \vec{j}_D = \frac{d\vec{D}}{dt}$$

上述定义说明，电场中某点的位移电流密度 \$j\_D\$ 等于该点电位移的时间变化率，通过电场中某截面的位移电流 \$I\_d\$ 等于通过该截面电位移通量的时间变化率。

配套课程 习题答案





安培环路定理修改为：在磁场中  $\vec{H}$  沿任一闭合回路的线积分，在数值上等于穿过以该闭合回路为边线的任意曲面的全电流，即

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum (I + I_D) = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

法拉第电磁感应定律说明变化的磁场能激发涡旋电场，位移电流的论点说明变化的电场能激发涡旋磁场，两种变化的场永远互相联系着，形成了统一的电磁场。

根据位移电流的定义，在电场中每一点只要有电位移的变化，就有相应的位移电流密度存在，但在通常情况下，导体中的电流主要是传导电流，位移电流可以忽略不计；而电介质中的电流主要是位移电流，传导电流可以忽略不计。

应该指出，传导电流和位移电流毕竟是两个截然不同的概念，它们只有在激发磁场方面是等效的，由此都称为电流，但在其他方面存在根本的区别。

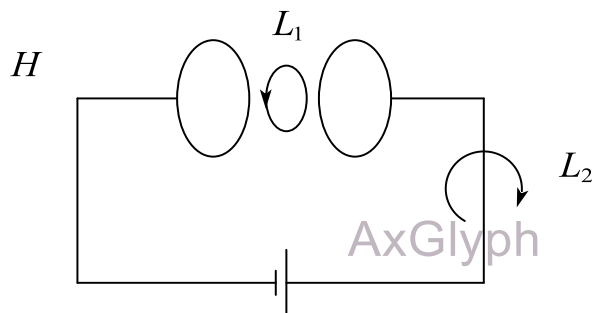
题 1. 如图，平板电容器（忽略边缘效应）充电时，对于环路  $L_1$  的磁场强度  $\vec{H}$  的环流和沿环路  $L_2$  的磁场强度  $\vec{H}$  的环流，必有（ ）。

A.  $\oint_{L_1} \vec{H} d\vec{l}' > \oint_{L_2} \vec{H} d\vec{l}'$

B.  $\oint_{L_1} \vec{H} d\vec{l}' = \oint_{L_2} \vec{H} d\vec{l}'$

C.  $\oint_{L_1} \vec{H} d\vec{l}' < \oint_{L_2} \vec{H} d\vec{l}'$

D.  $\oint_{L_1} \vec{H} d\vec{l}' = 0$



答案：B.

解析：两极板中间会有位移电流，根据全电流的安培环路定理可知两者的环路积分相等。

题 2. 平行板电容器的电容  $C$  为  $20\mu F$ ，两板上的电压变化率为

$\frac{dU}{dt} = 1.5 \times 10^5 V \cdot s^{-1}$ ，则该平行板电容器中的位移电流为\_\_\_\_\_。

答案：3A

解析：根据电路中电容器的电流公式  $i = C \frac{dU}{dt}$  求得。

## 2) 麦克斯韦方程组

### (1) 电场

在一般情况下，对于由自由电荷和变化磁场激发的电场，如用  $\vec{D}$  表示总电位移，根据以上的论述，不难得出介质中电场的高斯定理为：

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q = \iiint_V \rho dV$$

### (2) 磁场

在任何磁场中，通过任何封闭曲面的磁通量总是等于零。故磁场的高斯定理是：

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

### (3) 变化电场和磁场的联系

经麦克斯韦修正后的全电流安培环路定理：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum (I + I_D) = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

揭示了传导电流的磁场和变化电场激发磁场的规律。它表明在任何磁场中，



磁场强度沿任意闭合曲线的线积分等于通过以这闭合曲线为边线的任意曲面的全电流。

#### (4) 变化磁场和电场的联系

法拉第电磁感应定律

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

反映了变化磁场和电场的联系，它不但揭示了变化磁场激发电场的规律，而且在  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$  时仍能包括自由电荷的静电场在内。

题 3. 反应电磁场基本性质和规律的积分形式的麦克斯韦方程组为：

$$\textcircled{1} \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV; \quad \textcircled{2} \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S};$$

$$\textcircled{3} \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0; \quad \textcircled{4} \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}。$$

试判断下列结论包含于或等效于哪一个麦克斯韦方程式的。将你确定的方程式用代号填在相应结论后的空白处。

(1) 变化的磁场一定伴随有电场：( )；

(2) 变化的电场产生磁场：( )；

(3) 磁场是无源场，磁力线闭合：( )；

(4) 电荷总伴随有电场：( )。

答案：②；④；③；①。

解析：变化就是对时间求导。

在应用麦克斯韦方程去解决实际问题时，常常要涉及电磁场和物质的相互作用，为此要考虑到介质对电磁场的影响，这种影响使电磁场量和表征介质电磁特性的量  $\varepsilon$ ， $\mu$ ， $\gamma$  发生联系，即

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

配套课程 习题答案



### 3) 电磁场的物质性

对于一般情况下的电磁场来说，既有电场能量，又有磁场能量，

(1) 电磁能量密度为：

$$w = \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

(2) 单位体积的场的质量为：

$$m = \frac{w}{c^2} = \frac{1}{2c^2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

(3) 对于平面电磁波，单位体积的电磁场的动量  $p$  和能量密度  $w$  间的关系为：

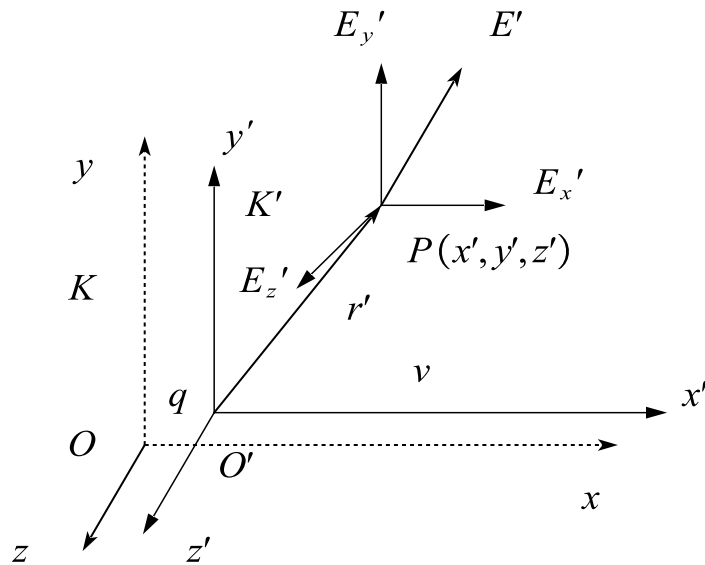
$$p = \frac{w}{c}$$

结论：电磁场以波的形式在空间传播，而以粒子的形式和实物相互作用，这个“粒子”为光子，光子没有静止质量。电磁场在真空中运动的速度永远是  $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ，实物和场（例如电子和光子）在某些情况下可以发生相互转化。

### 4. 电磁场的统一性和电磁场量的相对性

描述电磁现象的场量在不同惯性系内可以有不同量值，说明电磁场量是相对的；但是每一个惯性系中电磁场量之间的关系都有相同的麦克斯韦方程组形式，说明电磁规律是绝对的。





电荷在不同惯性系中的场

在不同惯性系中电磁场各场量的关系为：

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma(E'_y + vB'_x), \quad E_z = \gamma(E'_z - vB'_y)$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \gamma\left(B'_y - \frac{vE'_z}{c^2}\right), \quad B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{vE'_y}{c^2}\right)$$

利用空间坐标的洛伦兹变换式，用  $K$  系中的相应坐标表示为：

$$E_x = \frac{\gamma q(x - vt)}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad B_x = 0$$

$$E_y = \frac{\gamma qy}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad B_y = -\frac{v}{c}E_z$$

$$E_z = \frac{\gamma qz}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad B_z = \frac{v}{c}E_y$$

电场的变换式中包含了磁场分量；磁场的变换式中包含有电场分量。电磁场是统一的实体。

电场与磁场的关联性：电荷运动时所建立的电场与磁场的关系：

$$\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}$$



## 课时十七 练习题

1. 一自感线圈中，电流强度在 $0.002s$ 内均匀地由 $10A$ 增加到 $12A$ ，此过程中线圈内自感电动势为 $400V$ ，则线圈的自感系数为 $L = \underline{\hspace{2cm}} H$ 。

2. 对于单匝线圈取自感系数的定义式为 $L = \frac{\Phi}{I}$ ，当线圈的几何形状、大小及周围磁介质分布不变，且无铁磁性物质时，若线圈中的电流强度变小，则线圈的自感系数（ ）。

A. 变大，与电流成反比关系

B. 变小

C. 不变

D. 变大，但与电流不成反比关系

3. 一圆环形线圈 $a$ 由50匝细线绕成，截面积为 $4.0cm^2$ ，放在另一个匝数等于100匝、半径为 $20.0cm$ 的圆环形线圈 $b$ 的中心，两线圈同轴。求：

(1) 两线圈的互感系数；

(2) 当线圈 $a$ 中的电流以 $50A/s$ 的变化率减少时，线圈 $b$ 内磁通量的变化率；

(3) 线圈 $b$ 的感生电动势。

4. 无限长直导线通以电流 $I = I_0 e^{-\delta t}$ 。有一与之共面的矩形线圈，其边长为 $L$ 的长边与长直导线平行。两长边与长直导线的距离分别为 $a$ 、 $b$ ，位置如图所示。

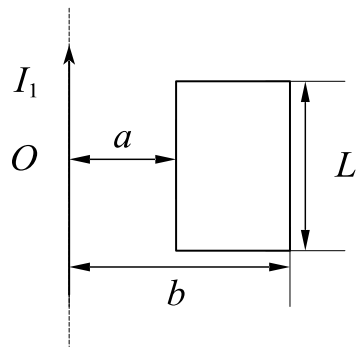
求：

(1) 在任意时刻 $t$ 通过矩形线圈的磁通量；

(2) 矩形线圈内的感应电动势的大小和感应电动势的方向；

(3) 导线与线圈的互感系数。





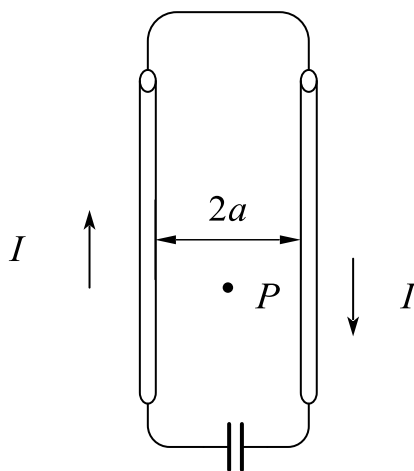
5. 电容器的能量贮存在\_\_\_\_\_中，通电螺线管磁场的能量贮存在\_\_\_\_\_中。

6. 用线圈的自感系数  $L$  来表示载流线圈磁场能量的公式  $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ 。

- A. 只适用于无限长密绕螺线管
- B. 只适用于单匝圆线圈
- C. 只适用于一个匝数很多，且密绕的螺绕环
- D. 适用于自感系数  $L$  一定的任意线圈

7. 真空中两根很长的圆筒，为  $2a$  的平行直导线与电源组成闭合回路如图，已知导线中的电流为  $I$ ，则在两导线正中间某点  $P$  处的磁能密度为（ ）。

- A.  $\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \right)^2$
- B.  $\frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \right)^2$
- C.  $\frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{\pi a} \right)^2$
- D. 0



8. 有两个长直密绕螺线管，长度及线圈匝数均相同，半径分别为  $r_1$ 、 $r_2$ ，管内充满均匀介质，其磁导率分别为  $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 。设  $r_1:r_2 = 1:2$ ， $\mu_1:\mu_2 = 2:1$ ，将两只螺线管串联在电路中通电稳定后，其自感系数之比  $L_1:L_2 =$  \_\_\_\_\_，磁能之比为  $W_{m1}:W_{m2} =$  \_\_\_\_\_。

9. 无限长密绕直螺线管通以电流  $I$ ，内部为真空，管上单位长度绕有  $n$  匝导线，则管内部的磁感应强度为 \_\_\_\_\_，内部的磁能密度为 \_\_\_\_\_。

10. 在麦克斯韦方程组中，表示变化的电场与磁场关系的方程为 ( )。

A.  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

B.  $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_i$

C.  $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

D.  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_i + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

11. 自由空间（即无自由电荷于传导电流的空间）麦克斯韦方程组的形式为：

$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} =$  \_\_\_\_\_；  $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} =$  \_\_\_\_\_；

$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} =$  \_\_\_\_\_；  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} =$  \_\_\_\_\_。

12. 位移电流和传导电流一样也是电荷的定向移动。 ( )

13. 在变化磁场空间中，如果没有导体，则此空间中不存在电场。 ( )

14. 麦克斯韦总结了从库伦到安培、法拉第以来的全部成就，针对变化的电磁场现象，提出了 \_\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_\_ 的概念，从而建立了电磁场基本方程。

15. 试举例三位对电磁学理论的创立做过贡献的科学家，并说明他们的贡献。

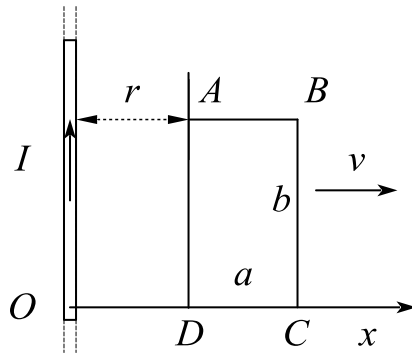
16. 一无线芯长直螺线管，在保持其半径和总匝数不变的情况下，把螺线管拉长一些，则它的自感系数将 \_\_\_\_\_（变大、变小或不变）。





17. 长为 $b$ ，宽为 $a$ 的矩形线圈 $ABCD$ 与无限长的直截流导线共面，且线圈的长边平行于长直导线，线圈以速度 $v$ 向右平动， $t$ 时刻 $AD$ 边距离长直导线为 $x$ ，且长直导线中的电流按 $I = I_0 \cos \omega t$ 规律随时间变化，如图所示。求：

- (1) 此时刻，线圈回路的磁通量；
- (2) 回路中的感应电动势 $\varepsilon$ ；
- (3) 此线圈回路的互感系数。

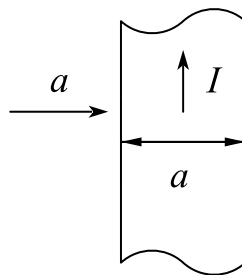


18. 矩形截面的螺绕环 ( $\mu_r = 1$ ) 绕有 $N$ 匝线圈，内、外半径分别是 $R_1$ 、 $R_2$ ，高为 $h$ ，求：

- (1) 螺绕环的自感系数？
- (2) 若螺绕环内通有电流 $I$ ，则该螺绕环储能多少？

19. 如图所示，一宽为 $a$ 的薄长金属板，其电流为 $I$ ，在薄板所在平面内，距离一边为 $a$ 处有一点 $P$ ，求：

- (1) 点 $P$ 的磁感应强度的大小和方向；
- (2) 点 $P$ 处的磁场能量密度。



## 课时十八 谐振动

考点	重要程度	题型
1. 谐振动	★★★★★	选填、简答、计算
2. 阻尼振动	★★	选填、简答
3. 受迫振动 共振	★★	选填、简答

### 1. 谐振动

定义：简谐运动是指物体运动时，离开平衡位置的位移（或角位移）按余弦函数（或正弦函数）的规律随时间变化的运动，简称谐振动。

#### 1) 谐振动的特征及其表达式

##### (1) 回复力

弹簧振子谐振动时物体受到的力的大小总是与物体对其平衡位置的位移成正比而方向相反。这种性质的力称为线性回复力。

##### (2) 弹簧振子的谐振动

振子在弹簧提供的指向平衡位置的线性回复力  $F = -kx$  作用下在平衡位置附近作周期往复的运动，其中  $k$  是弹簧的劲度系数，负号表示力和位移的方向相反。

物体的加速度

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x$$

即作谐振动物体的加速度大小总是与物体对其平衡位置的位移成正比，方向相反。

谐振动的运动方程（特征式）为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

位移表达式（运动学方程）为

$$x = A \cos(\omega t + \phi_0)$$



即弹簧振子运动时，物体相对平衡位置的位移按余弦（或正弦）函数关系随时间变化。用复指数形式表示

$$x = Ae^{i(\omega t + \phi_0)}$$

上式可直观反映出此谐振子相对平衡位置的位移随时间的变化。式中  $x$  为谐振子离开平衡位置的位移， $A$  和  $\phi_0$  为积分常数。

(3) 谐振动的位移、速度、加速度与时间的关系

位移

$$x = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

速度

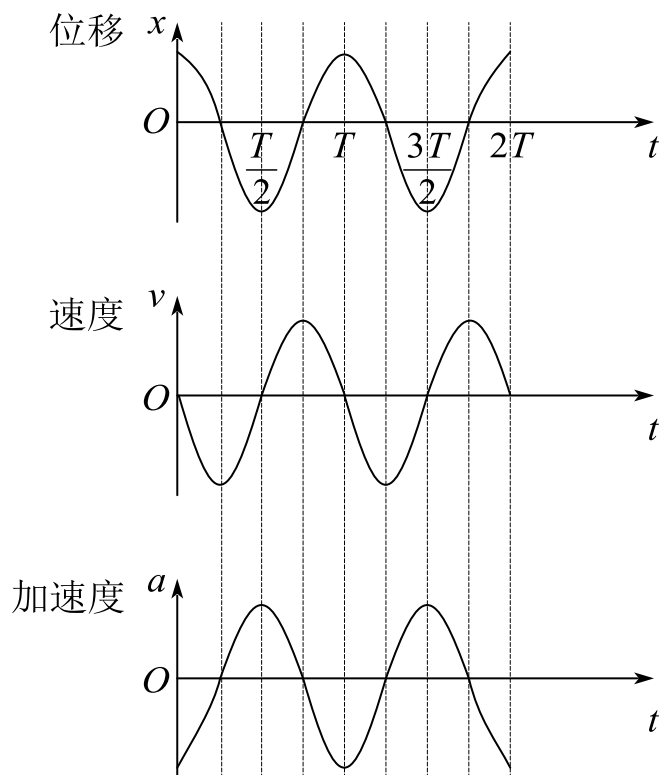
$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0) = -v_m \sin(\omega t + \phi_0)$$

加速度

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi_0) = -a_m \cos(\omega t + \phi_0)$$

式中， $v_m$  和  $a_m$  称为速度幅值和加速度幅值。物体做谐振动时，其速度和加速度也随时间作周期性变化





### 谐振动中的位移、速度、加速度与时间的关系

若在振动的起始时刻，即在  $t=0$  时，物体的初位移为  $x_0$ 、初速度为  $v_0$ ，则可求得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \phi_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

振动物体在  $t=0$  时的位移  $x_0$  和速度  $v_0$  称为振动的初始条件

**题 1.** 一质点沿  $x$  轴做简谐振动，振动方程为  $x = 4 \times 10^{-2} \cos(2\pi t + \pi/3)$  (m)，质点从  $t=0$  时刻运动到位于  $x = -2\text{cm}$  处且向  $x$  轴正方向运动的最短时间间隔为：( )。

A.  $\frac{1}{6} \text{s}$

B.  $\frac{1}{4} \text{s}$

C.  $\frac{1}{2} \text{s}$

D.  $\frac{1}{3} \text{s}$

解析：选 C。解方程然后根据图像判断相位

$$x = -2 \times 10^{-2} = 4 \times 10^{-2} \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

配套课程 习题答案



$$\therefore \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$\therefore$  向  $x$  正方向运动

$$\therefore 2\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k=0 \text{ 时, } t = \frac{1}{2} \text{ s}$$

## 2) 描述谐振动的特征量

### (1) 振幅

振幅是指作谐振动的物体离开平衡位置的最大位移的绝对值  $A$ 。

### (2) 周期

周期是指完成一次完整振动所经历的时间，用  $T$  来表示。

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

题 2. 一物体作简谐振动，振动方程为  $x = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ ，在  $t = \frac{T}{4}$  ( $T$  为周期)

时刻，物体的加速度为 ( )。

A.  $-\frac{1}{2}\sqrt{2}A\omega^2$       B.  $\frac{1}{2}\sqrt{2}A\omega^2$       C.  $-\frac{1}{2}\sqrt{3}A\omega^2$       D.  $\frac{1}{2}\sqrt{3}A\omega^2$

解析：选 B

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega}, \therefore t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} \text{ 时}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}A\omega^2$$

配套课程 习题答案



## (3) 振动频率

振动频率是指单位时间内物体所作的完全振动的次数，用  $\nu$  或  $f$  表示，单位为赫兹，符号是  $Hz$ 。

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

## (4) 角频率

角频率是指物体在  $2\pi$  秒时间内所作的完全振动次数，也称圆频率，用  $\omega$  表示，单位是  $rad/s$ 。对于弹簧振子

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

题 3. 将倔强系数为  $k$  的轻质弹簧截去一半，然后一端固定，另一端下挂质量为  $m$  的小球，组成振动系统。那么该系统的频率为（ ）。

A.  $\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$       B.  $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$       C.  $\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

解析：选 B。由  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \nu = \frac{\omega}{2\pi}$

$$\therefore \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

## (5) 相位

相位： $\omega t + \phi_0$

初相位： $\phi_0$

相位差：两个同频率谐振动  $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10})$  和  $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_{20})$  的相位差为

$$\Delta\phi = (\omega t + \phi_{20}) - (\omega t + \phi_{10}) = \phi_{20} - \phi_{10}$$



其中， $\Delta\phi = 2k\pi$ 时称两个振动同相； $\Delta\phi = (2k+1)\pi$ 时，称两个振动反相。

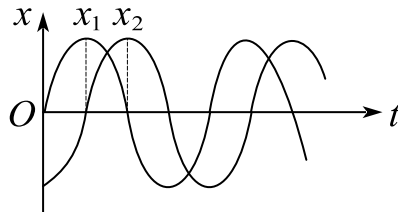
题 4. 两个同周期简谐运动曲线如图所示， $x_1$ 的相位比 $x_2$ 的相位（ ）。

A. 超前 $\pi$

B. 落后 $\pi$

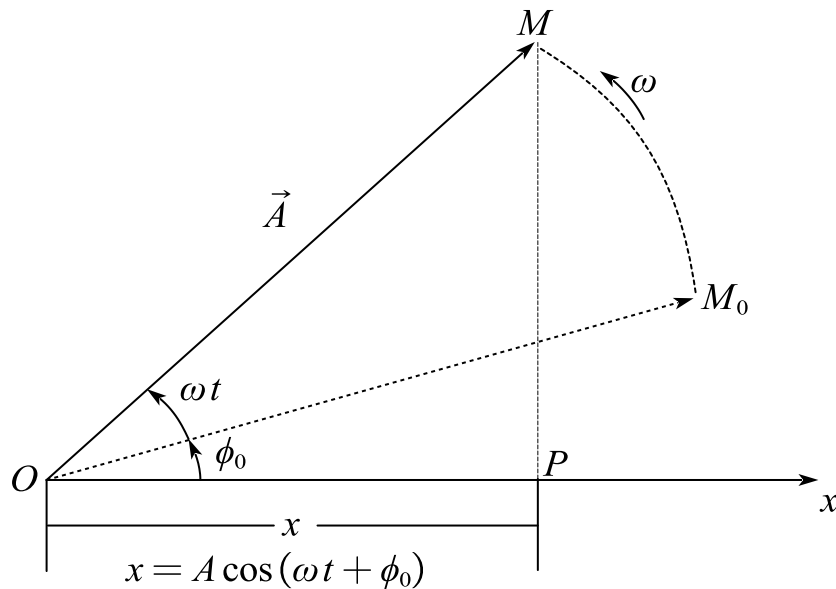
C. 超前 $\frac{\pi}{2}$

D. 落后 $\frac{\pi}{2}$



解析：选C。判断超前还是落后就看相同的相位谁先到达，很明显图中1的相位更快到达，当1到达 $\frac{\pi}{2}$ 相位时，2在0相位处，因此提前 $\frac{\pi}{2}$ 。

### 3) 谐振动的旋转矢量图示法



谐振动的矢量图示法

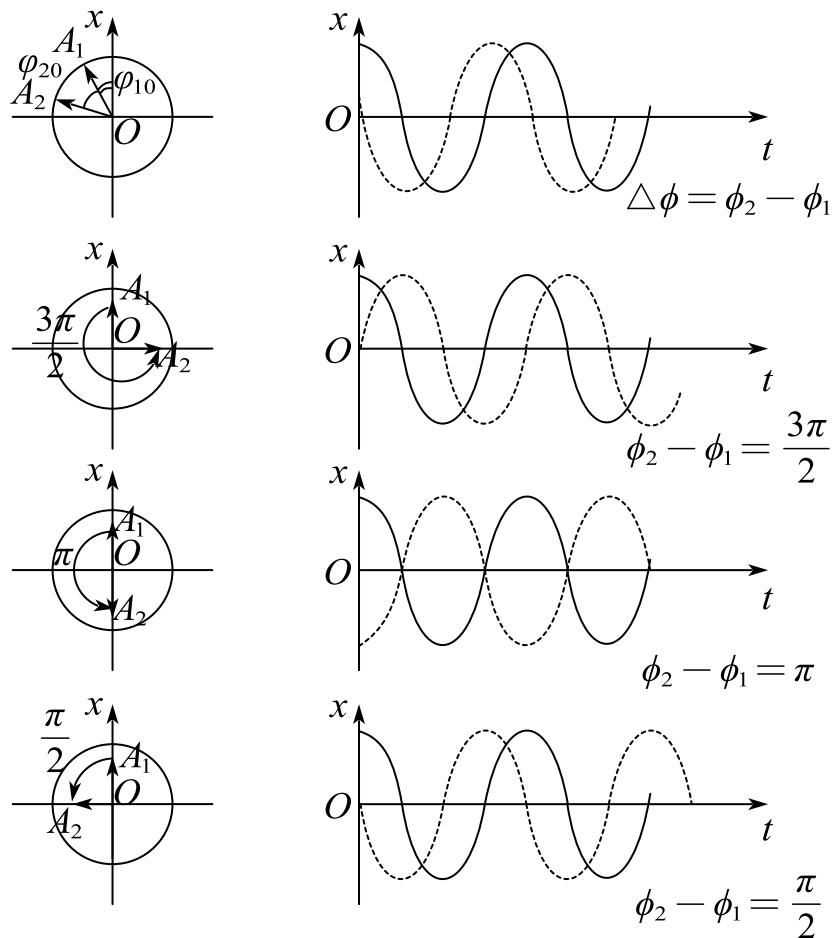
矢量 $\vec{A}$ 的末端在 $Ox$ 轴上的投影点 $P$ 的位移

$$x = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

配套课程 习题答案

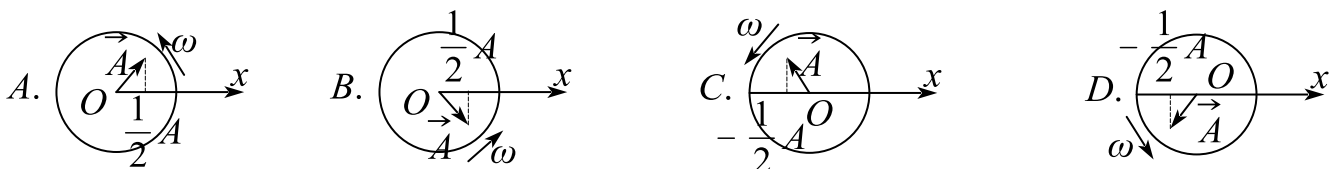


其中，矢量 $\overrightarrow{OM}$ 的长度即振动的振幅 $A$ ，矢量旋转的角速度 $\omega$ 为振动的角频率，矢量与 $Ox$ 轴的夹角为振动的相位，而 $t=0$ 时矢量与 $x$ 轴的夹角 $\phi_0$ 为初相位。



用旋转矢量表示两个谐振动的相位差

题 5. 一个质点作简谐运动，振幅为 $A$ ，在起始时刻质点的位移为 $A/2$ ，且向 $x$ 轴的正方向运动，代表此简谐振动的旋转矢量图为（ ）。



解析：选B。

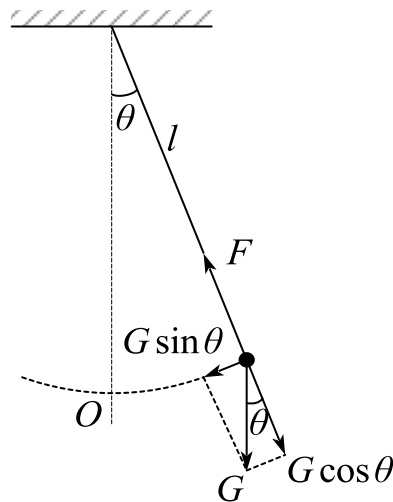
C,D 的位移为 $-\frac{A}{2}$ ；A 运动方向为 $x$ 轴负方向。





## 4) 几种常见的谐振动

## (1) 单摆



单摆

单摆是指一根不会伸缩的细线，上端固定(或一根刚性轻杆，上端与无摩擦的绞链相连)，下端悬挂一个很小的重物，把重物略加移动后可在竖直平面内来回摆动的装置. 若摆线长为 $l$ ，则有

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta = -\omega^2\theta, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

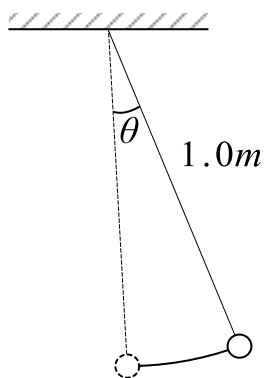
角谐振动表达式

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi_0)$$

式中， $\theta_m$ 是最大角位移，即角振幅， $\phi_0$ 为初相位，它们均由初始条件决定。

题 6. 有一单摆，长为 $1.0m$ ，最大摆角为 $5^\circ$ ，如图所示。(1) 求摆的角频率和周期；(2) 设开始时摆角最大，试写出此单摆的运动方程；(3) 摆角为 $3^\circ$ 时的角速度和摆球的线速度各为多少？





解析： (1)  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{10} \text{ rad/s}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\sqrt{10}}{5} \pi \text{ s}$$

(2)  $\theta = \frac{\pi}{36} \cos \sqrt{10} t$

(3)  $\omega_{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\sqrt{10}\pi}{36} \sin \sqrt{10} t$

当  $\theta = \frac{\pi}{60}$  时,  $\cos \sqrt{10} t = \frac{3}{5}$

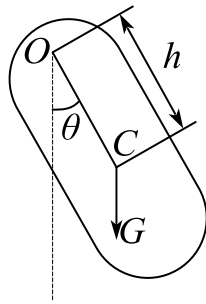
$$\therefore \sin \sqrt{10} t = \pm \frac{4}{5}$$

$$\therefore \omega \left( \theta = \frac{\pi}{60} \right) = \frac{\sqrt{10}\pi}{45} \text{ rad/s}$$

$$v = \omega l = \frac{\sqrt{10}\pi}{45} \text{ m/s}$$

## (2) 复摆





复摆

是指一个可绕固定轴 $O$ 摆动的刚体，又称物理摆。复摆绕 $O$ 轴的转动惯量为 $I$ ，摆角很小时，根据转动定律得

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\theta$$

周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}}$$

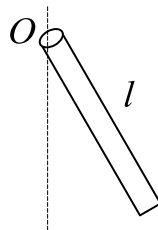
题 7. 一长为 $l$ 的均匀细棒悬于通过其一端的光滑水平固定轴上，（如图所示），作成一复摆。已知细棒绕通过其一端的轴的转动惯量 $I = \frac{1}{3}ml^2$ ，此摆作微小振动的周期为（ ）。

A.  $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

B.  $2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$

C.  $2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$

D.  $\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$



解析：选C。

$$\text{根据 } T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ml^2}{mg\frac{1}{2}l}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

配套课程 习题答案



## 5) 谐振动的能量

## (1) 谐振动的动能和势能

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi_0)$$

说明：物体作谐振动时，其动能和势能均随时间作周期性变化，位移最大时，势能达最大值，动能为零；物体通过平衡位置时，势能为零，动能达最大值，且总能量守恒。

## (2) 总机械能

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

说明：谐振系统在振动过程中的动能和势能虽然分别随时间而变化，但总的机械能在振动过程中却是常量。谐振动系统的总能量和振幅的平方成正比。

**题 8. 一弹簧振子沿  $X$  轴作简谐振动，已知振动物体最大位移为  $X_m = 0.4m$  时，最大恢复力为  $F_m = 0.8N$ ，最大速度为  $v_m = 0.8\pi m/s$ ，又知  $t = 0$  的初位移为  $0.2m$ ，且初速度与所选  $X$  轴方向相反。求：**

(1) 振动能量；

(2) 此振动的表达式

解析：(1) 由  $F = kX$  得  $k = 2N \cdot m^{-1}$

$$E = \frac{1}{2} k X_m^2 = \frac{4}{25} J$$

(2) 设  $x = \frac{2}{5} \sin(\omega t + \varphi)$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2}{5} \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

配套课程 习题答案



$$V_m = \frac{2}{5}\omega \Rightarrow \omega = 2\pi \text{ rad/s}$$

$$\therefore t=0 \text{ 时, } x = \frac{1}{5}, \sin(2\pi t + \varphi) = \frac{1}{2}$$

$$\text{得 } \varphi = \frac{5\pi}{6} \text{ 或 } \frac{\pi}{6} \text{ (舍)}$$

$$\therefore x = \frac{2}{5} \sin\left(2\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

## 6) 用能量法解谐振动问题

利用机械能守恒定律来建立振动的运动表式进行求解。

题 9. 一弹簧振子作简谐振动，当其偏离平衡位置得位移的大小为振幅的1/4时，其动能为振动总能量的（ ）。

A. 9/16

B. 11/16

C. 13/16

D. 15/16

解析：选 D

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_P = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}E$$

$$E_k = E - E_P = \frac{15}{16}E$$

## 2. 阻尼振动

### 1) 阻尼振动

无阻尼自由振动：一个振动物体不受任何阻力的影响，只在回复力作用下所作的振动。

阻尼振动：在回复力和阻力作用下的振动。

配套课程 习题答案



过阻尼：物体以非周期运动的方式慢慢回到平衡位置的阻尼振动 ( $\delta_0 > \omega_0$ )。

临界阻尼：振动物体刚好能平滑地回到平衡位置的阻尼振动 ( $\delta_0 = \omega_0$ )。

## 2) 表达式

运动方程

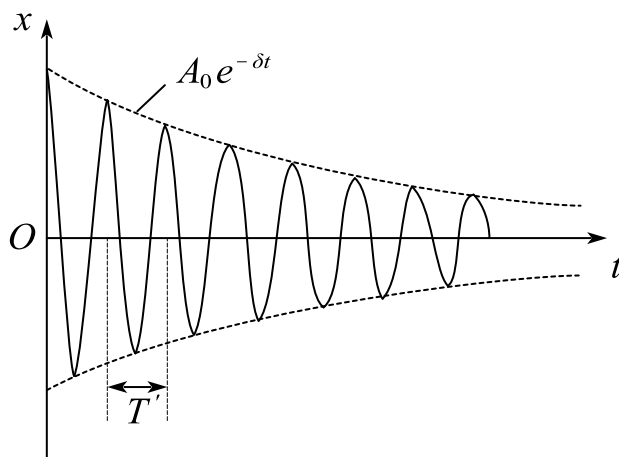
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} = \omega_0^2 x$$

其中  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $2\delta = \frac{\gamma}{m}$

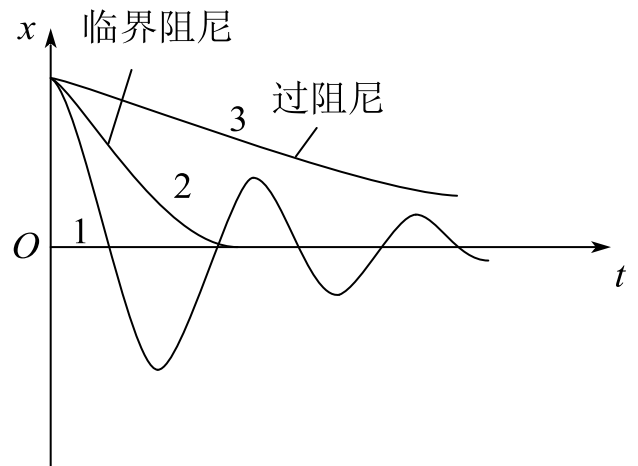
在  $\delta_0 < \omega_0$  的条件下，即阻尼较小的情况，微分方程的解为

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega' t + \phi'_0)$$

$\omega_0$  为无阻尼时振子的固有角频率， $\delta$  称为阻尼系数。



(a) 阻尼振动的位移与时间的关系



(b) 不同阻尼下的阻尼振动和阻尼过大时的非周期运动

## 3. 受迫振动 共振

### 1) 受迫振动

为了克服阻尼而给振动物体施加周期性外力（驱动力），使得振动持续进行，称为受迫振动。

### 2) 共振

配套课程 习题答案



阻尼很小时，共振的条件：受迫振动的频率等于物体的固有频率。

(1) 位移共振：

驱动力幅值恒定时，受迫振动稳态时振幅随驱动力角频率而改变，当此角频率取某值时位移振幅达到最大。

(2) 速度共振：

当驱动力角频率取某值时，稳态振动速度幅度达到最大。

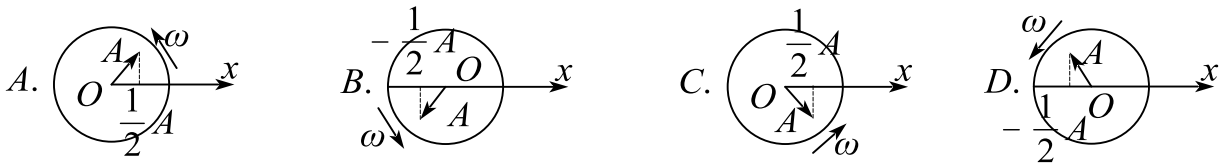


### 课时十八 练习题

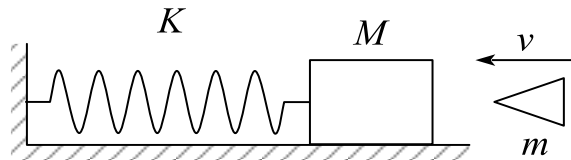
1. 弹簧振子作简谐振动，当它的速度最大时，它的（ ）。

- A. 动能最大，势能最大
- B. 动能最大，势能最小
- C. 动能最小，势能最大
- D. 动能最小，势能最小

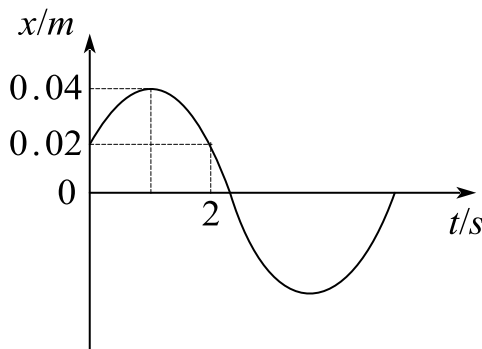
2. 一个质点作简谐运动，振幅为  $A$ ，在起始时刻质点的位移为  $-\frac{A}{2}$ ，且向  $x$  轴正方向运动，下图中代表此简谐运动的旋转矢量为（ ）。



3. 如图所示，质量为  $1.0 \times 10^{-2} \text{kg}$  的，以  $500 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度射入并嵌入在木块中，同时使弹簧压缩从而作简谐运动。设木块的质量为  $4.99 \text{kg}$ ，弹簧的劲度系数为  $8.00 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ 。若以弹簧原长时物体所在处为坐标原点，向右为  $x$  轴正方向，求简谐运动方程。



4. 已知某质点作简谐振动的曲线  $x-t$  如图所示，则该质点振动的振幅  $A = \underline{\hspace{2cm}}$ ；周期  $T = \underline{\hspace{2cm}}$ ；初相位  $\varphi = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



5. 一轻弹簧在  $60 \text{N}$  的拉力下伸长  $30 \text{cm}$ 。现把质量为  $4 \text{kg}$  的物体悬挂在该弹簧的

配套课程 习题答案





下端并使之静止，再把物体向下拉 $10\text{cm}$ ，然后由静止释放并开始计时。选 $X$ 轴向下，求

- (1) 物体的振动方程；
- (2) 物体在平衡位置上方 $5\text{cm}$ 时弹簧对物体的拉力；
- (3) 物体从第一次越过平衡位置时刻起到它运动到上方 $5\text{cm}$ 处所需要的最短时间。

6. 将一质量为 $0.5\text{kg}$ 的物体悬挂于一轻弹簧下端，弹簧上端固定。物体原先静止于平衡位置，后来在向下外力作用下运动，在弹簧伸长到一定长度后静止不动，现将外力瞬间撤掉，释放物体。已知物体振动的周期为 $2\text{s}$ ，振幅为 $10\text{cm}$ 。问：

(1) 在撤力前瞬间，作用在物体上向下的外力是多大？(2) 设平衡位置为重力和弹性势能的零点，则当物体在平衡位置以下 $5\text{cm}$ 处时，此振动系统的动能和势能各是多少？

7. 质点作周期为 $T$ ，振幅为 $A$ 的谐振动，则质点由平衡位置运动到离平衡位置 $\frac{A}{2}$ 处所需的最短时间是（ ）。

- A.  $\frac{T}{4}$       B.  $\frac{T}{6}$       C.  $\frac{T}{8}$       D.  $\frac{T}{12}$

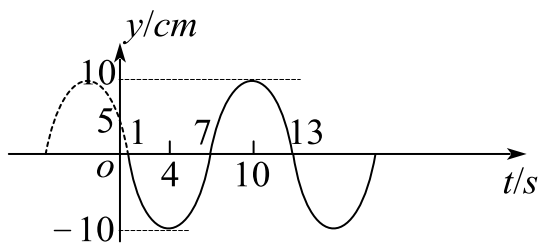
8. 一质点作简谐振动，振动方程为 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ ，当时间 $t = \frac{1}{2}T$  ( $T$ 为周期)时，质点的速度为（ ）。

- A.  $-A\omega \sin \varphi$       B.  $A\omega \sin \varphi$       C.  $-A\omega \cos \varphi$       D.  $A\omega \cos \varphi$

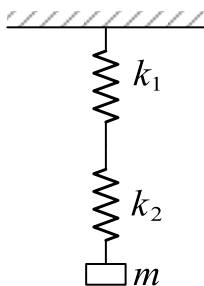
9. 在阻尼很小的情况下，受迫振动的频率取决于驱动力的频率，当驱动力的频率逐渐趋近于振动系统的固有频率时，振幅达到最大值，这种现象叫做\_\_\_\_\_。

10. 已知某简谐振动的振动曲线如图所示。求此简谐振动的振动方程。





11. 劲度系数分别为 $k_1$ 和 $k_2$ 的两个弹簧串联在一起，下面挂着质量为 $m$ 的物体，构成一个竖挂的弹簧振子，则该系统的振动周期为（ ）。



A.  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{2k_1k_2}}$

B.  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{(k_1 + k_2)}}$

C.  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1k_2}}$

D.  $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{(k_1 + k_2)}}$



## 课时十九 谐振动的合成

知识点	重要程度	题型
1. 电磁振荡	★★★★	选填、简答、计算
2. 一维谐振动的合成	★★★★★	选填、简答、计算
3. 二维谐振动的合成	★★★	选填
4. 振动的分解、频谱	★	简答
5. 非线性振动与混沌	★	简答

### 1. 电磁振荡

电路中电压和电流的周期性变化称为电磁振荡，产生电磁振荡的电路称为振荡电路。最简单的振荡电路是由一个电容器和一个电感线圈串联成的电路，即  $LC$  电路。

#### 1) $LC$ 电路的振荡

(1) 电荷电流变化规律： $t$ 时刻电容器极板上的电荷量 $q$ ：

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}q$$

令  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ ，电荷方程： $q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$  式中， $Q_0$  为极板上电荷量的最大值，称为电荷量振幅， $\varphi_0$  是振荡的初相位， $Q_0$  和  $\varphi_0$  的数值由初始条件决定， $\omega$  是振荡的角频率。

电流方程：

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega Q_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

电荷和电流均作谐振动，是等幅振荡，电荷和电流的振荡频率相同，电流的相位比电荷的相位超前  $\frac{\pi}{2}$ 。

(2)  $LC$  振荡电路中的能量

电场能量：



$$W_e = \frac{q^2}{2C^2} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

磁场能量：

$$W_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{L\omega^2 Q_0^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

总能量：

$$W = W_e + W_m = \frac{Q_0^2}{2C}$$

说明：电能和磁能随时间变化，总电磁能量保持不变。

## 2) 受迫振荡、电共振

### (1) 受迫振荡：

#### ①受迫振荡的微分方程：

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon_0 \cos \omega_d t$$

式中， $\varepsilon_0 \cos \omega_d t$  是电源的电动势

#### ②电流的幅值和相角：

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_d L - \frac{1}{\omega_d C}\right)^2}}$$

$$\tan \phi' = \frac{\frac{1}{\omega_d C} - \omega_d L}{R}$$

说明：当外加电动势的频率和自由振荡的频率相等时，电流的振幅为最大。

### (2) 电共振

电共振是指在周期性电动势作用下电流振幅达到最大值的现象。

## 3) 力电类比



表 10-1 机械振动和电磁振荡对应的物理量

机械振动	电磁振荡（串联电路）
位移 $x$	电荷 $q$
速度 $v$	电流 $i$
质量 $m$	电感 $L$
劲度系数 $k$	电容的倒数 $\frac{1}{C}$
阻力系数 $\gamma$	电阻 $R$
驱动力 $F$	电动势 $\mathcal{E}$
弹性势能 $\frac{1}{2}kx^2$	电场能量 $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
动能 $\frac{1}{2}mv^2$	磁场能量 $\frac{1}{2}Li^2$

#### 4) 交流电

##### (1) 交流电

简称“交流”。一般指大小和方向随时间作周期性变化的电压或电流。它的最基本的形式是正弦电流，正弦电流（又称简谐电流），是时间的简谐函数。

$$i = i_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$i$  为交流电的瞬时值。我国交流电供电的标准频率规定为 50 赫兹。交流电随时间变化的形式可以是多种多样的。不同变化形式的交流电其应用范围和产生的效果也是不同的。

##### (2) 交流电的相关参数

交流电的频率：频率是表示交流电随时间变化快慢的物理量。即交流电每秒钟变化的次数叫频率，用符号  $f$  表示。它的单位为赫兹，用“Hz”表示，简称赫。

$$\omega = 2\pi f, T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

交流电的峰值： $i_m$ ， $\varepsilon_m$ ， $u_m$

配套课程 习题答案



交流电的有效值：在交流电变化的一个周期内，交流电流在电阻  $R$  上产生的热量相当于多大数值的直流电流在该电阻上所产生的热量，此直流电流的数值就是该交流电流的有效值。

$$dW = i^2 R dt$$

$$W = \int_0^T i^2 R dt = I^2 RT$$

正弦交流电有效值为：

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} i_m, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} U_m$$

题 1. 对于交流电，下列说法正确的是（ ）

- A. 交流电流的方向可以不改变
- B. 交流电的最大值总是有效值的  $\sqrt{2}$  倍
- C. 若正弦交流电的最大值为  $10V$ ，则它的最小值为  $-10V$
- D. 交流电随时间变化规律是周期性的

答案：选 D；

解析：A 交流电的方向必须改变；B 只有正弦交流电才是这样；C 最小值是 0，负号表示正负极翻转，不代表大小。

## 5) 变压器和电能输送

### (1) 变压器

用来改变交流电压和电流的大小的设备。理想变压器输入功率等于输出功率  $P_1 = P_2$ 。对于原、副线圈各一组的变压器来说，原、副线圈上的电压与它们的匝数成正比；通过原、副线圈的电流强度与它们的匝数成反比。即：

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

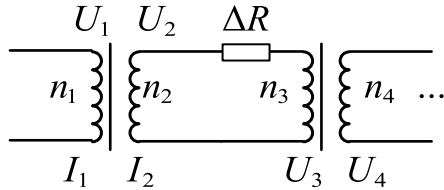
配套课程 习题答案



## (2) 电能的输送

由于送电的导线有电阻，远距离送电时，线路上损失电能较多。在输送的电功率  $P_1$  和送电导线电阻  $\Delta R$  一定的条件下，提高送电电压，减小送电电流强度可以达到减少线路上电能损失的目的。线路中电流强度和损失电功率计算式如下：

$$I = \frac{P_1}{U_2}, \quad \Delta P = I^2 \Delta R$$

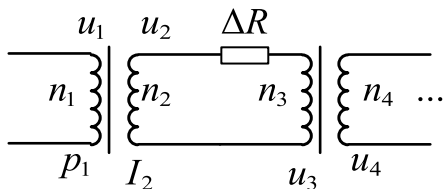


题 2. 一交流发电机的输出电压为  $240V$ ，输出功率为  $48KW$ ，采用  $1:10$  的变压器进行高压输电，输电线路的电阻为  $10\Omega$ 。欲使用户得到  $220V$  的照明电压，求

(1) 用户变压器的匝数比：

(2) 线路上损失的电压：

解：



$$(1) \quad I_2 = \frac{P_1}{u_2}, \quad u_2 = \frac{n_2}{n_1} u_1$$

$$u_3 = u_2 - I_2 \Delta R$$

$$\frac{n_3}{n_4} = \frac{u_3}{u_4} = 10$$

$$(2) \quad \Delta u = I_2 \Delta R = 200V$$



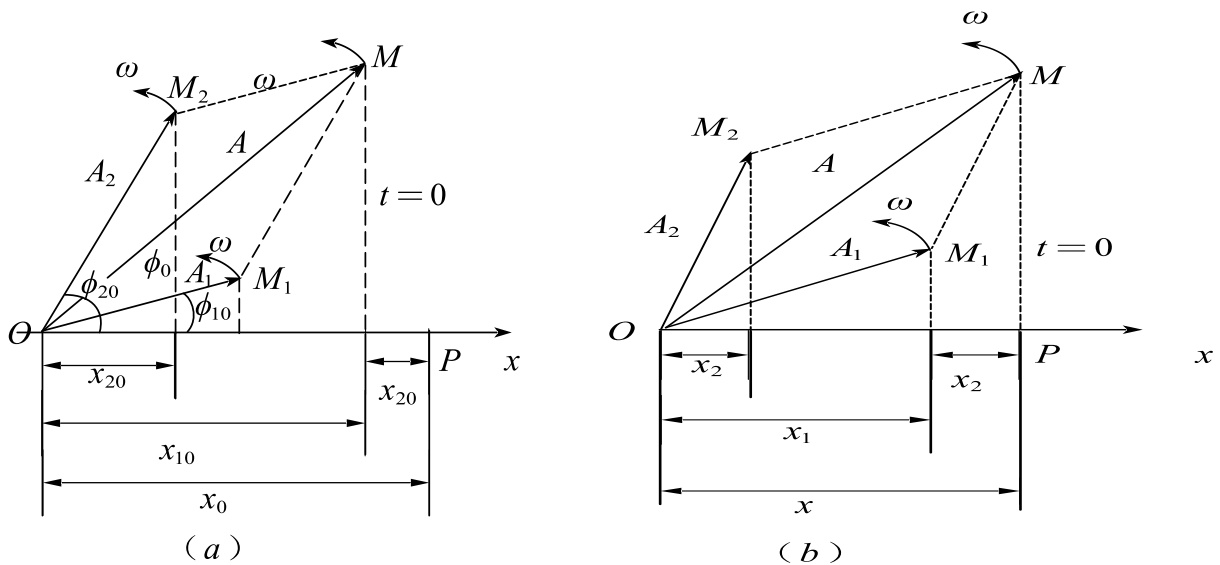
## 2. 一维谐振动的合成

### 1) 同一直线上两个同频率的谐振动的合成

一条直线上两个独立的同频率谐振动，它们的振幅和初相位不同，会形成一定的合运动。因位移为矢量，合位移可由代数和算出：

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10}) + A_2 \cos(\omega t + \phi_{20}) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

式中， $A_1$ 、 $A_2$ 、 $\phi_{10}$ 、 $\phi_{20}$  分别为原来两个谐振动的振幅和相位。



合成后，振幅和初相位变化为：

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_{20} - \phi_{10})}$$

$$\tan \phi_0 = \frac{A_1 \sin \phi_{10} + A_2 \sin \phi_{20}}{A_1 \cos \phi_{10} + A_2 \cos \phi_{20}}$$

说明：合振动仍是谐振动，其振动方向和频率都与原来的两个振动相同。

常用到的两种合成是同相振动的合成以及反相振动的合成，分别对应合振动振幅的最大值和最小值。

同相合振动：

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$$

反相合振动：

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$$





题 1. 有两个同方向、同频率的简谐运动，运动学方程分别为：

$x_1 = 3 \cos(2\pi t + \pi) \text{ cm}$ ， $x_2 = 4 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$ ，求它们合振动的运动学方程。

解：  $x = A \cos(2\pi t + \phi_0)$

$$\therefore A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \frac{\pi}{2}} = 5$$

$$\tan \phi_0 = \frac{A_1 \sin \phi_{10} + A_2 \sin \phi_{20}}{A_1 \cos \phi_{10} + A_2 \cos \phi_{20}} = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore x = 5 \cos \left[ 2\pi t + \arctan \left( -\frac{4}{3} \right) \right]$$

2) 同一直线上两个不同频率的谐振动的合成、拍

(1) 同一直线上两个不同频率的谐振动的合成

两个角频率很接近，分别为 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ ，且 $\omega_2 > \omega_1$ ，而初相相同的谐振动的振动方程为：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_0)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_0)$$

根据运动叠加原理，两者的合振动：

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_0) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_0)$$

为方便计算，设两者的振幅相等，即令 $A_1 = A_2 = A$ ，则上式可写成：

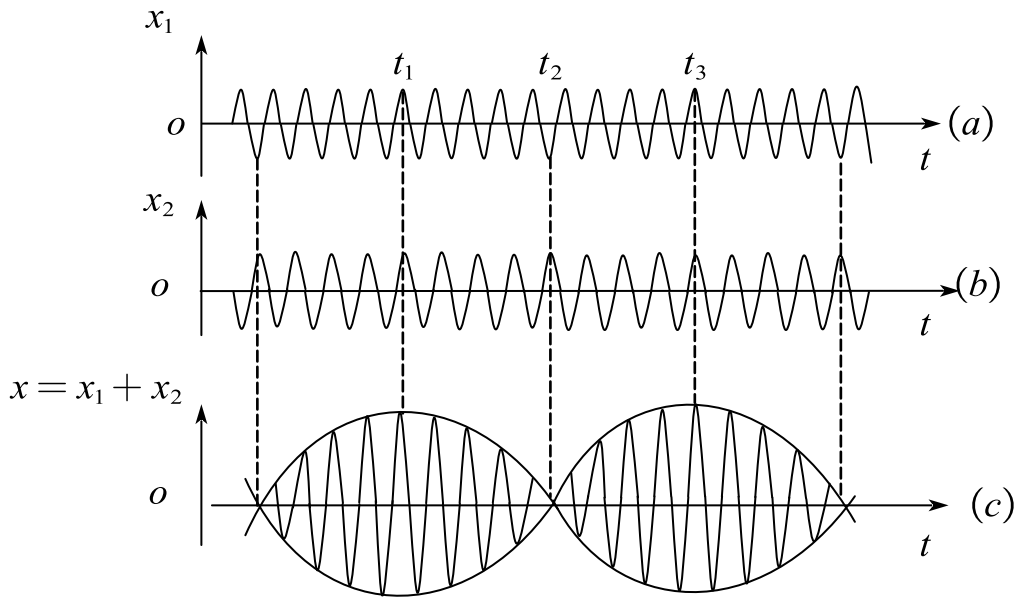
$$x = 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \left( \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \phi_0 \right)$$

说明：振幅的缓慢变化是周期性的，所以振动出现时强时弱的拍现象。

(2) 拍：

合振动的振幅随时间发生周期性变化的现象，称作拍。





振幅变化的频率称作拍频：

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} \right| = |\nu_2 - \nu_1|$$

拍频的数值等于两分振动频率之差。

拍现象常用于汽车速度监视器、地面卫星跟踪、各种电子学测量仪器等

**题 2. 两个同方向同频率的简谐振动，其振动表达式分别为：**

$$\cdots x_1 = 6 \times 10^{-2} \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \cdots \cdots (SI)$$

$$\cdots x_2 = 2 \times 10^{-2} \sin(\pi - 5t) \cdots \cdots (SI)$$

**它们的合振动的振幅为\_\_\_\_\_，初位相为\_\_\_\_\_。**

解析：  $x_1 = 0.06 \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$

$$x_2 = 0.02 \cos\left(5t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\pi} = 0.04 \text{ m}$$

$$\tan\varphi_0 = \frac{0.06 - 0.02}{0 + 0} = \infty$$

配套课程 习题答案



$$\therefore \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore x = 0.04 \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$$

### 3. 二维谐振动的合成

#### 1) 两个相互垂直的、同频率的谐振动的合成

设两个谐振动分别在  $Ox$  轴和  $Oy$  轴上进行，振动表式分别为：

$$x = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10})$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \phi_{20})$$

式中， $\omega$  为两个振动的角频率， $A_1$ 、 $A_2$  和  $\phi_{10}$ 、 $\phi_{20}$  分别为两振动的振幅和初相位。将参量  $t$  消去，得到轨道的直角坐标方程：

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\phi_{20} - \phi_{10}) = \sin^2(\phi_{20} - \phi_{10})$$

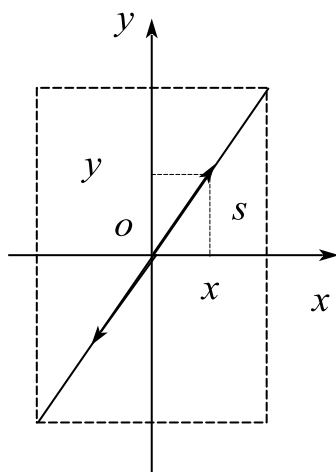
#### 2) 几种特殊情形的合运动

(1)  $\phi_{20} - \phi_{10} = 0$ ，即两振动同相质点的轨道是一条直线：

$$\frac{x}{A_1} = \frac{y}{A_2}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

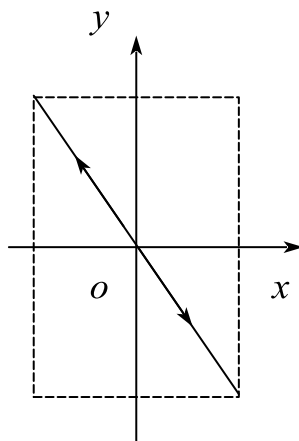


(a)  $\phi_{20} - \phi_{10} = 0$ 

(2)  $\phi_{20} - \phi_{10} = \pi$ ，即两振动反相质点的轨道是一条直线：

$$\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} = 0$$

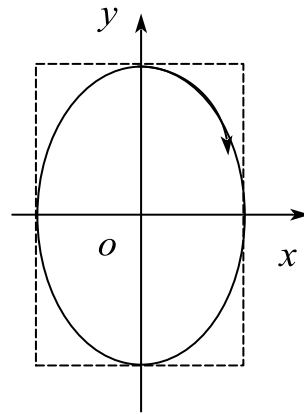
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

(b)  $\phi_{20} - \phi_{10} = \pi$ 

(3)  $\phi_{20} - \phi_{10} = \frac{\pi}{2}$ ，质点运动的轨道是以坐标轴为主轴的椭圆。

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

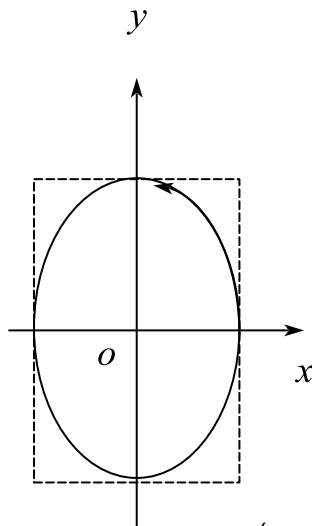




(c)  $\phi_{20} - \phi_{10} = \frac{\pi}{2}$

(4)  $\phi_{20} - \phi_{10} = -\frac{\pi}{2}$ ，质点运动的轨道是以坐标轴为主轴的椭圆，运动方向与

(3) 反向



(d)  $\phi_{20} - \phi_{10} = \frac{3}{2}\pi$  (或  $-\frac{1}{2}\pi$ )

(5) 李萨如图形：

两振动的频率为其他比值的曲线。

#### 4. 振动的分解、频谱

##### 1) 振动的分解

傅里叶指出：任一周期性函数都可以下列形式的谐函数表示：

配套课程 习题答案



$$f(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n), (n = 1, 2, 3, \dots)$$

式中， $A_0$ 、 $A_n$ 称为傅里叶系数。

利用傅里叶级数，任一周期振动可以分解成几个甚至无穷多个谐振动，它们的频率为原周期性振动频率的整数倍。

## 2) 振动的频谱

若用横坐标表示各个谐频振动的频率，纵坐标表示对应的振幅，可得谐频振动的振幅分布图，称为振动的频谱。

## 5. 非线性振动与混沌

### 1) 非线性振动

振动物体在非线性回复力作用下所作的振动为非线性振动。

### 2) 混沌

又称混沌运动，是在一个非线性方程所描述的确定性系统中出现貌似不规则的运动，其特征表现为对初态的敏感性和对未来的不可预见性。



## 课时十九 练习题

1. 远距离送电的输电线一定时,如果以原来电压的 10 倍输送同样功率的电能时,输电线上损耗的电功率为原来的 ( )

A.  $\frac{1}{10}$

B.  $\frac{1}{100}$

C.  $\frac{1}{1000}$

D.  $\frac{1}{10000}$

2. 同方向、同频率两个分振动表达式各为:  $x_1 = 6 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) (cm)$  和  $x_2 = 8 \cos(2\pi t + \pi) (cm)$ , 则合振动的振幅  $A = \underline{\hspace{2cm}}$ ; 合振动的初相位中  $\phi = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 一质点同时参加了两个同方向、同频率的简谐运动, 其运动方程分别为:  $x_1 = A_1 \cos \omega t$ ;  $x_2 = A_2 \cos(\omega t - \pi)$ ,  $A_1 > A_2$ , 其合振动的频率  $\nu = \underline{\hspace{2cm}}$ ; 合振动的振幅  $A = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 一质点同时参与了三个同方向的简谐振动, 他们的运动方程分别为:

$$x_1 = 0.01 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) (SI), \quad x_2 = 0.01 \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) (SI) \text{ 和}$$

$$x_3 = 0.01 \cos\left(2t + \frac{5\pi}{6}\right) (SI), \text{ 则其和振动的运动方程是 ( )}$$

A.  $x = 0.02 \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) (SI)$

B.  $x = 0.01 \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) (SI)$

C.  $x = 0.02 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) (SI)$

D.  $x = 0.01 \cos\left(2t + \frac{5\pi}{6}\right) (SI)$

5. 一个质点同时参加两个振动方向相同, 频率相同, 振幅都为  $A$  的的简谐振动, 当两个分振动同相时, 合振动的振幅为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 两个同方向、同频率的简谐振动, 其振动方程分别为:  $x_1 = 2 \cos(5t) (SI)$  和



$x_2 = 2 \cos\left(5t + \frac{2\pi}{3}\right)$  (SI), 则它们合振动的振幅为\_\_\_\_\_

7. 已知两个同方向的简谐振动:  $x_1 = 0.04 \cos(10t + \pi/3)$ ,

$x_2 = 0.03 \cos(10t + \phi)$ 。则:  $x_1 + x_2$  最小时,  $\phi$  为\_\_\_\_\_

8. 两振动分别为  $x_1 = 2 \cos \omega t$  (SI) 和  $x_2 = 4 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$  (SI), 则合振动的振幅

为: ( )

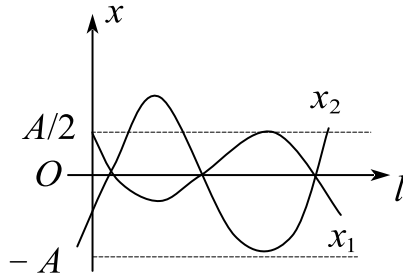
A.  $6m$

B.  $2\sqrt{5}m$

C.  $6\sqrt{5}m$

D.  $2m$

9. 图中所画的是个简谐报动的振动曲线, 振动周期为 1。若这两个简谐振动可叠加, 则合成的余弦动方程为\_\_\_\_\_。





## 课时二十 机械波

考点	重要程度	占分	题型
1. 机械波的产生和传播	★★★★★	3~6	选填、简答、计算
2. 平面简谐波的波函数	★★★★★★	6~10	选填、计算
3. 波动方程 波速	★★★	6~10	选填、计算

### 1. 机械波的产生和传播

#### 1) 机械波产生的条件

波源和弹性介质。

#### 2) 横波和纵波

横波：质点振动方向与波传播方向垂直，如水波，绳索的振动传播。

纵波：质点振动方向与波传播方向平行，如声波。

简谐波：作谐振动的波，任一机械波都可以看成是简谐波的合成。

#### 3) 波阵面和波射线

##### (1) 波阵面（波面）

波面：某一时刻振动相位相同的点连成的面，波面是同相面。

波前：传播方向最前面的波面。

平面波：波阵面是平面的波动。

球面波：波阵面是球面的波动。

##### (2) 波射线（波线）

波射线是指波的传播方向。

#### 4) 波长、频率和波速间的关系

振幅  $A$ ：每个质点振动的振幅；

波长  $\lambda$ ：同一波线上相邻的振动状态相同的质点间距离；

周期  $T$ ：波传过一个波长的时间，或一个完整的波通过波线上某点所需的时间。周期的倒数称为频率  $\nu$ ；

波速  $u$ ：单位时间内振动状态传播的距离。波速也是相速；

配套课程 习题答案



波长、频率和波速间的关系： $u = v\lambda$

例 1. 一平面简谐波沿  $x$  轴正方向传播， $x$  轴上有相距小于一个波长的  $A$ 、 $B$  两点， $B$  点的振动比  $A$  点延迟  $1/24\text{s}$ ，相位比  $A$  点落后  $\pi/6$ ，则此波的频率为( )。

A. 2Hz      B. 4Hz      C. 6Hz      D. 8Hz

答案：A； $\frac{t}{T} = \frac{\pi/6}{2\pi} \Rightarrow T = \frac{1}{2}\text{s}$ ， $v = \frac{1}{T} = 2\text{Hz}$

## 2. 平面简谐波的波函数

### 1) 波函数

波函数表示介质中各质点的振动状态随时间变化的关系。

### 2) 平面简谐波的波函数

#### (1) 波函数的表达式

对于传播的波面为平面的平面简谐波，波线上任一点（距原点为  $x$ ）处的质点任一瞬时的位移，称为沿  $Ox$  轴正方向前进的平面简谐波的波函数，表达式为：

$$y(x,t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right]$$

其中  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  更为角频率， $\phi_0$  为初相位。

沿  $Ox$  轴负方向前进的平面简谐波的波函数，表达式为：

$$y(x,t) = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right]$$

#### (2) 波函数的物理意义

波函数反映了波的时间、空间双重周期性：在给定  $x$  时，波函数给出  $x$  处质点的周期谐振动；在给定  $t$  时，波函数给出  $t$  时刻的简谐振动波形；在  $x$  和  $t$  都变化时，波函数表示波线上各个不同质点在不同时刻的位移。



## (3) 波函数的其他表示形式

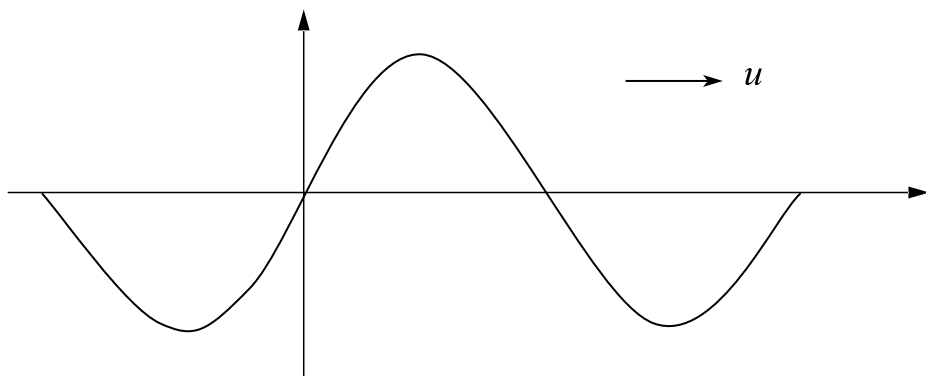
波函数是行波，其他表示形式有

$$y = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right) + \phi_0 \right] = A \cos \left[ 2\pi \left( vt \mp \frac{x}{\lambda} \right) + \phi_0 \right]$$

$$y = A \cos \left[ \omega t \mp \frac{2\pi x}{\lambda} + \phi_0 \right] = A \cos [\omega t \mp kx + \phi_0]$$

式中， $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  称为角波数，表示单位长度上波相位变化。

题 1. 一平面简谐波以  $u = 400\text{m/s}$  波速在均匀介质沿  $x$  轴正向传播。位于坐标原点处质点的振动周期为  $0.01\text{s}$ ，振幅为  $0.1\text{m}$ ，取原点处质点经过平衡位置且向负向运动时作为计时起点，求：(1) 波函数；(2) 距原点为  $2\text{m}$  处  $P$  点的振动方程。



解：(1) 设：  $y = \frac{1}{10} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{400} \right) + \phi_0 \right]$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 200\pi \text{ rad/s}$$

$$y(0, 0) = \frac{1}{10} \cos \phi_0 = 0$$

$$\therefore \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{3\pi}{2} \text{ (舍)}$$

$$\therefore y = \frac{1}{10} \cos \left[ 200\pi \left( t - \frac{x}{400} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$



$$(2) y(2,t) = \frac{1}{10} \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

### 3. 波动方程 波速

#### 1) 波动方程

将平面简谐波波函数分别对  $t$  和  $x$  求二阶偏导数，得到

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right]$$

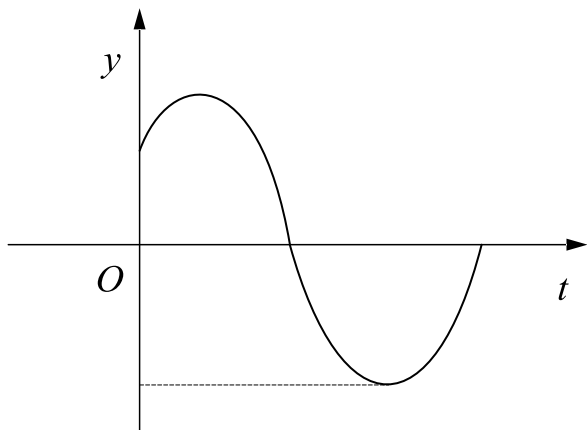
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A\frac{\omega^2}{u^2} \cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right]$$

比较两式，即得波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

**例 1.** 一平面简谐波沿  $x$  正方向传播，传播速度为  $20\text{cm/s}$ 。已知波源在原点，其振幅为  $8\text{cm}$ ，周期为  $2\text{s}$ ， $t=0$  时波源在  $y$  轴上的位移为  $4\text{cm}$ ，且  $y$  正方向运动。写出 (1) 波源的振动方程；(2) 该列波的波动方程；(3) 写出距原点为  $2\text{m}$  处的质点的振动方程。

解析：(1)



易得  $A = 0.08$ ， $T = 2\text{s}$ ， $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s}$



$$\therefore \varphi_0 = -\frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{\pi}{3} \text{ (舍)}$$

$$\therefore y = \frac{2}{25} \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(2) \text{ 波函数为 } y(x, t) = \frac{2}{25} \cos\left[\pi\left(t - \frac{x}{0.2}\right) + \varphi_0\right]$$

$$\text{易知 } \varphi_0 = -\frac{\pi}{3}, \therefore y = \frac{2}{25} \cos\left[\pi(t - 5x) - \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\text{波动方程 } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 25 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$(3) y(2, t) = \frac{2}{25} \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

## 2) 波速

### (1) 柔软绳索和弦线中横波的波速

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

式中， $F$  为弦内张力， $\rho_1$  为弦的线密度（单位长度的质量）。

### (2) 固体内纵波的波速

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

式中， $E$  为固体的弹性模量（杨氏模量）， $\rho$  为固体的密度。

### (3) 固体内横波的波速

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

式中， $G$  为固体的切变模量， $\rho$  为固体的密度。

### (4) 流体中纵波的波速



$$u = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

式中， $K$  为流体的体积模量， $\rho$  为流体的密度。

(5) 理想气体中的声速

$$u = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

声波在气体中传播时可以视为绝热过程。式中， $M$  是气体的摩尔质量， $\gamma$  是气体的热容比， $p$  是气体的压强， $T$  是气体的温度， $R$  是摩尔气体常量。

由上可知，机械波的波速仅决定于介质的弹性和惯性。



## 课时二十 练习题

1. 频率为100Hz，传播速度为300m/s的平面简谐波，波线上距离小于长的两点振动的相位差为 $\frac{\pi}{3}$ ，则此两点相距（ ）。

- A. 2.85m      B. 2.19m      C. 0.5m      D. 0.25m

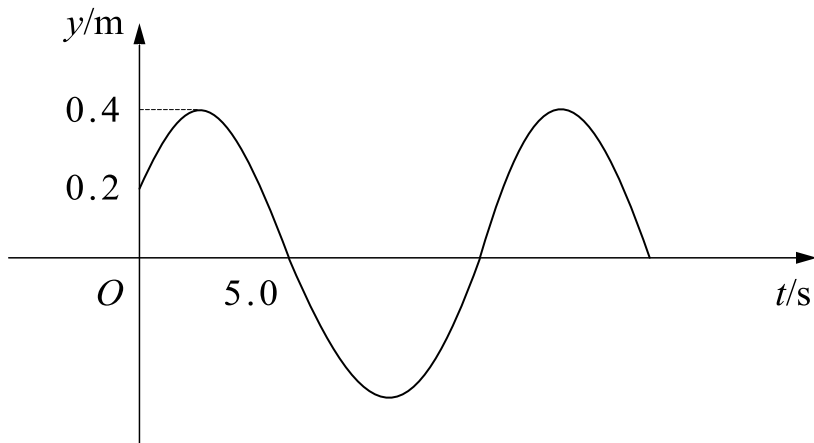
2. 在平面简谐波传播过程中，沿波的传播方向相距 $5\lambda$ （ $\lambda$ 为波长）的两点的振动速度必定（ ）。

- A. 大小相等，二方向相反      B. 大小和方向均相同  
C. 大小不同，而方向相同      D. 大小不同，方向相反

3. 在下面集中说法中，正确的说法是：

- A. 波源不动时，波源的震动周期与波动的周期在数值上不同的  
B. 波源振动的速度与波速相同  
C. 在波传播方向上的任一质点振动相位总是比波源的相位滞后（按差值不大于 $\pi$ 计）。  
D. 在波传播方向上的任一质点的振动相位总是比波源相位超前。（按差值不大于 $\pi$ 计）

4. 有一波长为6m的平面简谐波，沿 $x$ 轴正向传播。图示为 $x = 2.0\text{m}$ 处的振动曲线，求此平面简谐波的波动表达式。



5. 关于机械振动和机械波的关系，有以下几种说法：

配套课程 习题答案

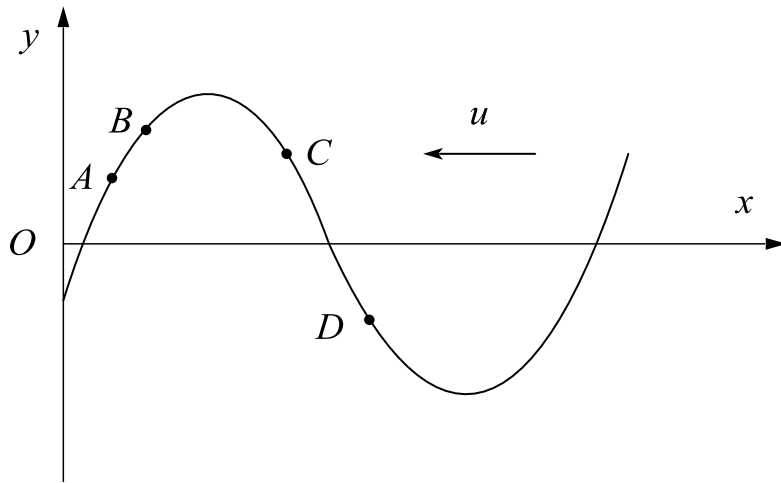


- (1) 如果没有机械振动，一定没有机械波；  
 (2) 有机械振动，一定有机械波产生；  
 (3) 机械波的频率与波源的振动频率一样；  
 (4) 机械波的波速与波源的振动速度一样。

下列对上述说法判断正确的是 ( )。

- A. 只有 (1) 是正确的  
 B. (1) (2) 正确，(3) (4) 错误  
 C. (1) (3) 正确，(2) (4) 错误  
 D. (1) (2) (3) (4) 都正确

6. 如图所示，有一横波在时刻  $t$  沿  $Ox$  轴负方向传播，则在该时刻 ( )。

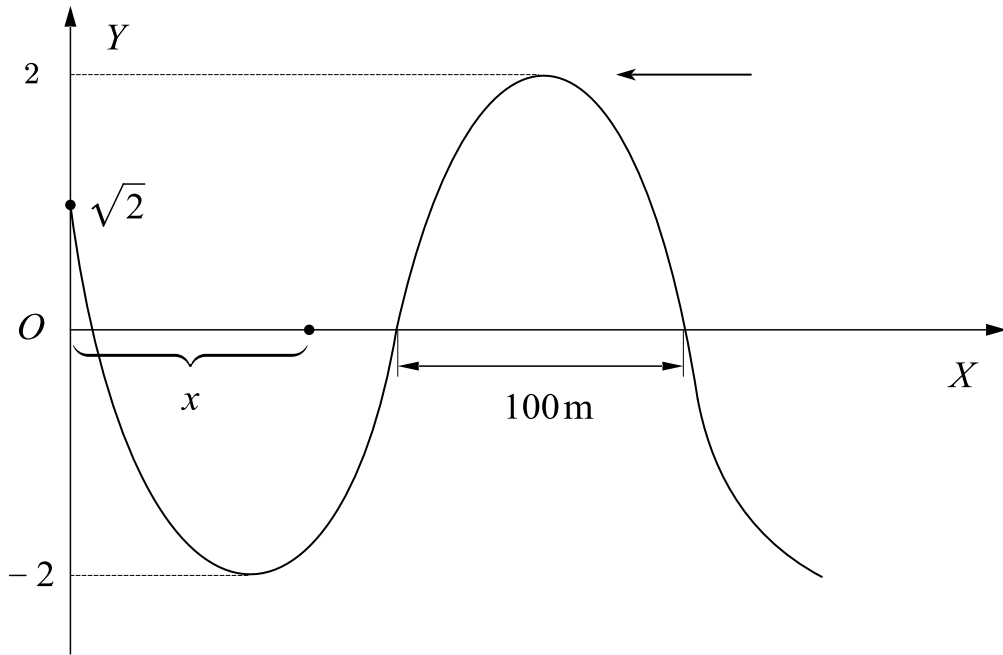


- A. 质点  $A$  沿  $Oy$  轴负方向运动  
 B. 质点  $B$  沿  $Ox$  轴负方向运动  
 C. 质点  $C$  沿  $Oy$  轴负方向运动  
 D. 质点  $D$  沿  $Oy$  轴正方向运动

7. 某一平面简谐波在  $t = 0$  时刻的波形如图所示，设此简谐波的频率为  $50\text{Hz}$ ，且此时在原点的质点运动方向向下。求：(1) 该波的波函数；(2) 在距  $O$  点  $100\text{m}$  处质点  $B$  的振动方程与振动速度的表达式。





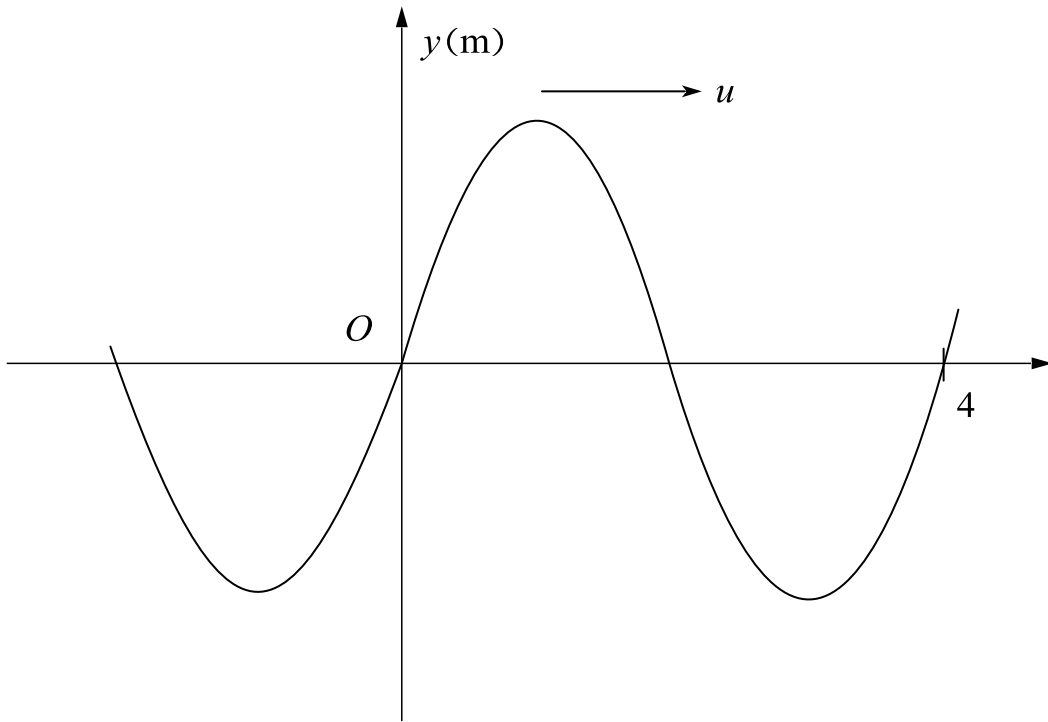


8. 一平面简谐波以波速  $u = \frac{2}{3} \text{ m/s}$  沿  $x$  轴正方向传播，其振幅  $A = 5 \text{ m}$ ， $t = 2 \text{ s}$  时

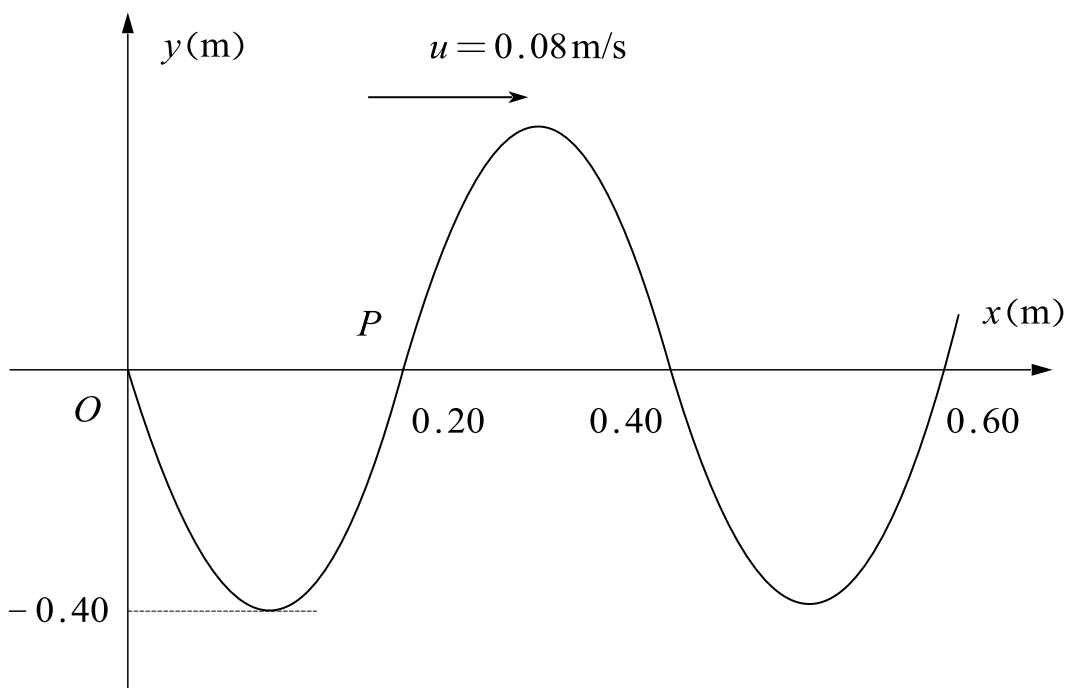
的波形曲线如图所示，求：

- (1) 该波的波长  $\lambda$  和周期  $T$ ；
- (2)  $t = 2 \text{ s}$  时  $O$  点的速度方向；
- (3)  $O$  点的振动方程；
- (4) 该波的波动表达式。





9. 如下图示一平面简谐波在  $t = 0$  时刻的波形图，求该波点的波动方程。

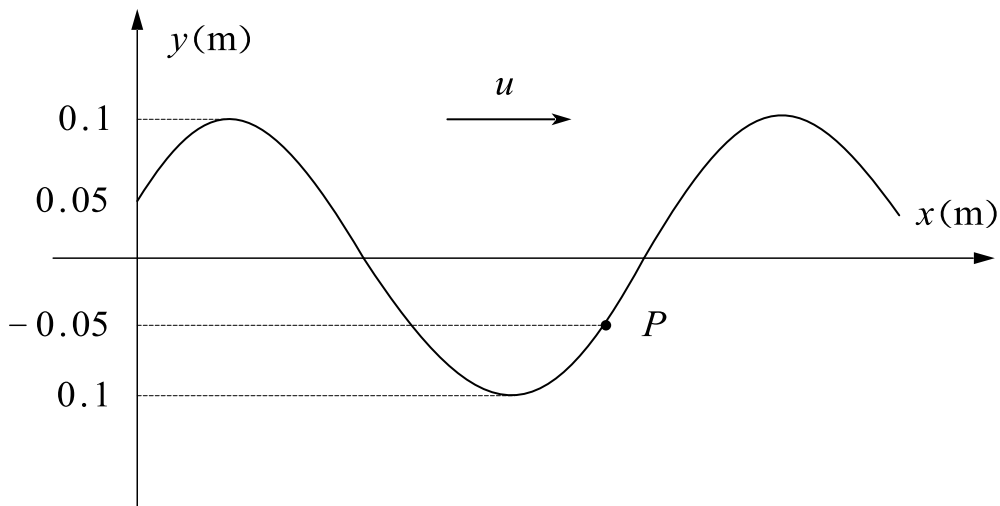


10. 一列机械波沿  $x$  轴正向传播， $t = 0$  时的波形如图所示，已知波速为  $10\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，波长为  $2\text{m}$ ，求：

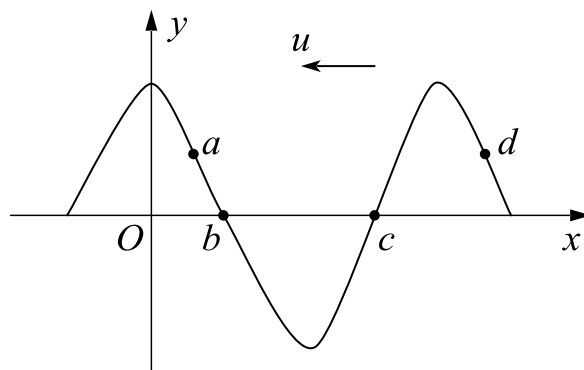
- (1) 波动方程；
- (2)  $P$  点的振动方程；



(3)  $P$  点的坐标。



11. 横波以波速  $u$  沿  $x$  轴负方向传播， $t$  时刻的波形曲线如右图所示，则该时刻 ( )。



- A.  $a$  点的振动速度大于零
- B.  $b$  点静止不动
- C.  $c$  点向下运动
- D.  $d$  点的振动速度小于零

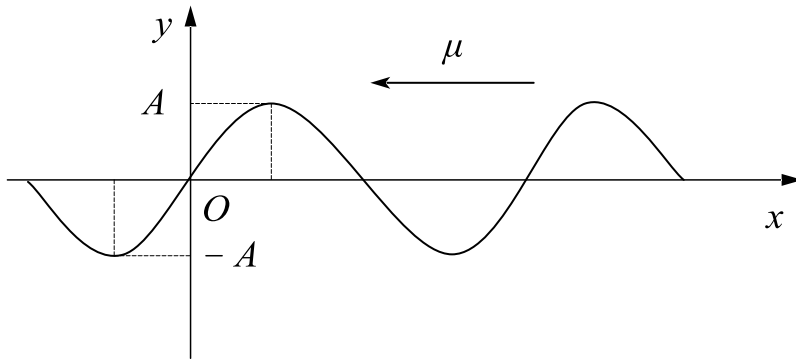
12. 当一列机械波在弹性介质中由近向远传播的时候，下列描述错误的是 ( )。

- A. 机械波传播的是介质原子
- B. 机械波传播的是介质原子的振动状态
- C. 机械波传播的是介质原子的振动相位
- D. 机械波传播的是介质原子的振动能量

13. 一平面简谐波，沿  $x$  轴负方向传播，角频率为  $\omega$ ，波速为  $u$ ，设  $t = \frac{T}{4}$  时刻的



波形如图所示，则该波的表达式为（ ）。



A.  $y = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) + \pi \right]$       B.  $y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$

C.  $y = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$       D.  $y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \pi \right]$

14. 一列平面简谐波沿  $x$  轴正向传播，波函数形式

$$y = 0.6 \cos \left( 4\pi t - 2\pi x + \frac{3\pi}{2} \right) (SI).$$

(1) 试求波速  $u$  和波长  $\lambda$ ；

(2) 若  $P$  点处  $x = 0.20\text{m}$ ， $Q$  点处  $x = 0.45\text{m}$ ，试求  $t$  时刻  $PQ$  两点振动的相位差  $\Delta\varphi$ ；

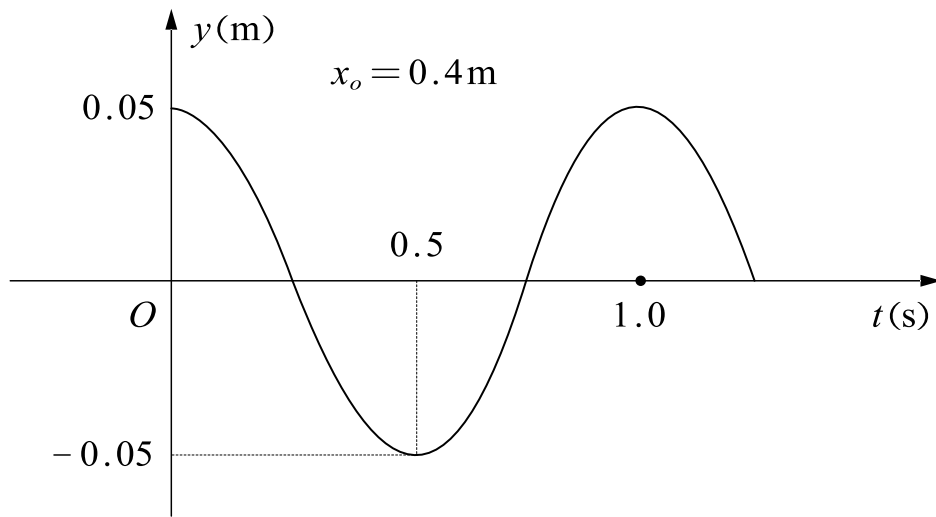
(3) 试给出  $t = 0.625\text{s}$  时， $x = 1\text{m}$  处的质点的位移。

15. 一平面波以  $u = 0.8\text{m/s}$  的速度沿  $Ox$  轴负方向传播，已知距坐标原点  $x_0 = 0.4\text{m}$  处质点的振动曲线如图所示，试求：

(1)  $x_0 = 0.4\text{m}$  处质点的振动方程；

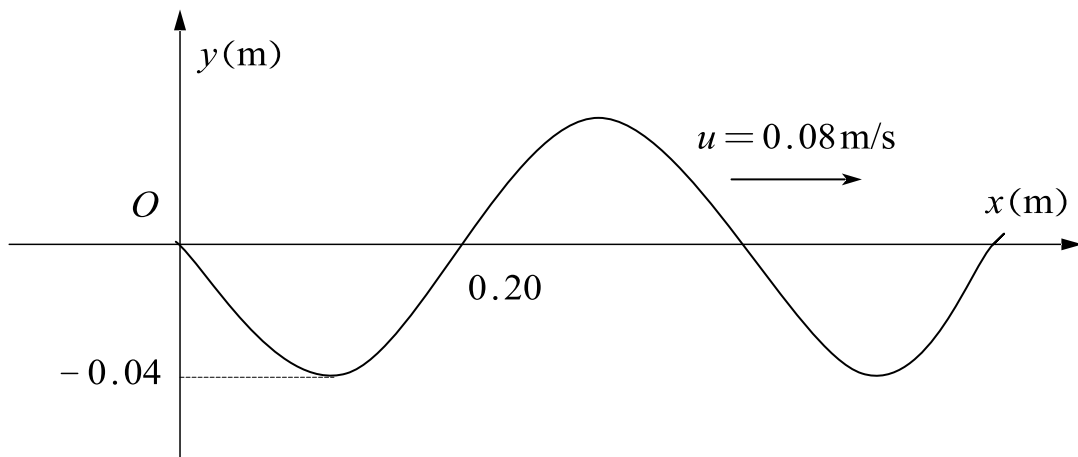
(2) 该平面波的波动方程。





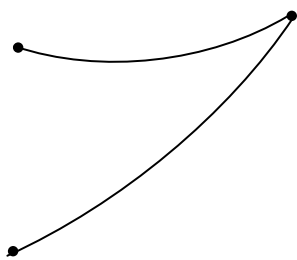
16. 下图所示为一平面简谐波在  $t = 0$  时刻的波形图，求：

- (1) 波的周期；
- (2)  $O$  处质点振动方程；
- (3) 该波的波动方程。



17. 两相干平面简谐波沿不同方向传播，如图所示，波速均匀为  $u = 0.40\text{m/s}$ ，其中一列波在  $A$  点引起的振动方程为  $y_1 = A_1 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ ，另一列波在  $B$  点引起的振动方程为  $y_2 = A_2 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ ，它们在  $P$  点相遇， $\overline{AP} = 0.80\text{m}$ ， $\overline{BP} = 1.00\text{m}$ ，则两波在  $P$  点的相位差为 ( )。





- A. 0      B.  $\pi/2$       C.  $\pi$       D.  $3\pi/2$



## 课时二十一 波的能量

考点	重要程度	占分	题型
1. 波的能量 波的强度	★★★	1~2	选填、计算
2. 声波 超声波 次声波	★★	1~2	选填、简答
3. 电磁波	★★★	1~2	选填、计算

### 1. 波的能量 波的强度

#### 1) 波的能量

在介质中任取体积为  $\Delta V$  质量为  $\Delta m$  ( $\Delta m = \rho \Delta V$ ,  $\rho$  为介质的体密度) 的质元, 当波动传播到这个质元时, 该质元将具有动能  $\Delta E_k$  和弹性势能  $\Delta E_p$

$$\Delta E_k = \Delta E_p = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right]$$

质元的总机械能  $\Delta E$  :

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \phi_0 \right]$$

能量密度

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$$

平均能量密度

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$$

式中,  $\rho$  是介质的密度。

**题 1. 当机械波在媒质中传播时, 一媒质质元的最大变形量发生在 ( ) .**

- A. 媒质质元离开其平衡位置最大位移处
- B. 媒质质元离开其平衡位置 ( $\sqrt{2} A/2$ ) 处 ( $A$  是振动振幅)
- C. 媒质质元在其平衡位置处



D. 媒质质元离开其平衡位置  $\frac{1}{2}A$  处 ( $A$  是振动振幅)

答案: C

解析: 最大形变量对应最大弹性势能, 弹性势能在平衡位置处取得最大。

## 2) 波的强度

能流: 单位时间通过介质某面积的能量。

平均能流密度 (波的强度): 通过与波动传播方向垂直的单位面积的平均能流。

$$I = \bar{w}u = \frac{1}{2}\rho u A^2 \omega^2 = \frac{1}{2}Z A^2 \omega^2$$

其中,  $Z = \rho u$  为介质的特性阻抗, 是表征介质特性的一个常量。

题 2. 在一半径为  $10\text{cm}$  的圆柱形管子里, 一平面简谐空气波沿轴向传播, 波长和频率分别为  $\lambda = 80\text{cm}$ ,  $\nu = 425\text{HZ}$ , 波的能流密度为  $1.7 \times 10^{-2} \text{w/m}^2$ , 试求:

(1) 管中波的平均能量密度和最大能量密度;

(2) 每两个相邻同相位面间的总能量.

解: (1)  $I = \bar{w}u \quad \therefore \bar{w} = \frac{I}{u}$

$$u = \lambda\nu \quad \therefore \bar{w} = 5 \times 10^{-5} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \quad w_m = 2\bar{w} = 1 \times 10^{-4} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

(2) 为一个周期的能量

$$E = \bar{w}\Delta V \quad \Delta V = \pi r^2 \lambda \quad \therefore E = 4\pi \times 10^{-7} \text{ J}$$

## 3) 波的吸收

平面行波在均匀介质中传播时, 介质总是要吸收波的一部分能量, 波的强度和振幅都将逐渐减小, 所吸收的波动能量将转换成其他形式的能量 (例如介质的





内能)，这种现象称为波的吸收。

题 3. 机械波在介质中传播时，下列说法不正确的是（ ）。

- A. 机械波在介质中传播的是振动状态
- B. 机械波在介质中传播是能量
- C. 机械波在介质中传播的是相位
- D. 机械波在介质中传播的是质点

答案：D

解析：机械波传播的不是质点，而是把上一个质点的运动状态传给下一个质点。

## 2. 声波 超声波 次声波

### 1) 声压

声压：介质中有声波传播时的压强与无声波时的静压强之间的差额。

声压振幅： $p_m = \rho u \omega A$

### 2) 声强 声强级

#### (1) 声强

声强是指声波的平均能流密度，即单位时间内通过垂直于声波传播方向的单位面积的声波能量。

$$I = \frac{1}{2} \rho u A^2 \omega^2 = \frac{p_m^2}{2\rho u}$$

#### (2) 声强级

常用对数标度作为声强级的量度。

$$I_L = \lg \frac{I}{I_0}$$

单位为贝尔 (*bel*)，常采用分贝 (*dB*)，声强级的公式为： $I_L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$

噪声：大于  $90\text{dB}$  对人的工作和健康有影响的声。



题 1. 下列说法中，正确的是 ( )。

- A. 声波能够在真空中传播
- B. 波动的周期与波源的周期数值相同
- C. 机械波通过不同媒质时，波长保持不变
- D. 波速与波的频率有关

答案：B

解析：A：声波不可以在真空中传播；C：机械波通过不同媒介波长可能发生变化；D：波速和频率无关。

### 3) 超声波

超声波是指频率在20000HZ以上的机械波。利用超声波的特性可以探测鱼群、潜艇等，还可以探测工件内部的缺陷作无损探伤，探测人体内部的病变，进行焊接、切削、钻孔等超声加工，清洗、粉碎、乳化等。

题 2. 一声纳装置向海水中发出超声波，其波的表达式为：

$y = 1.2 \times 10^{-3} \cos(3.14 \times 10^5 t - 220x)$  (SI)，则此波在海水中声速  $u =$  \_\_\_\_\_  
m/s.

答案：  $\frac{15700}{11}$

解析：  $220 = 3.14 \times 10^5 \frac{1}{u} \quad \therefore u = \frac{15700}{11} \text{ m/s}。$

### 4) 次声波

次声波是指频率范围大致为  $10^{-4} \sim 20 \text{ HZ}$  的机械波。次声波会引起人体的危害，如恶心、头晕或精神沮丧等，应用次声波可预测自然灾害的产生。

配套课程 习题答案



题 3. 声波在空气中的波速为 $340\text{m/s}$ ，在铁轨中的波速为 $5000\text{m/s}$ ，那么在空气中波长为 $1\text{m}$ 的声波，在铁轨中传播的波长为\_\_\_\_\_  $\text{m}$ .

答案： $\frac{250}{17}$ ，波源频率不变

解析： $v = \frac{u}{\lambda} \quad \frac{u_1}{\lambda_1} = \frac{u_2}{\lambda_2} \quad \therefore \lambda_2 = \frac{5000}{340} = \frac{250}{17} \text{m}$

### 3. 电磁波

#### 1) 电磁波的辐射和传播

电磁波是横波，由交替变化的电场和磁场产生，是电场强度 $\vec{E}$ 和磁场强度 $\vec{H}$ 在空间的传播。

#### 2) 电磁波的性质

##### (1) 电磁波是横波

$\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 和传播方向构成右手螺旋关系；

##### (2) 电磁波具有偏振性

偏振是指 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 分别在各自平面内振动；

##### (3) $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 同相位

##### (4) $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的量值成比例

$$\sqrt{\varepsilon} E = \sqrt{\mu} H$$

##### (5) 传播速度

$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ；在真空中为光速，即 $2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$



题 1. 一简谐平面电磁波在真空中沿  $x$  轴传播, 已知电场强度  $\vec{E}$  在  $y$  方向上振动, 振幅为  $E_0$ , 则磁场强度在\_\_\_\_\_方向上振动, 且振幅  $H_0 =$ \_\_\_\_\_.

答案:  $z$ ;  $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0$

解析: 磁场方向和电矢量方向垂直, 和传播方向垂直, 因此沿着  $z$  轴; 振幅根据  $\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H$  计算。

### 3) 电磁波的能量

辐射能: 电磁波所携带的电磁能量。

#### (1) 能量密度

电场和磁场的能量体密度分别为:  $w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2$ ,  $w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$

电磁波所携带的总电磁能(即辐射能)密度为:

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2)$$

式中  $\epsilon$  和  $\mu$  分别为介质的介电常量和磁导率;

#### (2) 能流密度矢量

又称为坡印廷矢量, 表示在单位时间内通过垂直于传播方向的单位面积的辐射能,  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ ;

题 2. 真空中, 一平面电磁波沿  $x$  轴正向传播。已知电场强度为  $E_x = 0$ ,  $E_y = E_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$ ,  $E_z = 0$ , 则磁场强度是:  $H_x =$ \_\_\_\_\_,  $H_y =$ \_\_\_\_\_,  $H_z =$ \_\_\_\_\_, 能流平均密度  $\bar{S} =$ \_\_\_\_\_.

答案:  $0$ ;  $0$ ;  $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \right]$ ;  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2$



$$\text{解析: } \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cos^2 \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \vec{i} \quad \therefore \bar{S} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2。$$

#### 4) 电磁波谱

电磁波谱：按照频率或波长的顺序把电磁波排列而成的图表。

题 3. 为了使需要传递的信息(如声音、图像等)载在电磁波上发射到远方，必须对振荡电流进行\_\_\_\_\_；使接收电路产生电谐振的过程叫\_\_\_\_\_；要接收到载有信号的电磁波，并通过耳机出声音，在接收电路中必须经过的过程是\_\_\_\_\_。

答案：调制；调谐；解调

解析：把数字信号转换成电话线上传输的模拟信号；解调，即把模拟信号转换成数字信号；调谐指的是调节一个振荡电路的频率使它与另一个正在发生振荡的振荡电路（或电磁波）发生谐振。



## 课时二十一 练习题

1. 当一平面简谐机械波在弹性媒质中传播时，下述各结论（ ）是正确的。
  - A. 媒质质元的振动动能增大时，其弹性势能减小，总机械能守恒
  - B. 媒质质元的振动动能和弹性势能都作周期性变化，但二者的相位不相同
  - C. 媒质质元的振动动能和弹性势能的相位在任一时刻都相同，但二者数值不相等
  - D. 媒质质元在其平衡位置处弹性势能最大
2. 下述关于弹性介质中机械波的说法，错误的是（ ）。
  - A. 介质中每个质元都作机械振动
  - B. 机械波的频率增加时，波的传播速度也随之增加
  - C. 如果质元的振动方向与波的传播方向平行，则为纵波
  - D. 介质中每个质元的动能和势能周期性、同步变化
3. 一平面简谐波在弹性媒质中传播，在媒质质元从最大位移处回到平衡位置的过程中：（ ）。
  - A. 它的势能转换成动能
  - B. 它的动能转换成势能
  - C. 它把自己的能量传给相邻的一段媒质质元，其能量逐渐减小
  - D. 它从相邻的一段媒质质元获得能量，能量逐渐增加
4. 已知两频率相同的平面简谐波的强度之比为 $a$ ，则这两列波的振幅之比为\_\_\_\_\_.
5. 一平面简谐波在弹性媒质中传播，在某一瞬间，媒质中某质元正处于平衡位置，此时它的能量是（ ）。
  - A. 动能为零，势能最大
  - B. 动能为零，势能为零
  - C. 动能最大，势能最大
  - D. 动能最大，势能为零



6. 一平面电磁波沿  $-y$  方向传播，某时刻在空间某处电场指向  $x$  方向，则此时该处的磁场指向\_\_\_\_\_方向.
7. 麦克斯韦预言了电磁波的存在，由\_\_\_\_\_从实验中发现了电磁波，平面电磁波是\_\_\_\_\_.
8.  $RLC$  振荡电路，原来发射的电磁波的波长为  $\lambda$ ，要使它发射的电磁波的波长变为原来的一半，在不改变自感系数的情况下，电路中的电容应变为原来的( ).
- A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\sqrt{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
9. 在真空中沿着  $z$  轴负方向传播的平面电磁波，其电场强度的表达式为  $E_z = -E_m \cos[\omega(t + z/c)]$  (SI)，则其磁场强度的表达式应为\_\_\_\_\_.
10. 一平面简谐波在弹性媒质中传播时，在传播方向上媒质中某质元在负的最大位移处，则它的能量是：( ).
- A. 动能为零，势能最大                      B. 动能为零，势能为零
- C. 动能最大，势能最大                      D. 动能最大，势能为零
11. 在同一媒质中两列频率相同的平面简谐波的强度之比  $I_1/I_2 = 16$ ，则这两列波的振幅之比是  $A_1/A_2 =$ \_\_\_\_\_.
12. 每秒做100次全振动的波源产生的波，它的频率是100HZ，如果波速是10m/s，则波长是\_\_\_\_\_m.
13. 下列关于电磁波的说法错误的是( ).
- A. 赫兹通过实验证明了麦克斯韦关于电磁波的预言
- B. 电磁波的速度与真空中的光速相同，因此光波属于电磁波
- C. 所有强度的电磁辐射都会导致人体的细胞或器官遭到损伤，诱发严重的病变
- D. 电磁振荡在空间的传递称为电磁波
14. 声音在空气中的传播速度约为340m/s，一频率为200HZ的声波沿直线传播，



在经过相距为 $0.85m$ 的两点时，该声波的相位变化量为（ ）。

A. 0

B.  $\frac{\pi}{2}$

C.  $\pi$

D.  $\frac{3\pi}{2}$





## 课时二十二 波的性质

知识点	重要程度	题型
1. 惠更斯原理、波的衍射、反射和折射	★★	选填
2. 波的叠加原理、波的干涉、驻波	★★★	选填、简答、计算
3. 多普勒效应	★★★	选填、计算

### 1. 惠更斯原理、波的衍射、反射和折射

#### 1) 惠更斯原理

在波的传播过程中，波阵面(波前)上每一点都可看作是发射子波的波源，在其后的任一时刻，这些子波的包迹成为新的波阵面。

优点：惠更斯原理给出了波的传播规律，可以解释波的直线传播、反射、折射、双折射、衍射等现象。

缺点：不能说明各个子波在传播中对某一点振动的相位和振幅的贡献度。

#### 2) 波的衍射

波的衍射：波在传播过程中遇到障碍物时，在传播方向绕过障碍物发生偏折。

衍射现象可由惠更斯原理解释：平面波在障碍物处子波的包迹在边缘处不是平面，使得传播方向偏离原方向向外延展。

#### 3) 波的反射和折射

##### (1) 反射和折射的产生

波动从一种介质传到另一种介质时，在两种介质的分界面上，传播方向要发生变化，产生反射和折射现象。

##### (2) 波动的反射定律

入射角等于反射角；入射线、反射线和分界面的法线均在同一平面内。

##### (3) 波动的折射定律

不论入射角大小如何，入射角的正弦与折射角的正弦之比都等于波动在第一介质中的波速与第二介质中的波速之比；入射线、折射线和分界面的法线在同一平面内。



题 1. 机械波从一种介质进入另一种介质时，以下哪个物理量不变（ ）

- A. 波长；
- B. 波速；
- C. 频率；
- D. 传播方向

答案：C

解析：频率由波源振动频率决定，和介质无关。

## 2. 波的叠加原理、波的干涉、驻波

### 1) 波的叠加原理

波的叠加原理：在几个波相遇的区域内，任一时刻某处质点的振动位移是各个波在该点所引起的位移的矢量和。

### 2) 波的干涉

干涉现象：两列频率相同、振动方向相同、相位差恒定的简谐波在空间区域相遇，该区域不同的点，有着不同的恒定相位差，因而在某些点振动始终加强，在另一些点振动始终减弱或完全抵消。

干涉现象可由波的叠加原理定量解释。设两列相干波在某点  $P$  相遇，两波引起  $P$  的振动分别为

$$y_1 = A_1 \cos \left( \omega t + \phi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda} \right)$$

$$y_2 = A_2 \cos \left( \omega t + \phi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda} \right)$$

可得到  $P$  点波强度

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi$$



式中， $\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10} - \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}$  为两波在  $P$  的位相差，可见波强度随空间位置的变化。

合振幅最大为  $A = A_1 + A_2$ ，其条件为：

$$\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10} - \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = 2k\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

合振幅最小为  $A = |A_1 - A_2|$ ，其条件为：

$$\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10} - \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = (2k + 1)\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

对于同相相干波源， $\phi_{20} = \phi_{10}$ ：

合振幅最大为条件为：

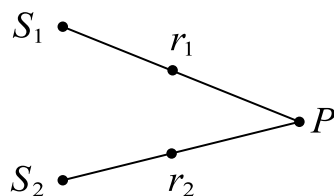
$$\delta = r_2 - r_1 = k\lambda, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

合振幅最小条件为：

$$\delta = r_2 - r_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

说明：两列相干波源为同相位时，在两列波的叠加区域内，在波程差等于零或等于波长的整数倍的各点，振幅最大；在波程差等于半波长的奇数倍的各点，振幅最小。

题 1. 如图所示，两列波长为  $\lambda$  的相干波在点  $P$  相遇，波在点  $S_1$  振动的初相是  $\phi_1$ ，点  $S_1$  到点  $P$  的距离是  $r_1$ ，波在点  $S_2$  的初相是  $\phi_2$ ，点  $S_2$  到点  $P$  的距离是  $r_2$ ，以  $k$  代表零或正、负整数，则点  $P$  是干涉极大的条件为 ( )



A.  $r_2 - r_1 = k\lambda$



$$B. \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$$

$$C. \varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi(r_1 - r_2)/\lambda = 2k\pi$$

$$D. \varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda = 2k\pi$$

答案：D

解析：干涉极大： $\Delta\varphi = 0$  或  $\delta = k\lambda$

即： $r_2 - r_1 = k\lambda$  或

$$S_1 \text{ 在 } P \text{ 点产生的相位： } \varphi_1' = \varphi_1 + \frac{r_1}{\lambda} 2\pi$$

$$S_2 \text{ 在 } P \text{ 点产生的相位： } \varphi_2' = \varphi_2 + \frac{r_2 2\pi}{\lambda}$$

$$\therefore \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 + \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = 2k\pi$$

### 3) 驻波

#### (1) 概念

驻波：各质点只有段与段之间的相位突变，没有振动状态或相位的逐点传播。

波节：驻波中始终静止不动的点。

波腹：振幅最大的各点。

把沿  $Ox$  轴的正方向传播的波写为

$$y_1 = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

把沿  $Ox$  轴的负方向传播的波写为

$$y_2 = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

其合成波为



$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \cos \frac{2\pi}{T} t$$

(2) 位置的判断

波腹的位置

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = k\lambda, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$x = k \frac{\lambda}{2}$$

相邻两个波腹间的距离

$$x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2}$$

波节的位置:

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = (k + \frac{1}{2})\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$x = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$$

可见相邻两个波节之间的距离  $\frac{\lambda}{2}$

题 2. 两列波在同一直线上传播，其表达式分别为  $y_1 = 6 \cos(4\pi t - 0.02\pi x)$ ，

$y_2 = 6 \cos(4\pi t + 0.05\pi x)$  (SI 制)。则驻波方程为\_\_\_\_\_波节的位置为  $x =$ \_\_\_\_\_。

答案:  $y = 12 \cos 4\pi t \cdot \cos 0.02\pi x$ ;  $x = 25 + 50k(m) (k = 1, 2, 3 \dots)$

解析:  $y = y_1 + y_2 = 6[\cos(4\pi t - 0.02\pi x) + \cos(4\pi t + 0.02\pi x)]$

$$= 12 \cos 4\pi t \cdot \cos 0.02\pi x$$

波节:  $\cos 0.02\pi x = 0$

$$\therefore x = 25 + 50k(m) (k = 1, 2, 3 \dots)$$

配套课程 习题答案



## 4) 弦线上的驻波

驻波现象的应用:

弦线的两端拉紧固定(或细棒的两端固定), 当拨动弦线时, 弦线中产生经两端反射而成的两列反向传播的波, 叠加后形成驻波. 由于在两固定端必须是波节, 因而其波长有一定限制, 波长与弦长  $L$  必须满足条件

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}, \lambda_n = \frac{2L}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$v_n = n \frac{u}{2L}, n = 1, 2, 3, \dots$$

即只有波长(或频率)满足上述条件的一系列波才能在弦上形成驻波。

各种允许频率所对应的驻波称为简正模式, 相应的频率称为简正频率。

题 3. 一细线上做驻波式振动, 其方程为  $y = 1.0 \cos \frac{\pi x}{3} \cos 40\pi t$ ,  $x, y$  的单位  $cm$ ,

$t$  的单位  $s$ , 则两列分波的传播速度为\_\_\_\_\_驻波相邻两波节之间的距离是\_\_\_\_\_。

答案:  $120m/s$ ;  $3m$

解析:  $\frac{\pi}{3} = \frac{40\pi}{u} \Rightarrow u = 120 \text{ cm/s}$

$$\text{波节: } \frac{\pi}{3}x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\therefore x = \frac{3}{2} + 3k$$

$$\therefore \Delta x = 3 \text{ cm}$$

## 5) 半波损失

相距半波长的两点相位差为  $\pi$  的相位突变。

波密介质: 密度  $\rho$  与波速  $u$  的乘积  $\rho u$  较大的介质。

配套课程 习题答案



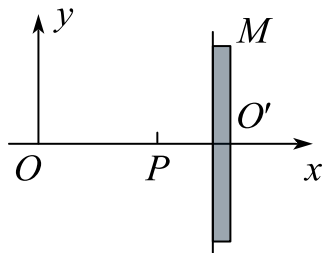
波疏介质：密度  $\rho$  与波速  $u$  的乘积  $\rho u$  较小的介质。

光密介质：折射率  $n$  较大的介质。

光疏介质：折射率  $n$  较小的介质。

当波从波疏介质传播到波密介质，在分界面处反射时，反射点出现波节，就是说，入射波在反射点反射时有相位  $\pi$  的突变

题 4. 如图，一角频率为  $\omega$ ，振幅为  $A$  的平面简谐波沿  $x$  轴正方向传播，设在  $t=0$  时该波在 origin  $O$  处引起的振动使媒质元由平衡位置向  $y$  轴的负方向运动。 $M$  是垂直于  $x$  轴的波密媒质反射面。已知  $OO' = 7\lambda/4$ ， $PO' = \lambda/4$  ( $\lambda$  为该波波长)；设反射波不衰减，求：



(1) 入射波与反射波的表达式；

(2)  $P$  点的振动方程。

解：(1) 设入射波： $y_1 = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$

$$\therefore y_1 = A \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{\pi}{2} \right)$$

由题得反射波会有  $\pi$  的相位突变

$$\therefore y_2 = A \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(2) \quad OP = \frac{3\lambda}{2}, \quad \Delta\varphi = 3\pi$$



$$\therefore y_{1p} = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_{2p} = A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore y_p = y_{1p} + y_{2p} = 0$$

### 3. 多普勒效应

#### 1) 机械波的多普勒效应

##### (1) 多普勒效应

多普勒效应是指因波源或观察者相对于介质的运动，而使观察者接收到的波的频率有所变化的现象。

##### (2) 三种情况

波源不动，观察者以速度  $v_R$  相对于介质运动，观察者接收到的频率

$$v_R = \frac{u + v_R}{u} v_S$$

观察者不动，波源以速度  $v_S$  相对于介质运动，观察者接收到的频率

$$v_R = \frac{u}{u - v_S} v_S$$

观察者与波源同时相对介质运动，观察者接收到的频率

$$v_R = \frac{u + v_R}{u - v_S} v_S$$

式中， $v_R$  为观察者向波源方向运动速率， $v_S$  为波源向观察者方向运动速率， $v_R$  是接收到的波的频率， $v_S$  是波源发出的波的频率。

**题 1. 一个声学运动探测器发射  $30\text{kHz}$  的信号并接收回声，如果回声的多普勒频移（回声频率与发射频率的差值）大于  $3\text{kHz}$ ，运动物体就会被记录，设空气中**





的声速为 $330\text{m/s}$ 。如果要被探测器记录，则运动物体应大于\_\_\_\_\_  $\text{m/s}$  的速率向探测器运动，或大于\_\_\_\_\_  $\text{m/s}$  的速率离开探测器。

答案：33；33

解析：回声的频率就是物体接受到波源信号的频率

(1) 物体以 $v_1$ 向探测器运动

$$v_1 = \frac{u + v_1}{u} v_0$$

$$\therefore v_1 = 33\text{m/s}$$

(2) 物体以 $v_2$ 远离

$$v_2 = \frac{u - v_2}{u} v_0$$

$$\therefore v_2 = 33\text{m/s}$$

## 2) 电磁波的多普勒效应

多普勒效应是波动过程的共同特征。不仅机械波有多普勒效应，电磁波(包括光波)也有多普勒效应。

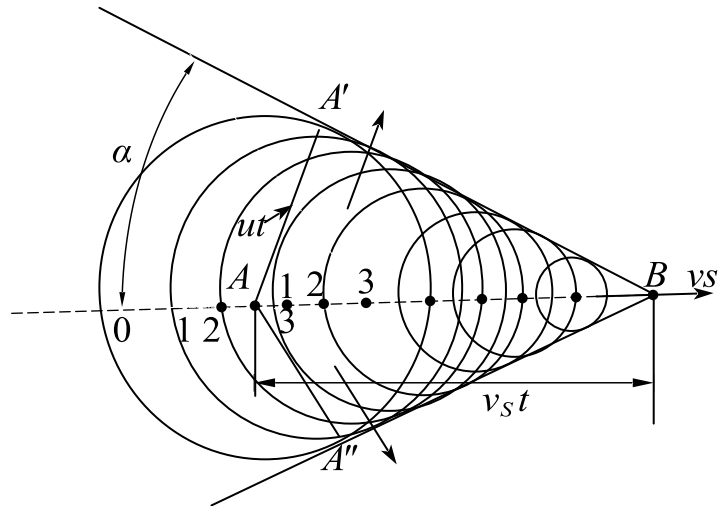
## 3) 冲击波

随着时间的推移，各波不断扩展，锥面不断扩展的圆锥形的波。

波源在 $A$ 位置发出波， $t$ 时刻后波阵面为半径等于 $ut$ 的球面，而波源前进了 $v_s t$ 的距离到达 $B$ 位置，在整个 $t$ 时间内，波源发出的波的各波前的切面形成一个圆锥面，锥形的顶角满足

$$\sin\alpha = \frac{ut}{v_s t} = \frac{u}{v_s}$$





切伦科夫辐射：当带电粒子在介质中高速运动时，其速度超过该介质中的光速（该光速小于真空中的光速 $c$ ），也会辐射锥形电磁波。



## 课时二十二 练习题

1. 在波长为 $\lambda$ 的驻波中，两个相邻波腹之间的距离为（ ）  
 A.  $\lambda/4$                       B.  $\lambda/2$                       C.  $3\lambda/4$                       D.  $\lambda$
2. 设有两相干波源 $S_1$ 、 $S_2$ ，它们的简谐运动方程分别为 $y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ ， $y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ 若两波在 $P$ 点相遇，且两波源离 $P$ 的距离分别为 $r_1$ 与 $r_2$ ，则当 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \underline{\hspace{2cm}}$ 时， $A = A_1 A_2$ 。
3. 波源 $S$ 激起的水面波穿过两个狭缝 $A$ 、 $B$ 向右传播， $SA = 12\text{cm}$ ， $SB = 10\text{cm}$ ， $AC = BC = 20\text{cm}$ ，水面波波长为 $\lambda = 4\text{cm}$ ，则在 $C$ 点处引起的振动\_\_\_\_\_（加强/减弱）
4. 一驻波方程为 $y = 2A \cos(2\pi x/\lambda) \cos(2\pi vt)$ ，则两个相邻波节间的距离是\_\_\_\_\_。
5. 两列完全相同的余弦波左右相向而行，叠加后形成驻波。下列叙述中，不是驻波特性的（ ）  
 A. 叠加后，有些质点始终静止不动  
 B. 叠加后，波形既不左行也不右行  
 C. 两静止而相邻的质点之间的各质点的相位相同  
 D. 振动质点的动能与势能之和不守恒
6. 产生干涉现象的三个条件：\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_。  
 答案：频率相同；振动方向相同；相位差恒定。
7. 波动的重要特征是干涉现象和\_\_\_\_\_现象
8. 两波在一很长的弦线上传播，其表达式分别为： $y_1 = 0.04 \cos \frac{1}{3} \pi (4x - 24t)$   
 (SI)， $y_2 = 0.04 \cos \frac{1}{3} \pi (4x + 24t)$  (SI)

求：（1）两波的频率、波长、波速：

（2）两波叠加形成驻波的表达式

配套课程 习题答案



(3) 波节和波腹的位置.

9. 下面有关汽车雷达测速原理说法正确的是 ( )

- A. 利用了超声波的反射
- B. 利用了超声波的干涉
- C. 利用了超声波的衍射
- D. 利用了多普勒效应

10. 汽车以  $40\text{m/s}$  的速率驶离工厂，工厂汽笛鸣响频率为  $800\text{Hz}$ ，设空气中声速为  $340\text{m/s}$ ，则汽车司机听到汽笛声的频率是 \_\_\_\_\_  $\text{Hz}$ 。

11. 当波源以速度  $v$  向静止的观察者运动时，测得频率为  $\nu_1$ ，当观察者以速度  $v$  向静止的波源运动时，测得频率为  $\nu_2$ ，以下哪个结论是正确的？ ( )

- A.  $\nu_1 > \nu_2$
- B.  $\nu_1 = \nu_2$
- C.  $\nu_1 < \nu_2$
- D. 要视波速大小决定上述关系。

12. 两相干波源  $S_1$  和  $S_2$  的振动方程分别是  $y_1 = A \cos(\omega t + \varphi)$  和  $y_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$ ， $S_1$  距  $P$  点 3 个波长， $S_2$  距  $P$  点 4.5 个波长。设波传播过程中振幅不变，求两波同时传到  $P$  点时的合振幅。

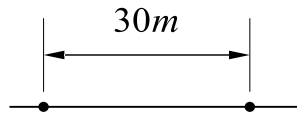
13. 实验中两相于波源分别位于  $A$ 、 $B$  点，已知波源的振动方程分别为：

$y_A = 0.2 \cos(200\pi t)$  (SI)、 $y_B = 0.4 \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$  (SI)。若两波沿直线传播的

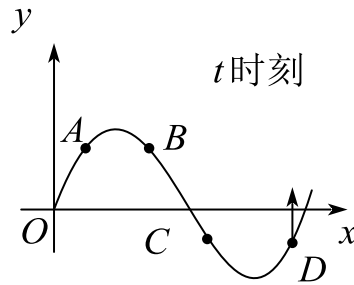
波为  $600\text{m/s}$ ，试求：

- (1) 两列波的周期、波长：
- (2)  $A$ 、 $B$  点相距为  $30\text{m}$  时，两点间因干涉而振动加强的点的位置。





14. 右图为 $t$ 时刻的驻波波形曲线。若此时曲线中 $D$ 点质元向上运动，试分别指出图中 $A$ ， $B$ ， $C$ 处各质元在该时刻的运动方向：



$A$ . \_\_\_\_\_;  $B$ . \_\_\_\_\_;  $C$ . \_\_\_\_\_

15. 设声波在某介质中的传播速度为 $u$ ，声源 $S$ 的频率为 $\nu_S$ 。如图所示，若声源 $S$ 固定不动，而接收器 $R$ 相对于介质以速率 $\nu_R$ 沿着 $S$ 和 $R$ 连线向着声源 $S$ 运动，接收器 $R$ 接收到的声波的频率为（ ）。

- A.  $\nu_S$
- B.  $\frac{u}{u + \nu_R} \nu_S$
- C.  $\frac{u}{u - \nu_R} \nu_S$
- D.  $\frac{u + \nu_R}{u} \nu_S$
- E.  $\frac{u - \nu_R}{u} \nu_S$



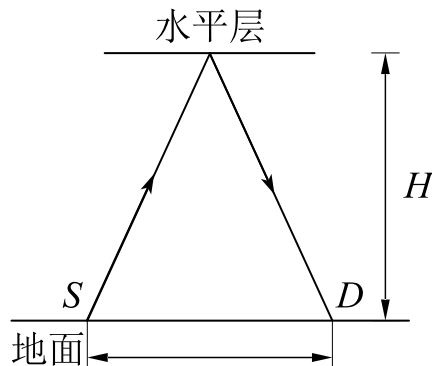
16. 一辆汽车跟在一辆警车的后面在公路上行驶，两者的速率分别  $v_R$  为和  $v_S$ ，已知警笛发出的声波的频率为  $\nu_0$ ，声波在空气中传播速度为  $u$ ，则汽车上观测者听到警笛声的频率为\_\_\_\_\_。

17. 由某频率为  $100\text{Hz}$  的波源发出平面简谐波，在均匀介质中以波速  $100\text{m/s}$  传播，现在将波频频率改为  $200\text{Hz}$ ，介质条件不变，则波速将为\_\_\_\_\_  $\text{m/s}$ 。

18. 一机车汽笛频率为  $750\text{Hz}$ ，机车以时速  $90$  公里远离静止的观察者，观察者听到的声音的频率是（设空气中声速为  $340\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ）（ ）

- A.  $810\text{Hz}$       B.  $699\text{Hz}$       C.  $805\text{Hz}$       D.  $695\text{Hz}$

19. 地面上波源  $S$  与探测器  $D$  之间的距离为  $d$ ，从  $S$  发出经高度为  $H$  的水平层反射后的波在  $D$  处加强，反射波及入射波的传播方向与水平面所成的角度相同，当水平层逐渐升高  $h$  距离时，在  $D$  处第一次测不到信号，不考虑大气的吸收，求此波源  $S$  发出波的波长。



## 课时二十三 几何光学

知识点	重要程度	题型
1. 几何光学简介	★★★	选填、简答、计算

### 1. 几何光学简介

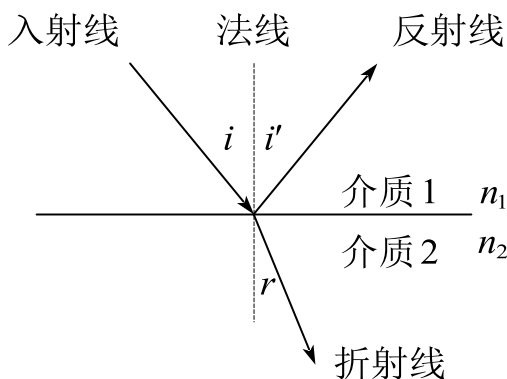
#### 1) 光的传播规律

##### (1) 三条实验规律

光的直线传播定律：光在均匀介质中沿直线传播；

光的独立传播定律：光在传播过程中与其他光束相遇时，各光束都各自独立传播，不改变其性质和传播方向；

光的反射定律和折射定律：光入射到两种介质分界面时，其传播方向发生改变，一部分反射，另一部分折射。



光的反射与折射

实验表明：

- ①反射光线和折射光线都在入射光线和界面法线所组成的入射面内。
- ②反射角等于入射角。
- ③入射角与折射角的正弦之比与入射角无关，而与介质的相对折射率有关，

即

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

式中，比例系数  $n_{21}$  为第二种介质相对于第一种介质的折射率。

配套课程 习题答案



(2) 光路可逆原理

当光线的方向反转时，光将循同一路径而逆向传播。

(3) 费马原理

费马原理：光从空间的一点到另一点是沿着光程为极值的路径传播。

光程是折射率  $n$  与几何路程的乘积，则费马原理的一般表达式为

$$\int_A^B n dl = \text{极值}$$

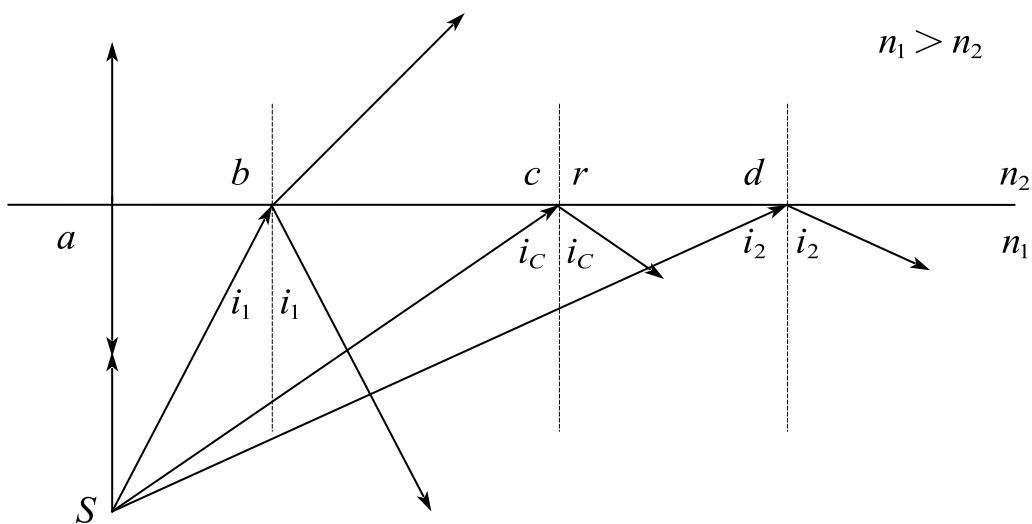
即光线在实际路径上的光程的变分为零。

2) 全反射

(1) 全反射

当入射角  $i = i_c$  时，折射角  $r = 90^\circ$ ，因而当入射角  $i \geq i_c$  时，光线不再折射而全部被反射，该现象称为全反射，入射角  $i_c$  称为全反射临界角。

$$i_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$



光的反射与折射

(2) 隐失波

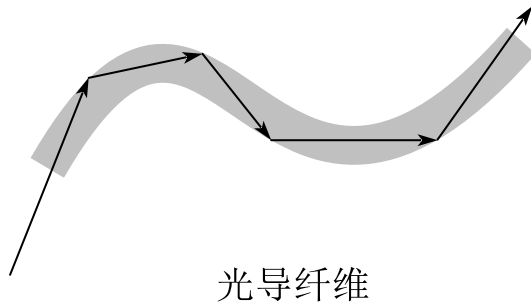
根据波动理论，光产生全反射时，仍有光波进入第二介质，它沿着两介质的分界面传播，其振幅随离开分界面的距离按指数衰减。一般来说，进入第二介质的深度约为一个波长，这样的波称为隐失波。





### (3) 全反射的应用

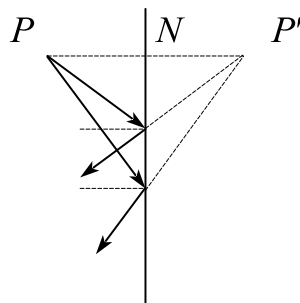
光导纤维特点：外层折射率小于内层折射率。



### 3) 光在平面上的反射和折射

#### (1) 平面镜

从任一发光点  $P$  发出的光束，经平面镜反射后，其反射光线的反向延长线相交于  $P'$  点。而实际光线并没有通过  $P'$  点，因此  $P'$  点为  $P$  点的虚像， $P'$  点与  $P$  点成镜面对称。



平面镜成像

#### (2) 三棱镜

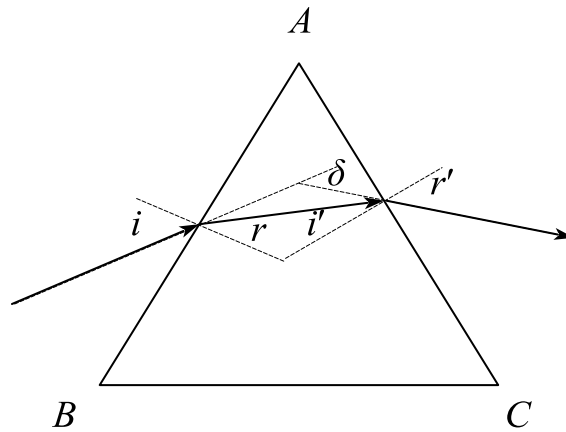
三棱镜截面呈三角形的透明棱柱称为三棱镜，与其棱边垂直的平面称为主截面。

出射光线与入射光线间的夹角，称为偏向角  $\delta$



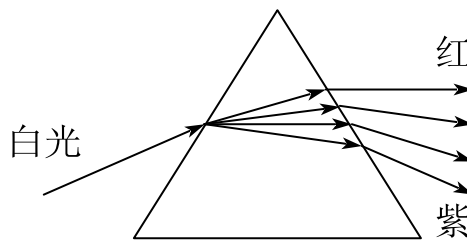
$$n = \frac{\sin\left(\frac{\alpha + \delta_{\min}}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

式中 $\alpha$ 为棱镜顶角



光在三棱镜内的折射

色散是指不同波长的光对介质有不同的折射率的现象，其中紫光偏折最大，红光偏折最小。



棱镜的色散

### (3) 光的散射

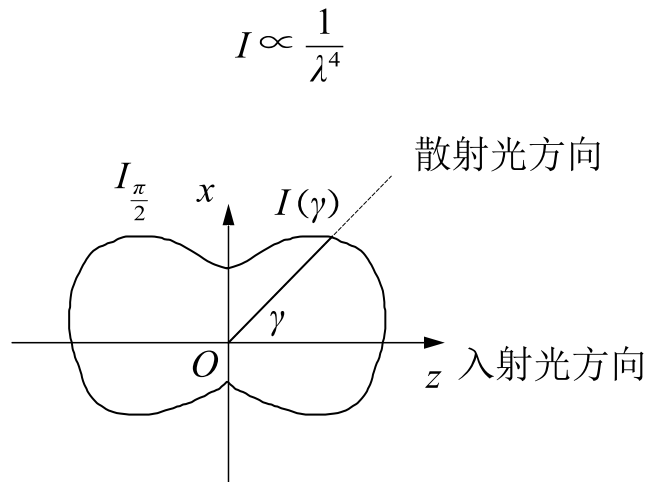
散射：光束通过光学性质不均匀的介质时，光线向四面八方传播的现象。

米氏散射：散射后看不出具体颜色，仅仅是黑白灰（反映光强大小）。是大气中粒子的直径与辐射的波长相当时发生的散射。这种散射主要由大气中的微粒，如烟、尘埃、小水滴及气溶胶等引起。米氏散射的散射强度与频率的二次方成正比，并且散射在光线向前方向比向后方向更强，方向性比较明显。散射与波长无关。

$$I \propto \nu^2$$



瑞利散射：散射波长与入射波长相同；散射光强与波长的四次方成反比；散射光强按空间方向成哑铃形角分布。



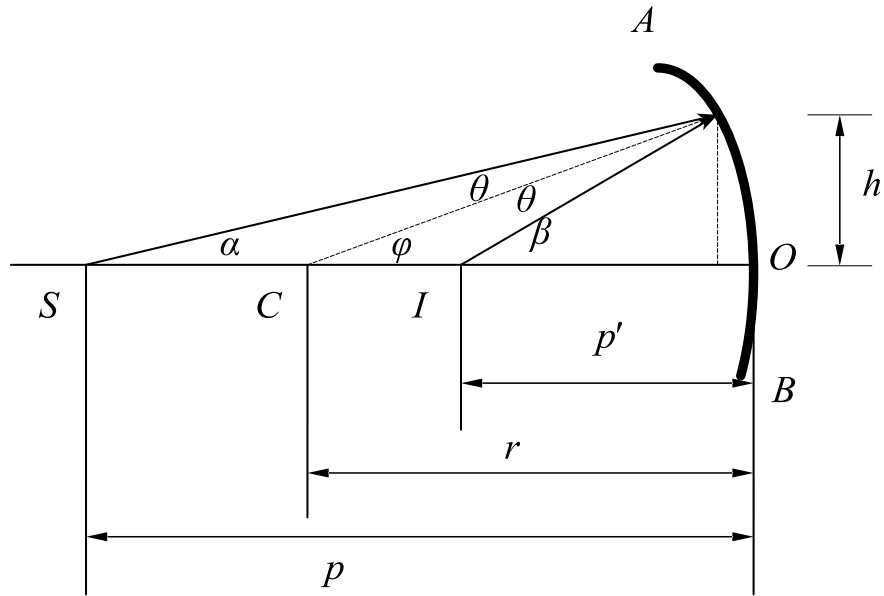
拉曼散射：散射光中既有原入射光频率，也有入射光频率两侧对称分布的新频率，我们称这样的散射为拉曼散射。

#### 4) 光在球面上的反射和折射

##### (1) 球面镜

如图所示， $AOB$  表示球面的一部分，这部分球面的中心点  $O$  称为顶点，球面的球心  $C$  称为曲率中心，球面半径称为曲率半径，以  $r$  表示。连接顶点和曲率中心的直线  $CO$  称为主光轴。从轴上的一物点  $S$  发出光线经球面反射后相交于主光轴上  $I$  点， $I$  点为物点  $S$  的像。从顶点  $O$  到物点  $S$  的距离称为物距，以  $p$  表示，从顶点  $O$  到像点的距离称为像距，以  $p'$  表示。





球面镜

(2) 正负号法则

以反射(或折射)面为界，将空间分为两个区：*A*区：光线发出的区；*B*区：光线通过的区。对于反射镜，*B*区和*A*区重合；对于折射面和透镜，两区分别在表面的两侧。

*A*区决定的量：

物距  $p$ ：物体在 *A* 区为正(实物)；物体在 *A* 区的对面为负(虚物)。

*B*区决定的量：

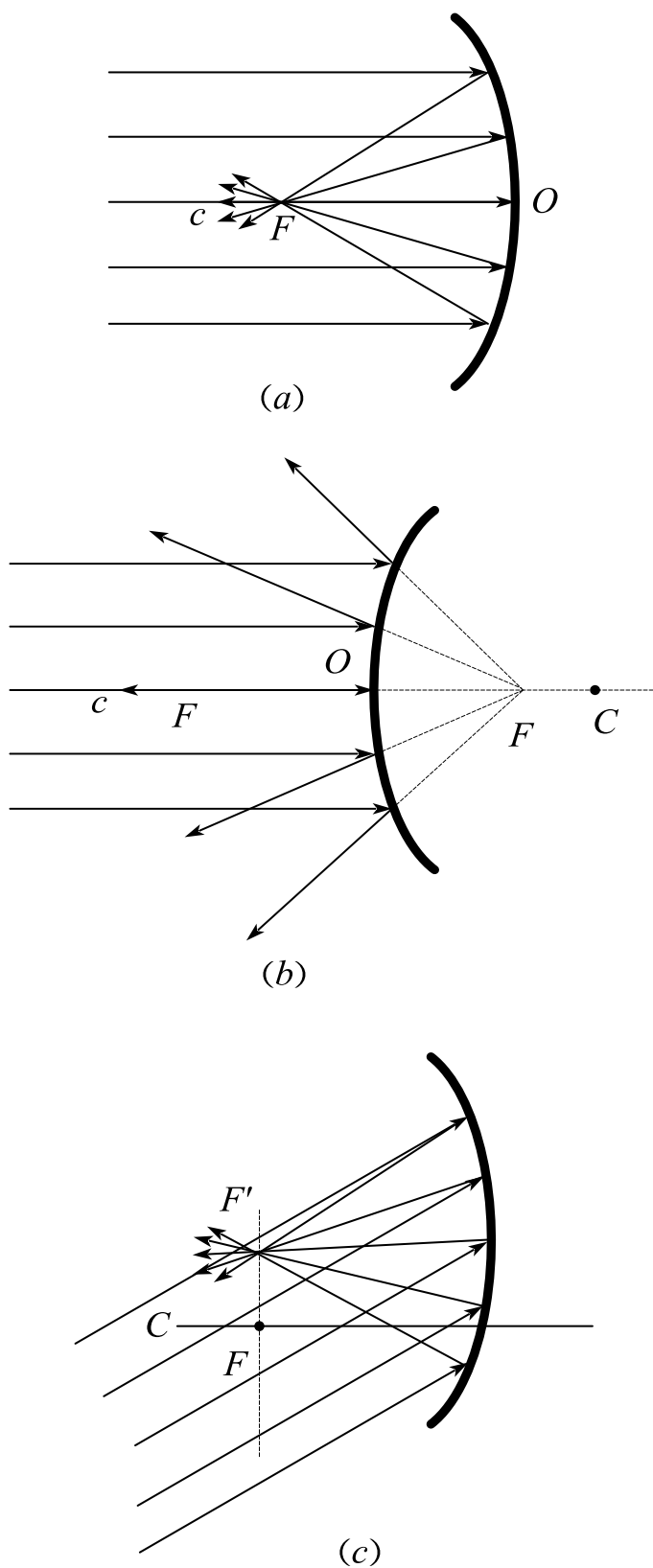
像距  $p'$ ：像在 *B* 区为正(实像)；像在 *B* 区的对面为负(虚像)。

曲率半径  $r$ ：曲率中心在 *B* 区为正；曲率中心在 *B* 区的对面为负。

焦距  $f$ ：焦点在 *B* 区为正，焦点在 *B* 区的对面为负。

(3) 焦点和焦平面





焦点和焦平面

平行主光轴的光束经球面反射后，将在光轴上会聚成一点，如图所示，该像



点称为反射球面的焦点，以  $F$  表示；在镜后的焦点称为虚焦点；这个平面称为焦平面。

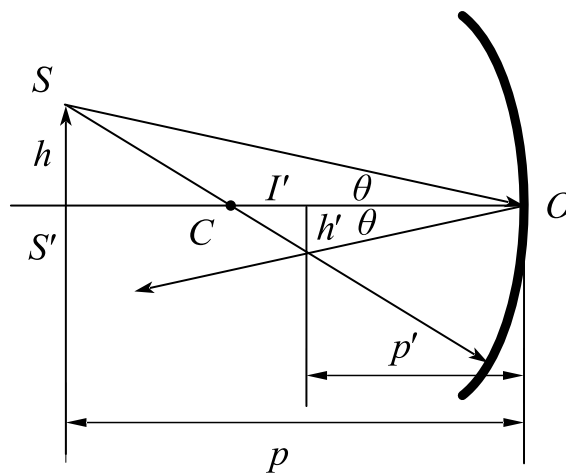
#### (4) 球面反射的物像公式

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{r}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{f}, f = \frac{r}{2}$$

以上两组式子均为在傍轴光线条件下球面反射的物像公式。

#### (5) 横向放大率



像的横向放大率

物距为  $p$ 、高为  $h$  的物  $SS'$ ，经球面反射后成像，像距为  $p'$ ，像高为  $h'$ （如图），像高与物高之比定义为横向放大率。

$$\beta = \frac{h'}{h} = -\frac{p'}{p}$$

若计算所得  $\beta$  是正值，表示像是正立的； $\beta$  是负值，表示像是倒立的。 $|\beta| > 1$  表示像是放大的， $|\beta| < 1$  表示像是缩小的。

#### (6) 作图法

作图时可选择下列三条特殊光线：

平行于主光线的光线：它的反射线必通过焦点（凹球面）或其反射线的延长

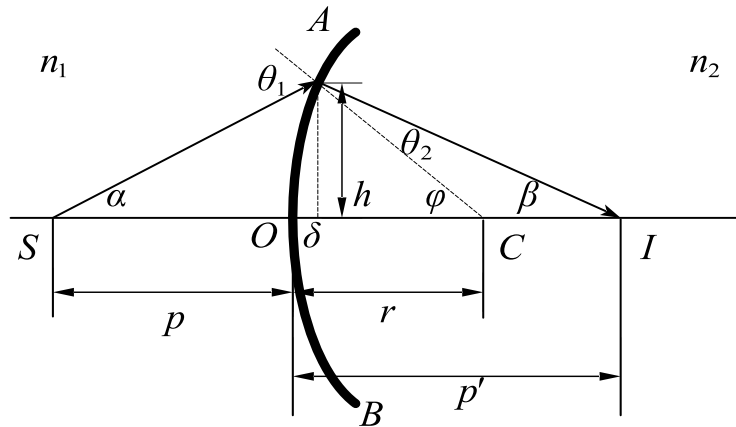


线通过焦点（凸球面）；

过曲率中心的光线：它的反射线和入射线是同一条直线而方向相反；

焦点的光线或入射光的延长线通过焦点的光线：它的反射线平行于主光轴。

(7) 光在球面上的折射



光在球面上的折射

在傍轴光线条件下球面折射的物像公式

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

折射球面的横向放大率

$$\beta = \frac{h'}{h} = \frac{n_1 p'}{n_2 p}$$

像方焦点：平行于主光轴的入射光线，经球面折射后，与主光轴的交点。

像方焦距：从球面顶点到像方焦点的距离，以  $f'$  表示。

$$f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r$$

物方焦点：把物点放在主轴上的物方焦点时，发出的光经球面折射后将产生平行于主轴的平行光束。

物方焦距：从球面顶点到物方焦点的距离，以  $f$  表示。

$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} r$$



物像两方焦距之比等于两方介质折射率之比。

$$\frac{f'}{f} = \frac{n_2}{n_1}$$

(8) 共轴球面系统成像

多个单球面组成的共轴球面系统，其物像关系可以对每一个球面逐次用成像公式计算，对于每一个球面应用物像公式时，都要重新考虑各量的正负号法则；

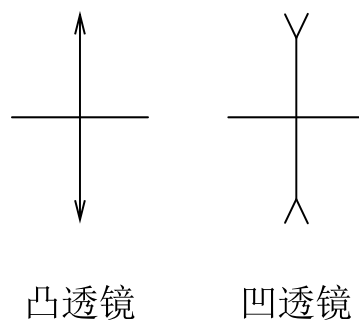
光从前一个球面出射后是会聚的，是实像，但光束尚未到达会聚点便遇到下一个球面时，会聚光相对下一个球面是入射光束，因此仍应将这个实像看作是物，这物称为虚物。

共轴球面系统的横向放大率等于各个球面放大率的乘积

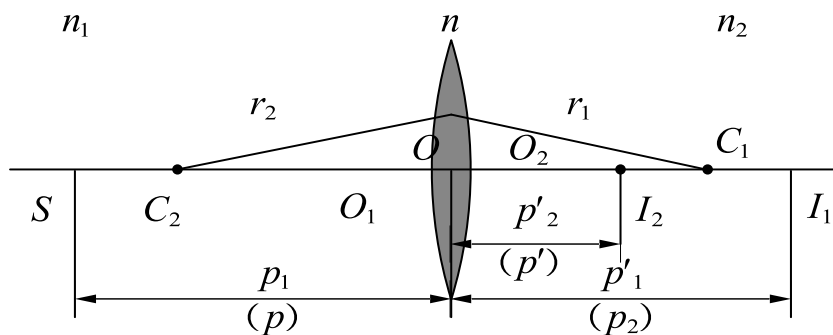
$$\beta = \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$$

5) 薄透镜

若透镜的厚度比两球面的曲率半径小得多，这样的透镜称作薄透镜。



(1) 薄透镜物像公式



透镜的物像关系





在薄透镜中，两球面的主光轴重合，两顶点可视为重合在一点，称为薄透镜的光心。傍轴条件下薄透镜物像公式的一般形式：

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}$$

磨镜者公式：薄透镜焦距与折射率、曲率半径的关系。

$$f = f' = \frac{1}{(n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

在空气中的薄透镜物像公式

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

薄透镜放大率

$$\beta = \beta_1 \beta_2 = - \frac{p'}{p}$$

若 $\beta$ 为正，则为直立的像；若 $\beta$ 为负，则为倒像。

光焦度：薄透镜焦距的倒数，单位是屈光度。若透镜焦距以米为单位，其倒数的单位则为度，用 $D$ 表示。

## (2) 薄透镜成像的作图法

在薄透镜的情形里，作图时可从下列三条光线任选两条作图，出射线的交点即为像点：

平行于光轴的光线，经透镜后通过像方焦点 $F'$ ；

通过物方焦点 $F$ 的光线，经透镜后平行于光轴；

物像两方折射率相等，通过光心 $D$ 的光线经透镜后方向不变。

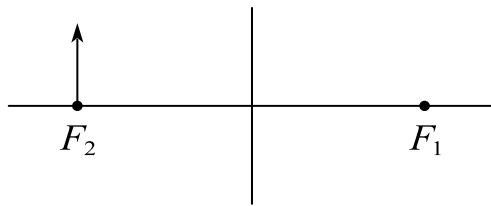
**题 1. 一发散薄透镜的焦距为 $f = -8.0\text{cm}$ ，在透镜左侧焦点处放置一高 $3.0\text{cm}$ 的物体。**

**(1) 直接在原图上作光线图（必须用尺），标出像的位置；**

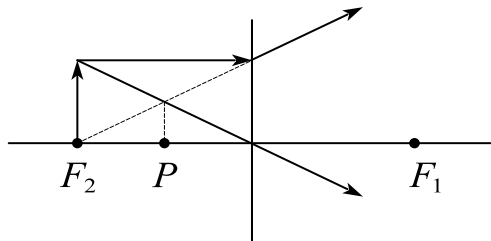


(2) 根据薄透镜的物像关系式  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$  计算像距  $s'$ ；

(3) 描述成像情况。（正立还是倒立？实像还是虚像？像的高度？）



解析：(1) 如图：像的位置为  $P$  点；



$$(2) \because \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f},$$

$$\therefore s' = -4\text{cm},$$

所以像距为  $-4\text{cm}$ 。

(3) 正立、缩小的虚像。

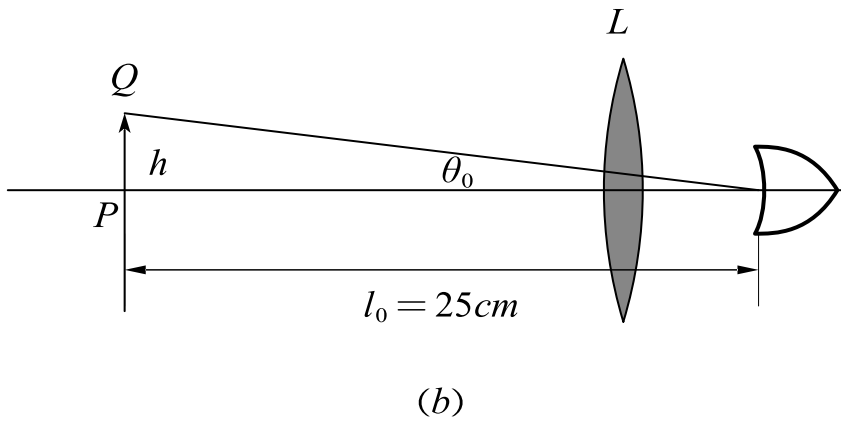
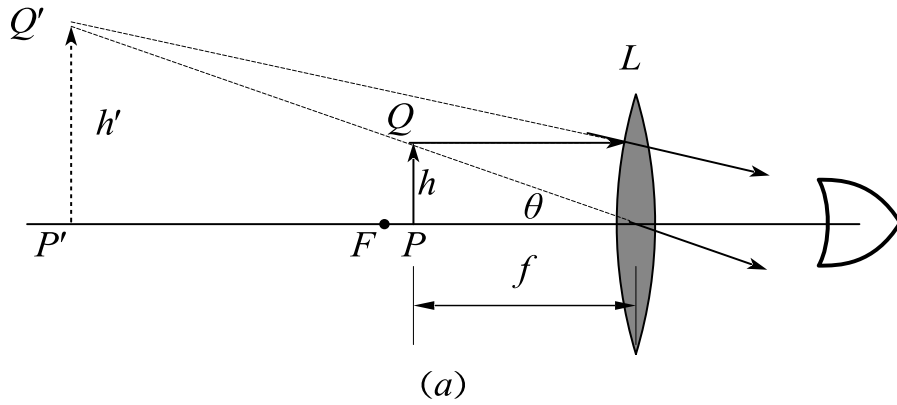
$$\beta = -\frac{s'}{s} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore h' = \frac{1}{2}h = \frac{3}{2}\text{cm}。$$

## 6) 光学仪器

### (1) 放大镜





放大镜光路图

最简单的放大镜是一个焦距很短的会聚透镜，(明视距离)，物体放在明视距离处，眼睛直接观察时，视角 $\theta_0$

$$\theta_0 \approx \frac{h}{l_0}$$

式中， $h$ 为物体的长度，放大虚像对眼所张的视角 $\theta$

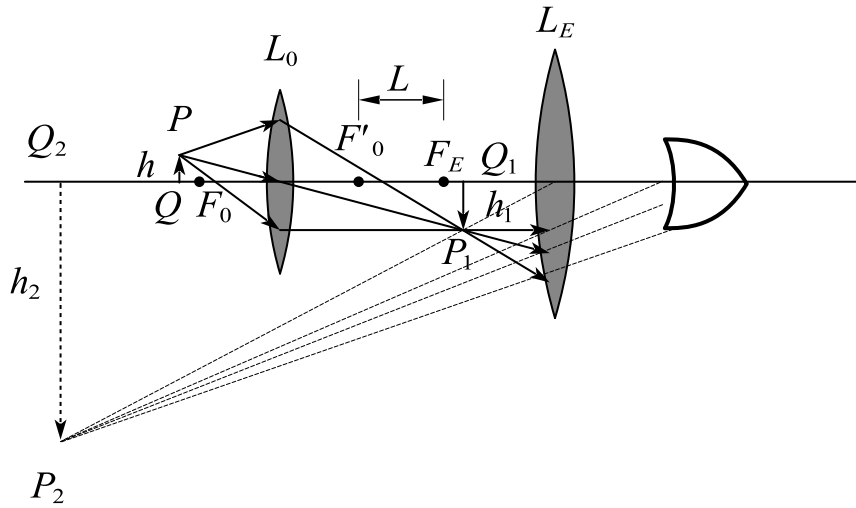
$$\theta \approx \frac{h}{f}$$

视角放大率 $M$ ：用以区别于像的横向放大率，定义为

$$M = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{l_0}{f}$$

(2) 显微镜



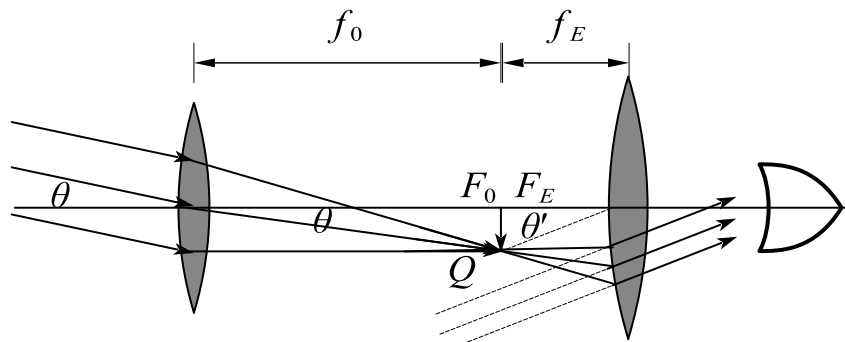


显微镜光路图

显微镜的放大率

$$M = M_1 M_2 = \frac{l_0 L}{f_0 f_E}$$

(3) 望远镜



望远镜光路图

望远镜的放大率：最后像对目镜所张的视角  $\theta'$  与物体本身对目镜所张视角  $\theta$

之比，即

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{f_0}{f_E}$$



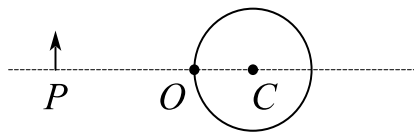
## 课时二十三 练习题

1. 根据几何光学的符号规则，下面说法正确的是（ ）。

- A. 若物为实物，物距取负
- B. 若物为虚物，物距取正
- C. 若像为实像，物距取负
- D. 若球面的凹面迎光线，曲率半径取负

2. 薄透镜置于水中，其水中焦距为 $10\text{cm}$ ，位于透镜左方 $20\text{cm}$ 处光轴上的小物体，通过透镜所成像的像距为\_\_\_\_\_。

3. 如图所示，有一折射率为 $1.5$ ，半径为 $4.0\text{cm}$ 的玻璃球，物体 $P$ 在距球表面 $6\text{cm}$ 处（ $OP = 6\text{cm}$ ）。求经过两次折射成像后，物体 $P$ 的像在什么位置？此像是实像还是虚像？



4. 焦距为 $4\text{cm}$ 的薄凸透镜用作放大镜，若物体置于透镜前 $2\text{cm}$ 处，则其横向放大率为（ ）。

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 6

5. 旭日、夕阳呈现红色，而云雾呈现白色的光散射原因有何不同？



## 课时二十四 光的干涉

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 光源 单色光 相干光	★★★		选填、简答
2. 双缝干涉	★★★★★		选填、简答、计算
3. 光程与光程差	★★★		选填、简答
4. 薄膜干涉	★★★★★		选填、简答、计算
5. 迈克耳孙干涉仪	★★		选填、计算

### 1. 光源 单色光 相干光

#### 1) 光源

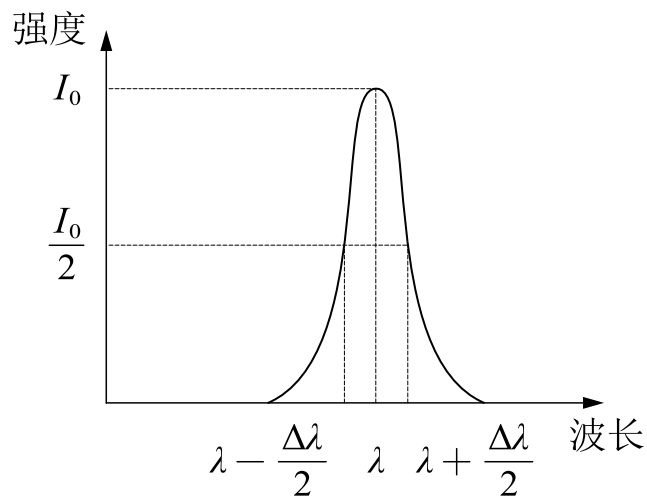
光源：发射光波的物体；

光波列：由原子发射的一段频率一定、振动方向一定、有限波长的光波

#### 2) 单色光

单色光：具有单一频率的光波。

光谱曲线：以波长(或频率)为横坐标，强度为纵坐标作图。其中谱线所对应的波长范围越窄，则称光的单色性越好。波长范围 $\Delta\lambda$ 当作谱线宽度，它是标志谱线单色性好坏的物理量。



谱线及其宽度

#### 3) 相干光

##### (1) 光强



两列波相遇发生干涉现象的条件是：振动频率相同、振动方向相同和相位差恒定。在观测的时间内，平均光强是正比于  $\overline{E^2}$  的，即

$$I \propto \overline{E^2} = \overline{E_{10}^2} + \overline{E_{20}^2} + 2E_{10}E_{20} \overline{\cos(\phi_{20} - \phi_{10})}$$

题 1. (判断) 一单色平面简谐光波的光矢量可表示为式  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$ ，说明此光波沿  $z$  轴的负方向传播。( )

答案：错误。

解析：式中  $k$  为波数， $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\therefore \vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{2\pi z}{\lambda\omega}\right) + \varphi_0\right]$$

$$\therefore \vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi_0\right]$$

显然此光波沿着  $z$  轴正方向运动。

今后可以通过这种光矢量的表达式来判断。

### (2) 非相干叠加

两束光重合后的光强等于两束光分别照射时的光强  $I_1$  和  $I_2$  之和，该情况称为光的非相干叠加。

$$I = I_1 + I_2$$

### (3) 相干叠加

若两束光来自同一光源而使它们的相位差  $(\phi_{20} - \phi_{10})$  始终保持恒定，则其合成后的光强为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_{20} - \phi_{10})$$

$\cos(\phi_{20} - \phi_{10})$  不随时间而变， $2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_{20} - \phi_{10})$  称为干涉项，将这种情况称为光的相干叠加。



当 $\Delta\phi = \pm 2k\pi$ ，( $k = 0, 1, 2, \dots$ )时， $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$ ，在这些位置的光强最大，称为相长干涉；

当 $\Delta\phi = \pm (2k + 1)\pi$ ，( $k = 0, 1, 2, \dots$ )时， $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$ ，在这些位置的光强最小，称为相消干涉。

当 $I_1 = I_2$ 时，合成后的光强为

$$I = 2I_1(1 + \cos\Delta\phi) = 4I_1 \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2}$$

称为光的干涉现象。

相干叠加的满足条件：振动频率相同、振动方向相同、相位差恒定。

题 2. 两束光强均为 $I_0$ 的相干光相遇发生干涉时，在相遇区域内干涉的暗纹中心处光强 $I = \underline{\hspace{2cm}}$ ；明纹中心处光强 $I = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案：0； $4I_0$

解析：根据 $I = 4I_1 \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2}$ 进行计算，明纹 $\Delta\phi = 0$ ；暗纹 $\Delta\phi = \pi$

#### 4) 相干光的获得方法

##### (1) 分波阵面法

由于同一波阵面上各点的振动具有相同相位，所以从同一波阵面上取出的两部分可以作为相干光源。

##### (2) 分振幅法

当一束光投射到两种介质的分界面上时，一部分反射、一部分透射，随着光能被分成两部分或若干份，光的振幅也同时被分成几份。

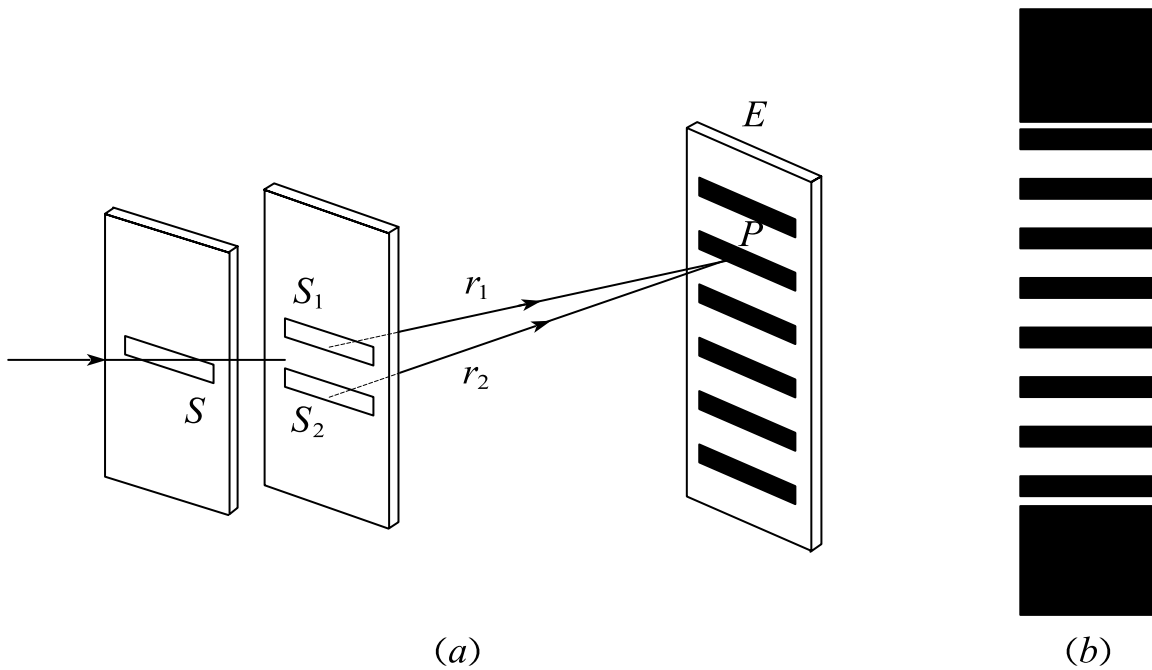
## 2. 双缝干涉

### 1) 杨氏双缝实验

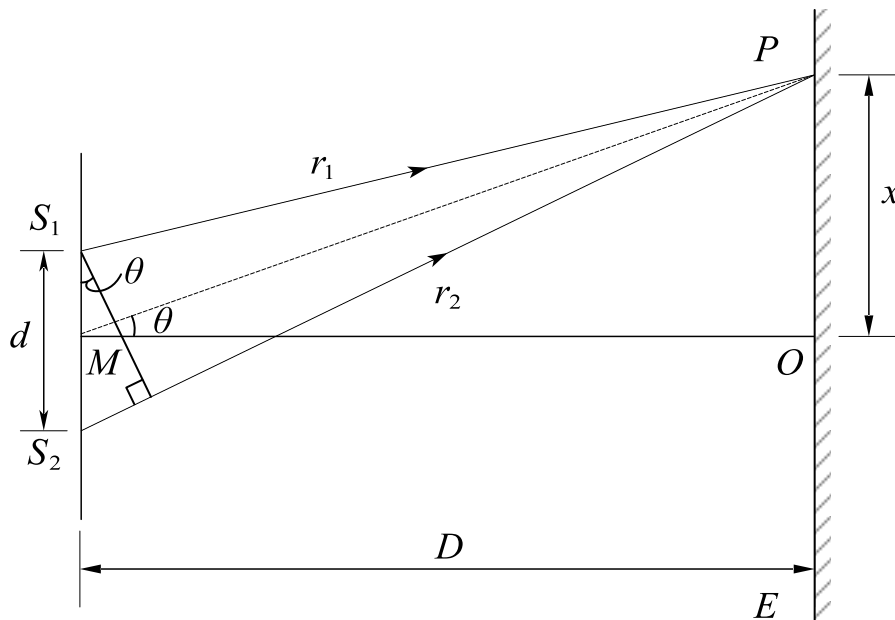




让太阳光通过一针孔，再通过离这针孔一段距离的两个针孔，在两针孔后面的屏幕上得到干涉图样，继而发现，用相互平行的狭缝代替针孔，得到明亮得多的干涉条纹，这些干涉实验统称为杨氏实验。



2) 干涉明暗条纹的位置



干涉条纹计算用图

如果  $\delta = \frac{xd}{D} = \pm k\lambda$ ， $P$  点处为明纹，即各级明纹中心离  $O$  点距离为



$$x = \pm k \frac{D\lambda}{d}$$

如果  $\delta = \frac{xd}{D} = \pm(k + \frac{1}{2})\lambda$ ， $P$  点处为暗纹，各级暗纹中心离  $O$  点距离为

$$x = \pm(k + \frac{1}{2}) \frac{D\lambda}{d}$$

两相邻明纹或暗纹的间距均为

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d}$$

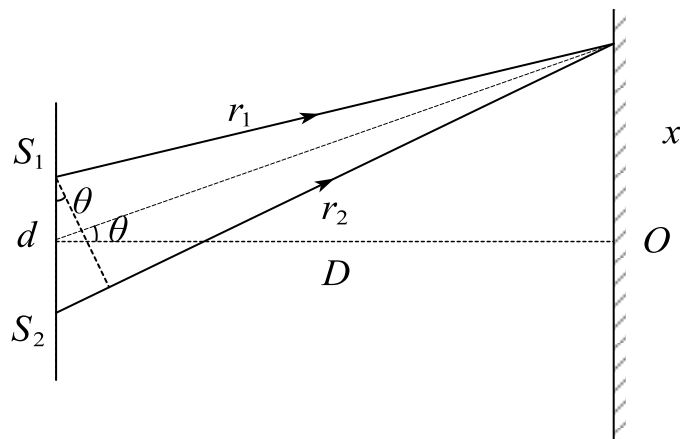
所以干涉条纹是等距离分布的。

题 3. 贡弧灯发出的光，经过一个滤光片片后垂直入射到相距  $0.60\text{mm}$  的双缝上，在距双缝  $2.5\text{m}$  处的屏上观察到干涉条纹。测得相邻明条纹中心的距离为  $2.27\text{mm}$ 。

(1) 两个缝发出的光到达屏上  $P$  点光程差（写出简单推导过程）

(2) 写出  $P$  是明条纹中心的条件

(3) 求出入射光的波长



解析：(1)  $\delta = r_2 - r_1 = d \sin \theta$

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{D} \quad \therefore \delta = \frac{xd}{D}$$



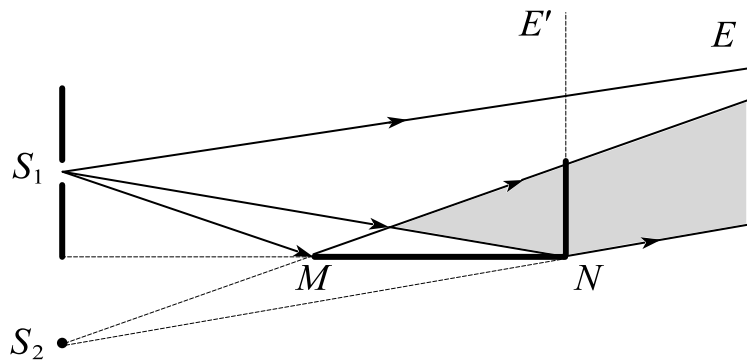
$$(2) \delta = \frac{xd}{D} = 0$$

$$(3) \Delta x = \frac{D}{d} \lambda \quad \therefore \lambda = 544.8 \text{ nm}$$

### 3) 洛埃德镜实验

#### (1) 实验简介

实验简图如图所示， $MN$ 为一块平玻璃板，用作反射镜， $S_1$ 是一狭缝光源，从光源发出的光波，一部分掠射（即入射角接近 $90^\circ$ ）到玻璃平板上，反射光可看成是由虚光源 $S_2$ 发出的， $S_1$ 和 $S_2$ 构成一对相干光源，对干涉条纹的分析与杨氏实验相同。



洛埃德实验简图

#### (2) 半波损失

光从光疏介质射到光密介质界面反射时，在掠射（入射角 $i \approx 90^\circ$ ）或正入射（ $i \approx 0$ ）的情况下，反射光的相位较入射光的相位有 $\pi$ 的突变，这一变化导致于反射光的波程在反射过程中附加了半个波长，故称为“半波损失”。

### 4) 光源的相干长度

两光路之间的波程差超过了波列长度时，则不再发生干涉，因此最大波程差 $\delta$ 称为相干长度 $L$

$$L = \delta_{\max} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$



上式表明最大波程差与谱线宽度成反比，光源的单色性越好，则产生干涉条纹的最大波程差越大，即光源的相干长度越大。

### 3. 光程与光程差

#### 1) 光程

光波在某一介质中所经历光程  $l$  等于它的几何路程  $x$  与这介质的折射率  $n$  的乘积  $nx$ 。

题 1. 一束波长为  $\lambda$  的单色光在空气中和在玻璃中，如果传播的几何路程相等，则走过的光程\_\_\_\_\_。（选填相等、不相等）

答案：不相等

解析：光程  $l = nx$ ，两者的  $x$  相同但是介质折射率  $n$  不同，所以光程不相等。

#### 2) 光程差

两相干光波在相遇点的相位差不是决定于它们的几何路程之差，而是决定于它们的光程差  $n_2r_2 - n_1r_1$ ，常用  $\delta$  来表示光程差。

相位差可用光程差来表示，它们的关系是

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$$

式中， $\lambda$  为光在真空中的波长。

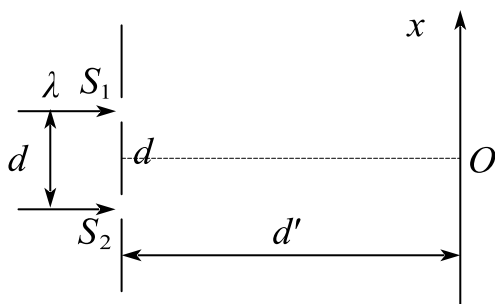
题 2. 双缝干涉实验装置如图所示，双缝与屏之间的距离  $d = 120\text{cm}$ ，两缝之间的距离  $d = 0.50\text{nm}$ ，用波长  $\lambda = 500\text{nm}$  ( $1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$ ) 的单色光垂直照射双缝。

(1) 求原点  $O$ （零级明条纹所在处）上方的第五级明条纹的坐标  $x$ ；

(2) 如果用厚度  $l = 3.0 \times 10^{-3}\text{mm}$ ，折射率  $n = 1.50$  的透明薄膜覆盖在图中的  $S_1$



缝后面，原点  $O$  处为第几级明纹。



解析：

$$(1) \delta = \frac{d}{d'} x = 5\lambda \quad \therefore x = 6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$(2) \delta = (n - n_0)l = k\lambda \quad \therefore k = 3$$

### 3) 物像之间的等光程性

从物点到像点的各光线经历相同的相位差，即为经历相等的光程。使用透镜只能改变光波的传播情况，但对物、像间各光线不会引起附加的光程差。

### 4) 反射光的相位突变和附加光程差

如果两束光都是从光疏到光密界面反射或都是从光密到光疏界面反射，则两束反射光之间无附加的相位差；如果一束光从光疏到光密界面反射，而另一束从光密到光疏界面反射，则两束反射光之间有附加的相位差  $\pi$ ，或者说有附加光程差  $\frac{\lambda}{2}$ 。对于折射光，则任何情况下都不会有相位突变。

题 3. 有关光的“半波损失”，下列说法正确的是（ ）。

- A. 当光从光疏介质进入光密介质时，反射光在界面产生“半波损失”
- B. 当光从光密介质进入光疏介质时，反射光在界面产生“半波损失”
- C. 当光从光疏介质进入光密介质时，折射光在界面产生“半波损失”
- D. 当光从光密介质进入光疏介质时，折射光在界面产生“半波损失”

配套课程 习题答案



答案：A

#### 4. 薄膜干涉

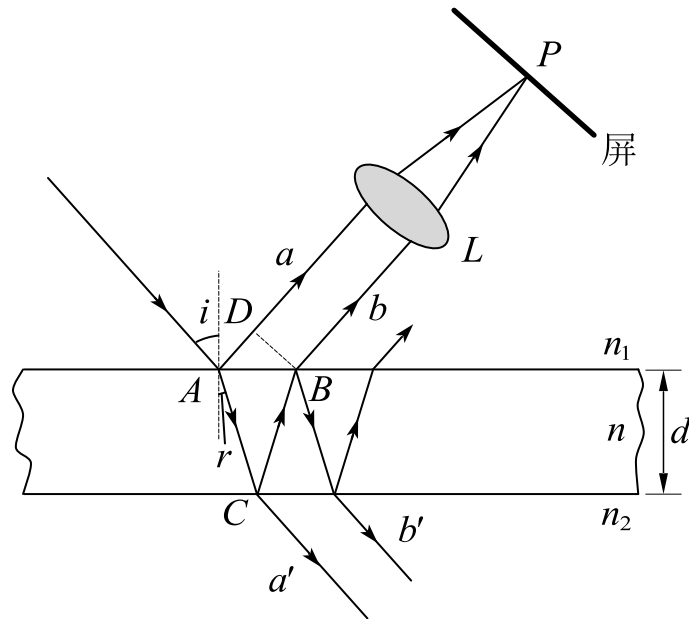
薄膜干涉：光波经薄膜两表面反射后相互叠加所形成的干涉现象。

##### 1) 等倾干涉条纹

##### (1) 相干光光程差

一均匀透明的平行平面介质薄膜，其折射率为 $n$ ，厚度为 $d$ ，放在折射率为 $n_1$ 的透明介质中，波长为 $\lambda$ 的单色光入射到薄膜上表面，入射角为 $i$ ， $a$ 和 $b$ 两束相干光的光程差为

$$\delta = 2d\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$$



薄膜的干涉

##### (2) 干涉条纹的形成与光程差

反射光干涉：等倾干涉明纹的光程差的条件是

$$\delta = 2d\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

暗纹的光程差的条件是



$$\delta = 2d\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = (k + \frac{1}{2})\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

小结：中心处的干涉级最高，越向外的圆环纹干涉级越低。从中央向外各相邻明环或相邻暗环间的距离也不相同。中央的环纹间的距离较大，环纹较稀疏，越向外，环纹间的距离越小，环纹越密集。

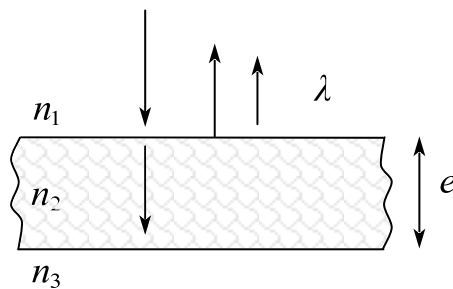
对透射光来说，也有干涉现象。

透射的相干光的光程差是

$$\delta = 2d\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 i}$$

题 1. 如图所示，折射率为  $n_2$ ，厚度为  $e$  的透明介质薄膜的上方和下方的透明介质折射率分别为  $n_1$  和  $n_3$ ，且  $n_1 < n_2$ ， $n_2 > n_3$ ，若波长为  $\lambda$  的平行单色光垂直入射在薄膜上，则上下两个表面反射的两束光的光程差为（ ）。

- A.  $2n_2e$       B.  $2n_2e - \lambda/2$       C.  $2n_2e - \lambda$       D.  $2n_2e - \lambda/2n_2$



答案：B

解析：从  $n_1$  到  $n_2$  界面反射光有  $\frac{\lambda}{2}$  的光程差

从  $n_2$  到  $n_3$  界面反射光无  $\frac{\lambda}{2}$  的光程差

$$\therefore \delta = 2n_2e - \frac{\lambda}{2}$$

## 2) 增透膜和高反射膜

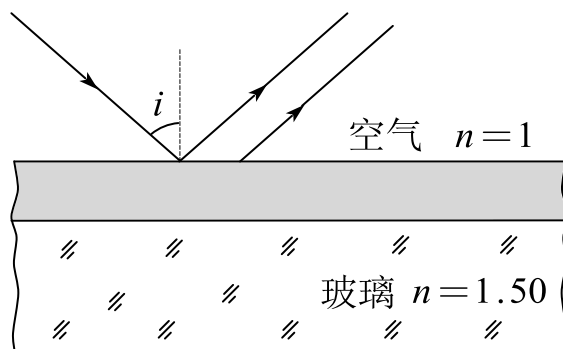


## (1) 增透膜

利用薄膜的干涉使反射光减到最小的薄膜。

两反射光干涉相消的满足关系

$$\delta = 2nd = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$



增透膜

膜的最小厚度

$$d = \frac{\lambda}{4n}$$

**题 2.** 一平面单色光垂直照射在厚度均匀的薄油膜上，这油膜覆盖在玻璃板上。所用光源的波长可以连续改变。在  $500\text{nm}$  与  $700\text{nm}$  这两个波长处观察到反射光完全相消干涉，而且在这两个波长之间的其它波长都不发生完全相消。如果油膜的折射率为  $1.30$ ，玻璃的折射率为  $1.50$ ，试求油膜的厚度。

解析：  $\delta = 2nd = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$  干涉相消

$$\therefore 2nd = \left(k_1 + \frac{1}{2}\right)\lambda_1 = \left(k_2 + \frac{1}{2}\right)\lambda_2$$

由题易得，  $k_1 = k_2 + 1$

$$\therefore k_2 = 2, k_1 = 3, d = \frac{35}{52} \times 10^{-6} \text{m}$$

## (2) 高反射膜



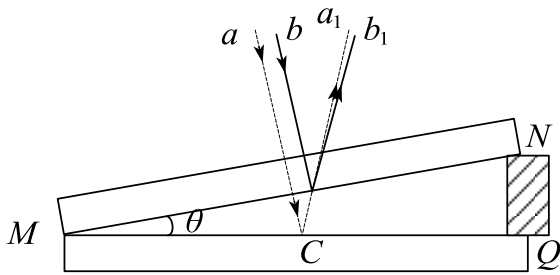


薄膜上下表面的两反射光使干涉加强，反射光增强，而透射光将减弱的薄膜称为增反膜，或高反射膜。

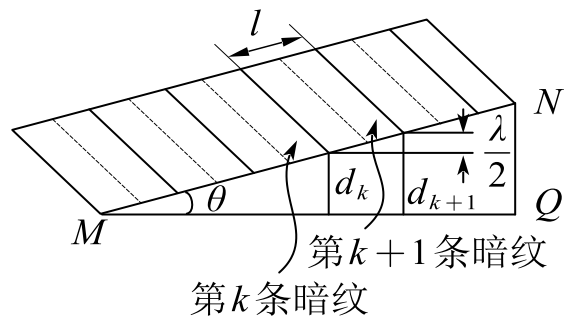
### 3) 等厚干涉条纹

#### (1) 劈尖膜

空气劈尖：在两玻璃片之间形成的空气薄膜。



劈尖的干涉



等厚干涉条纹

尖上下表面反射的两光线间的光程差是

$$\delta = 2d + \frac{\lambda}{2}$$

干涉明纹出现条件为

$$\delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

干涉暗纹出现条件为

$$\delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = (k + \frac{1}{2})\lambda, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

任何两个相邻的明纹或暗纹之间的距离  $l$  由下式决定

$$l \sin\theta = d_{k+1} - d_k = \frac{\lambda}{2}$$

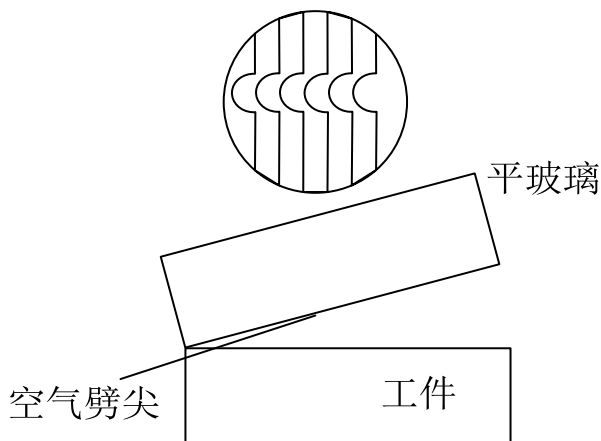
式中， $\theta$  为劈尖的夹角。干涉条纹是等间距的，而且  $\theta$  愈小，干涉条纹愈疏；

$\theta$  愈大，干涉条纹愈密。



题 3. 用劈尖干涉法可检测工件表面缺陷, 当波长为  $\lambda$  的单色平行光垂直入射时, 若观察到的干涉条纹如图所示, 每一条纹弯曲部分的顶点恰好与其左边条纹的直线部分的连线相切, 则工件表面与条纹弯曲处对应的部分 ( )。

- A. 凸起, 且高度为  $\lambda/4$       B. 凸起, 且高度为  $\lambda/2$   
 C. 凹陷, 且深度为  $\lambda/2$       D. 凹陷, 且深度为  $\lambda/4$



答案: C

解析: 由  $\delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$  易得, 图中弯曲部分向着低级明纹方向移动, 因此低级明纹处的厚度变厚, 所以工作表面有凹陷。

$$\delta_1 = 2d_1 + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

$$\delta_2 = 2d_2 + \frac{\lambda}{2} = (k+1)\lambda$$

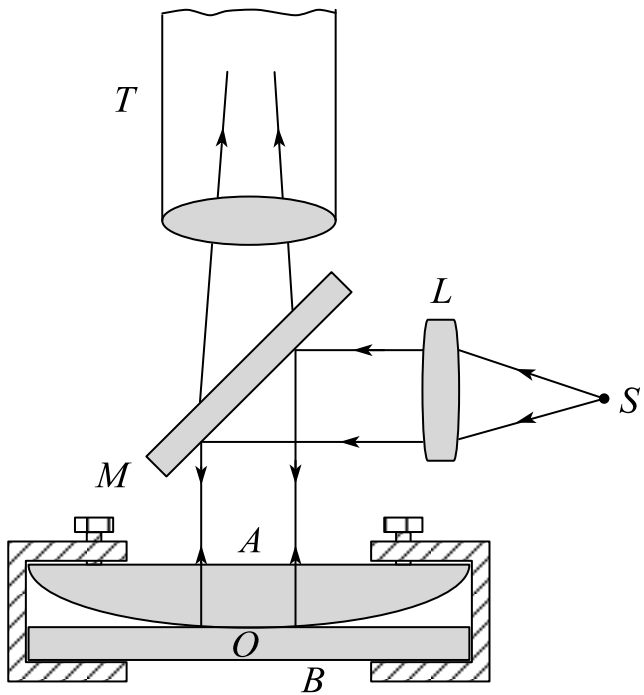
$$\Delta d = \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

## (2) 牛顿环

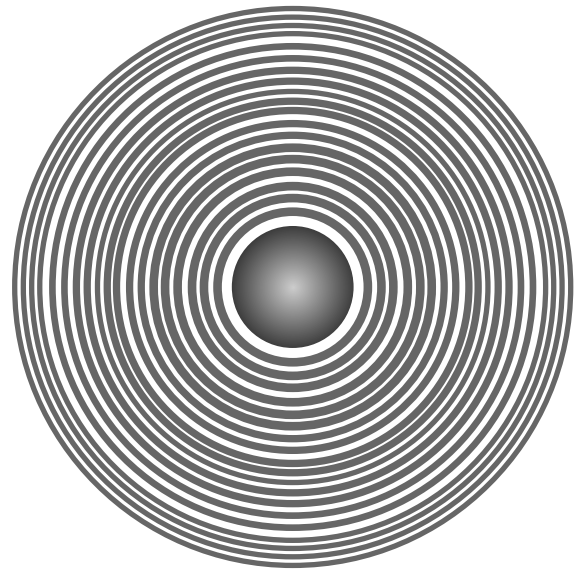
在一块光学平整的玻璃片  $B$  上, 放一曲率半径  $R$  很大的平凸透镜  $A$ , 当平行光束垂直地射向平凸透镜时, 可以观察到在透镜表面出现一组干涉条纹, 这些干涉条纹是以接触点  $O$  为中心的同心圆环, 称为牛顿环。

配套课程 习题答案





(a) 观察牛顿环的仪器简图



(b) 牛顿环的照相图

### 牛顿环

明条纹处所对应的空气层厚度  $d$  应满足

$$\delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

暗条纹处所对应的空气层厚度  $d$  应满足

$$\delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = (k + \frac{1}{2})\lambda, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

反射光中的明环的半径为

$$r = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)R\lambda}$$

反射光中的暗环的半径为

$$r = \sqrt{kR\lambda}$$

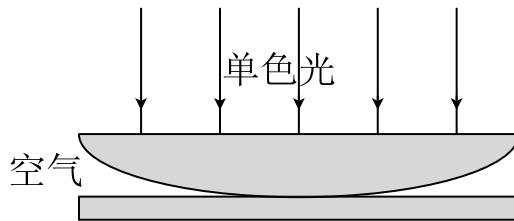
透镜的曲率半径为

$$R = \frac{r_{k+m}^2 - r_k^2}{m\lambda} = \frac{(r_{k+m} - r_k)(r_{k+m} + r_k)}{m\lambda}$$



题 8. 一平凸透镜，凸面朝下放在一平板玻璃上。透镜刚好与平板玻璃接触。波长分别为  $\lambda_1 = 600\text{nm}$  和  $\lambda_2 = 500\text{nm}$  的两种单色光垂直入射，观察反射光形成的牛顿环。从中心向外数的两种光的第四个明环中心所对应的空气膜厚度之差为 ( )。(空气的折射率为1)

- A.  $400\text{nm}$       B.  $350\text{nm}$       C.  $200\text{nm}$       D.  $175\text{nm}$



答案: D

$$\text{解析: } \delta_1 = 2d_1 + \frac{\lambda_1}{2} = 4\lambda_1$$

$$\therefore d_1 = 1050\text{nm}$$

$$\delta_2 = 2d_2 + \frac{\lambda_2}{2} = 4\lambda_2$$

$$\therefore d_2 = 875\text{nm}$$

$$\therefore \Delta d = 175\text{nm}$$

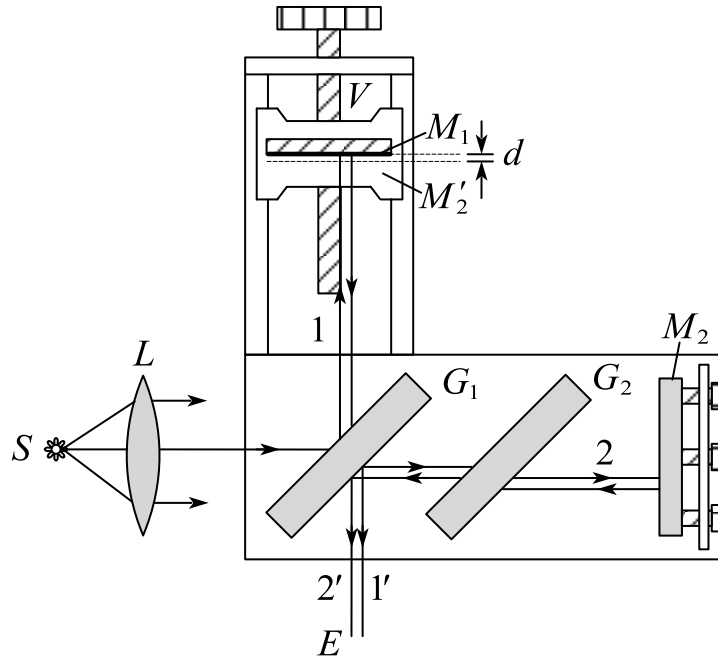
## 5. 迈克耳孙干涉仪

### 1) 迈克尔逊干涉仪

迈克耳孙干涉仪的构造略图如图所示， $M_1$ 与 $M_2$ 是两片精密磨光的平面反



射镜， $G_1$ 和 $G_2$ 是两块材料相同、厚薄均匀而且相等的平行玻璃片，在 $G_1$ 的一个表面上镀有半透明的薄银层，使照射在 $G_1$ 上的光强，一半反射，一半透射， $G_1$ 、 $G_2$ 这两块平行玻璃片与 $M_1$ 和 $M_2$ 倾斜成 $45^\circ$ 角。



构造示意图

玻璃片 $G_2$ 起补偿光程的作用，因此玻璃片 $G_2$ 称为补偿片。

当 $M_1$ 每平移相等的距离时，视场中则有一条明纹移过，所以数出视场中移过的明纹条数 $N$ ，便可算出 $M_1$ 平移的距离

$$\delta = 2d = N\lambda$$

上式指出，用已知波长的光波可以测定长度，也可用已知的长度来测定波长。

题 1. 若在迈克耳孙干涉仪的可动反射镜  $M$  移动  $0.600\text{mm}$  过程中，观察到干涉条纹移动了 2000 条，则所用光波的波长为 \_\_\_\_\_  $\text{nm}$ 。

答案：600

解析：  $2d = N\lambda \quad \therefore \lambda = 600\text{nm}$

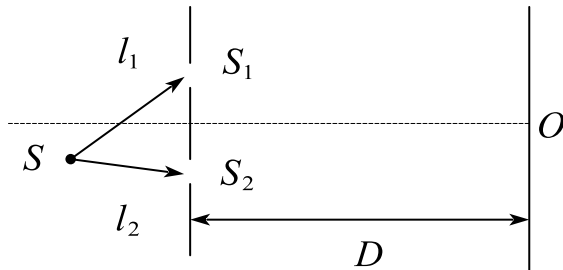


## 课时二十四 练习题

1. 波的相干条件为 ( )。
  - A. 频率相同，振动方向相同，位相差恒定
  - B. 频率相同，振动方向相同，位相差不定
  - C. 频率相同，振动方向垂直，位相差恒定
  - D. 频率相同，振动方向垂直，位相差不定
  
2. 获得相干光有两种主要方法，一是\_\_\_\_\_，二是\_\_\_\_\_。
  
3. 光强均为  $I_0$  的两束相干光发生干涉时，分析说明在干涉区域可能出现的最大光强和最小光强分别是多少？
  
4. 双缝间距为  $2\text{mm}$ ，双缝与屏幕相距  $300\text{cm}$ ，用波长为  $600\text{nm}$  的光照射时，屏幕上干涉条纹的相邻两明条纹的间距是 ( )。
  - A.  $4.5\text{mm}$
  - B.  $0.9\text{mm}$
  - C.  $3.12\text{mm}$
  - D.  $4.15\text{mm}$
  
5. 在杨氏双缝干涉试验中，将双缝间距  $d$  增大，接收屏上的干涉条纹间距\_\_\_\_\_；将接收屏向双缝靠近，接收屏上的干涉条纹间距\_\_\_\_\_。(增大、减小、不变)
  
6. 在杨氏双缝干涉实验中，增大一个缝的宽度，并保持两缝中心的距离不变，则 ( )。
  - A. 条纹会整体平移
  - B. 条纹间距发生改变
  - C. 条纹明暗对比发生改变
  - D. 条纹明暗对比发生改变，同时条纹整体平移
  
7. 在如图所示的杨氏双缝干涉实验中，单色光源  $S$  到两缝  $S_1$  和  $S_2$  的距离分别为  $l_1$  和  $l_2$ ，并且  $l_1 - l_2 = 3\lambda$ ， $\lambda$  为入射光的波长，双缝之间的跑离为  $d$ ，双缝到屏幕的距离为  $D (D \gg d)$ ，求：
  - (1) 零级明纹到屏幕中央  $O$  点的距离；



(2) 相邻明条纹间的距离。



8. 用白光光源进行双缝实验，若用一个纯红色的滤光片遮盖一条缝，用一个纯蓝色的滤光片遮盖另一条缝，则 ( )。

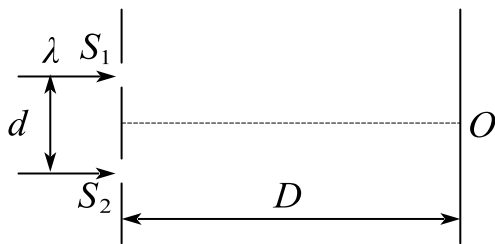
- A. 干涉条纹的宽度将发生改变
- B. 产生红光和蓝光的两套彩色干涉条纹
- C. 干涉条纹的亮度将发生改变
- D. 不产生干涉条纹

9. 双缝干涉实验装置如图所示，双缝与屏之间的距离  $D = 120\text{cm}$ ，两缝之间的距离  $d = 0.50\text{mm}$ ，用波长  $\lambda = 500\text{nm}$  的单色光垂直照射双缝。

(1) 求原点  $O$  上方第五级明条纹的坐标；

(2) 用厚度  $l = 1.0 \times 10^{-2}\text{mm}$ ，折射率  $n = 1.58$  的透明薄膜盖在图中的  $S_1$  缝后面，求原点  $O$  处相干光线的光程差；

(3) 干涉条纹如何移动？



10. 如图所示，两光源  $S_1$ 、 $S_2$  发出波长为  $\lambda$  的单色光，分别通过两种介质（折射率分别  $n_1$  和  $n_2$ ）射到介质的分界面上的  $P$  点，已知  $S_1P = S_2P = r$ ，则这两条光的几何路程  $\Delta r$ 、光程差  $\delta$  和相位差  $\Delta\varphi$  分别为：( )。

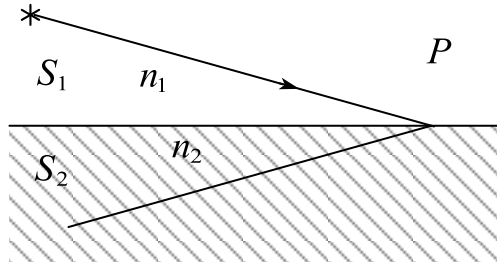
- A.  $\Delta r = 0, \delta = 0, \Delta\varphi = 0$



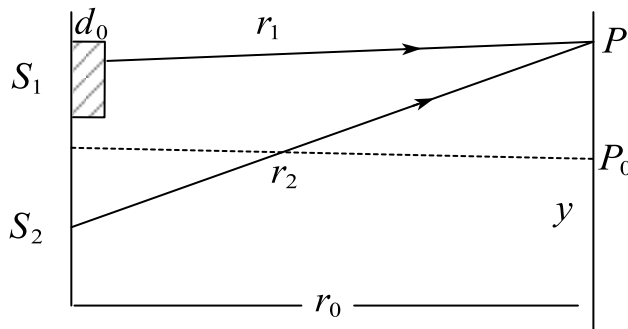
B.  $\Delta r = (n_2 - n_1)r, \delta = (n_2 - n_1)r, \Delta\varphi = 2\pi(n_2 - n_1)/\lambda$

C.  $\Delta r = 0, \delta = (n_2 - n_1)r, \Delta\varphi = 2\pi(n_2 - n_1)r$

D.  $\Delta r = 0, \delta = (n_2 - n_1)r, \Delta\varphi = 2\pi(n_2 - n_1)r/\lambda$



11. 如图所示，把折射率为  $n = 1.5$  的玻璃插入杨氏双缝干涉实验的一束光路中，光屏上原来第5级亮纹所在的位置变为中央亮条纹，已知光波长  $\lambda = 6.0 \times 10^{-7} m$ ，求插入玻璃片的厚度。



12. (判断) 获得相干光的方法有两种：分波振面法和分振幅法，其中杨氏双缝干涉是分波振面法，薄膜干涉是分振幅法。( )

13. 真空中平行单色光垂直照射到牛顿环装置时，从平凸透镜向平板玻璃（设两者相互接触，接触点为  $O$ ）观察反射光的干涉，则可看到许多明暗相间的同心圆环，其中接触点  $O$  处是\_\_\_\_\_。(选填亮、暗)

14. 肥皂泡吹大到一定程度时，会看到有彩色条纹。试问：

(1) 产生这种现象的原因是什么？

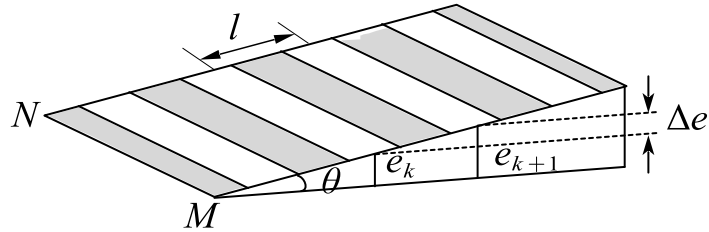
(2) 肥皂泡吹大到要破裂时，将呈什么颜色？说明理由。

15. 两块折射率  $n = 1.6$  的标准平面玻璃间形成一个劈尖，用波长  $\lambda = 600nm$  的单

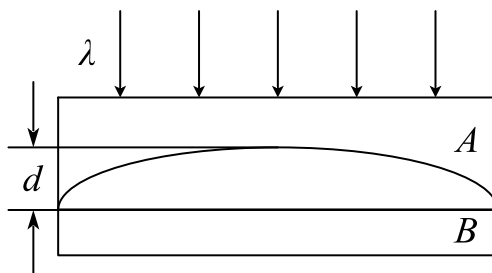




色光直入射产生等厚干涉条纹；若在劈尖内充满折射率  $n = 1.4$  的液体，则相邻明纹间距要比劈尖内充满空气时缩小了  $\Delta L = 0.5\text{mm}$ 。试求：劈尖角度  $\theta$  大小是多少？

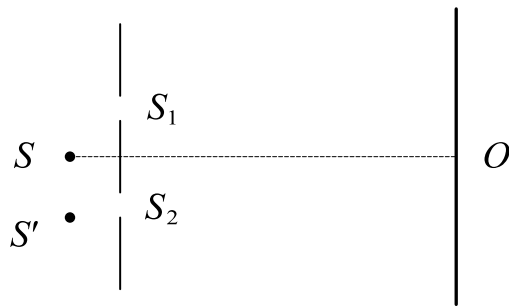


16. 柱形平凹透镜  $A$  放在平玻璃片  $B$  上，现用波长为  $\lambda$  的平行单色光垂直向下照射，观察  $A$  和  $B$  间空气薄膜的反射光干涉条纹。若空气膜的最大厚度  $d = 9\lambda/4$ ，那么一共能看到\_\_\_\_\_条明纹；若把空气膜充满水，那么一共能看到\_\_\_\_\_条明纹。已知水和玻璃的折射率分别为1.33和1.52。



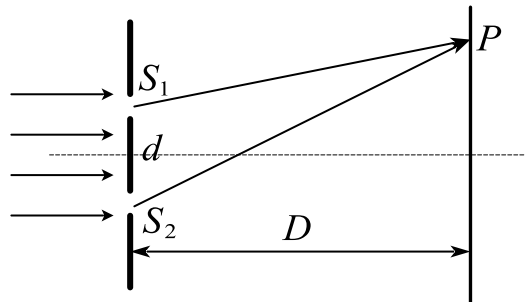
- 17. 不同颜色的光相遇能否发生干涉\_\_\_\_\_（选“能”或“不能”）
- 18. （判断）同一光源发出的一定是相干光。（    ）
- 19. 在双缝干涉实验中，若单色点光源  $S$  到缝  $S_1$  和  $S_2$  的距离相等，则观察屏上中央明条纹中心位于图中  $O$  处。现将光源  $S$  向下移动到图中的  $S'$  位置，则（    ）。
  - A. 中央明条纹向下移动，且条纹间距不变
  - B. 中央明条纹向上移动，且条纹间距不变
  - C. 中央明条纹向下移动，且条纹间距增大
  - D. 中央明条纹向上移动，且条纹间距增大





20. 如图所示，在杨氏双缝干涉实验中，一束波长为 $\lambda$ 的单色平行光垂直入射到双缝上，观察屏上 $P$ 点到缝 $S_2$ 的距离与 $P$ 点到缝 $S_1$ 的距离相差 $\lambda/6$ ，即 $S_2P - S_1P = \lambda/6$ 。若闭合其中任何一个缝后， $P$ 点的光强均为 $I_0$ 。把双缝都打开后， $P$ 点的光强值 $I$ 为（ ）。

- A.  $I_0$       B.  $2I_0$       C.  $3I_0$       D.  $4I_0$



21. 双缝干涉实验所用单色光波长 $\lambda = 500nm$  ( $1nm = 10^{-9}m$ )，双缝与观察屏距离 $D = 1.2m$ ，双缝间距 $d = 0.4mm$ ，则屏上相邻明条纹间距 $\Delta x$ 大小为（ ）。

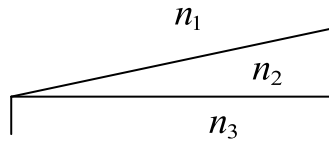
- A.  $1mm$       B.  $1.5mm$       C.  $2mm$       D.  $2.5mm$

22. 把双缝干涉实验装置放在折射率为 $n$ 的水中，两缝间距离为 $d$ ，双缝到屏的距离为 $D$  ( $D \gg d$ )，所用单色光在真空中的波长为 $\lambda$ ，则屏上干涉条纹中相邻明纹之间的距离是（ ）。

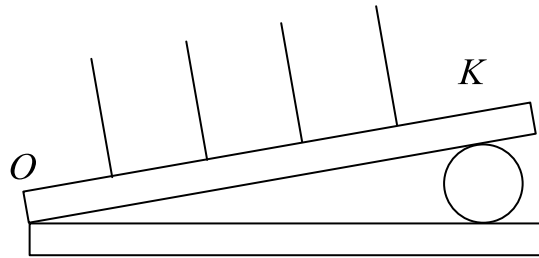
- A.  $\lambda D/(nd)$       B.  $n\lambda D/d$       C.  $\lambda d/(nD)$       D.  $\lambda D/(2nd)$

23. 用波长为 $\lambda$ 的单色光垂直照射如图所示的、折射率为 $n_2$ 的劈形膜 ( $n_1 > n_2$ ,  $n_3 > n_2$ )，观察反射光干涉，棱边处为\_\_\_\_\_纹，从劈形膜顶开始，第2条明条纹中心所对应的膜厚度 $e =$ \_\_\_\_\_。

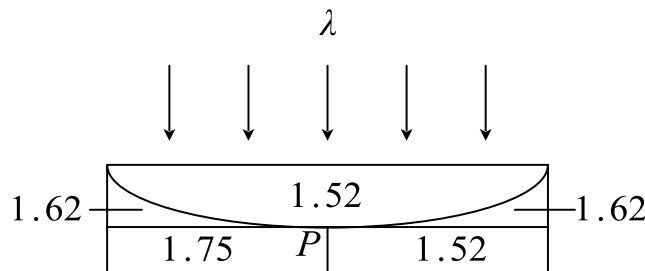




24. 用两片平玻璃夹住一金属细丝形成空气劈尖，如图。若用波长为 $600nm$ 的单色平行光垂直入射，图中 $K$ 处为第6条明纹，求该金属丝的直径。若将整个实验装置放在水中 ( $n_{水} = 4/3$ )，求在图中 $O$ 至 $K$ 之间可观察到的暗条纹的数目。

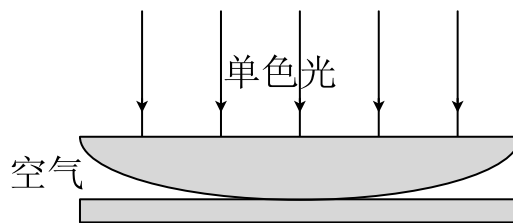


25. 右图为牛顿圈干涉装置，单色光垂直照射，则牛顿圈中心 $P$ 点处的圆斑是\_\_\_\_\_的。(填：“左明右暗”、“左暗右明”、“全明”或“全暗”)



26. 如图所示，用单色平行光垂直照射在观察牛顿环的装置上。当平凸透镜竖直向上缓慢平移而远离平板玻璃时，可以观察到环状干涉条纹 ( )。

- A. 静止不动    B. 单色    C. 向外扩张    D. 向中心收缩



27. 在迈克耳孙干涉仪的一条光路中，放入一折射率为 $n$ ，厚度为 $d$ 的透明薄片，放入后，这条光路的光程改变了 ( )。

- A.  $2(n-1)d$     B.  $2nd$     C.  $2(n-1)d + \lambda/2$     D.  $nd$     E.  $(n-1)d$



## 课时二十五 光的衍射

考点	重要程度	题型
1. 光的衍射现象 惠更斯-菲涅耳原理	★★★	选填、简答
2. 单缝的夫琅禾费衍射	★★★★★	选填、简答、计算
3. 圆孔的夫琅禾费衍射 光学仪器的分辨本领	★★★★	选填、简答、计算
4. 光栅衍射	★★★★★	选填、简答、计算
5. X射线的衍射	★	简答

### 1. 光的衍射现象 惠更斯-菲涅耳原理

#### 1) 光的衍射现象

衍射是波在传播过程中遇到障碍物时，能够绕过障碍物的边缘前进，偏离直线传播的现象。衍射是波的特征之一，在障碍物的尺度和波长相当的时候这个现象变得明显，障碍物的尺度越小衍射现象越明显。但太小的时候，虽然衍射效果很好，但由于强度（衍射波的振幅）太小，难以观察。

**题 1. 点光源照在一个剃须刀片上，在屏上形成了它的影子，其边缘较为模糊，原因是（ ）。**

- A. 光的反射                  B. 光的衍射                  C. 光的干涉                  D. 光强太小

答案： B

解析：衍射是波在传播过程中遇到障碍物时，能够绕过障碍物的边缘前进，偏离直线传播的现象。光绕过障碍物边缘，进行传播，因此边缘是模糊的。

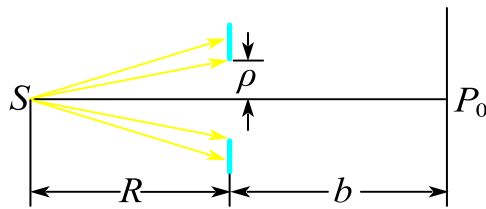
#### 2) 菲涅尔衍射和夫琅禾费衍射

##### (1) 菲涅耳衍射

衍射屏离光源或接收屏的距离为有限远时的衍射。

菲涅耳圆孔衍射和圆屏衍射：



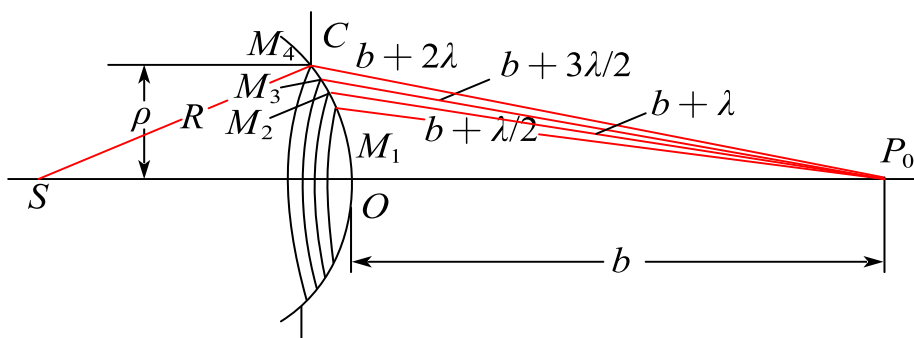


实验现象：

圆孔衍射图样是亮暗相间的同心圆环，中心点可能是亮的，也可能是暗的。孔径变化，衍射图样中心的亮暗交替变化。移动屏幕，衍射图样中心的亮暗交替变化，中心强度随  $\rho$  的变化很敏感，随距离  $b$  的变化迟缓。

圆屏的衍射图样也是同心圆环，但衍射图样的中心总是一个亮点。

菲涅尔半波带法：将波阵面分割成许多等面积的波带的方法。在圆孔的例子中，把波前分割成为一系列环形半波带，使得相邻两个波带的边缘点到  $P_0$  点的光程差等于半个波长，



圆孔的菲涅耳衍射与波带分割原则

各个波带在  $P_0$  点所引起的光振幅接近相等。两相邻的波带上，任何两个对应点所发出的子波的光程差总是  $\frac{\lambda}{2}$ ，亦即相位差总是  $\pi$ ，结果任何两个相邻波带所发出的子波在  $P_0$  点引起的光振动将完全相互抵消。

题 2. 半波带一定对应某个衍射角而言的，所以不同的衍射角可能对应不同宽度的半波带。 ( )

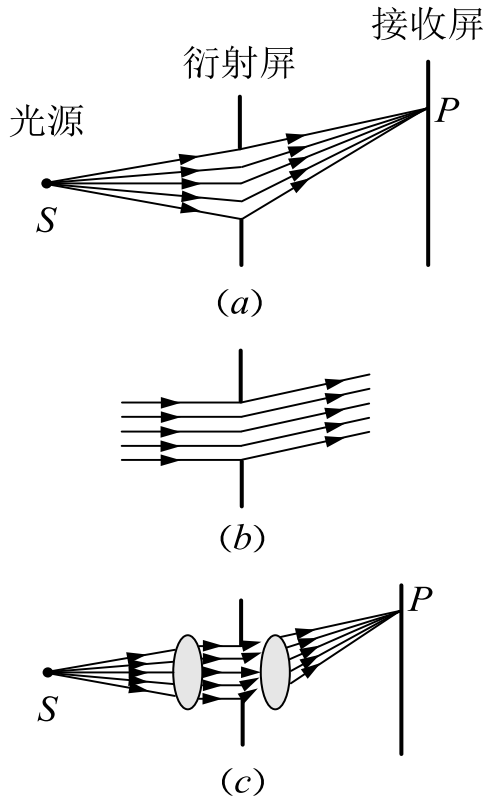
答案： x



解析：两相邻的波带上，任何两个对应点所发出的子波的光程差总是  $\frac{\lambda}{2}$ ，因此半波带的宽度是相等的。

(2) 夫琅禾费衍射

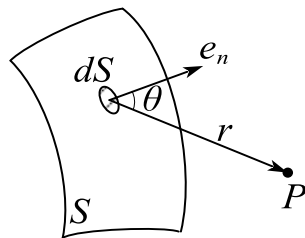
照射到衍射屏上的入射光和离开衍射屏的衍射光都是平行光的衍射。



菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射

3) 惠更斯—菲涅耳原理

波在传播过程中，从同一波阵面上各点发出的子波，经传播而在空间某点相遇时，产生相干叠加，这个发展了的惠更斯原理称为惠更斯-菲涅耳原理。



菲涅耳还指出，给定波阵面S上，每一面元dS发出的子波，在波阵面前方某



点  $P$  所引起的光振动的振幅的大小与面元面积  $dS$  成正比，与面元到  $P$  点的距离  $r$  成反比，并且随面元法线与  $r$  间的夹角  $\theta$  增大而减小。

题 3. 根据惠更斯-菲涅耳原理，若已知光在某时刻的波阵面为  $S$ ，则  $S$  前方某点  $P$  的光强决定于波阵面上所有面光源发出的子波各自传到  $P$  点的 ( )。

- A. 振动振幅之和  
B. 光强之和  
C. 振动振幅之和的平方  
D. 相干叠加

答案：D

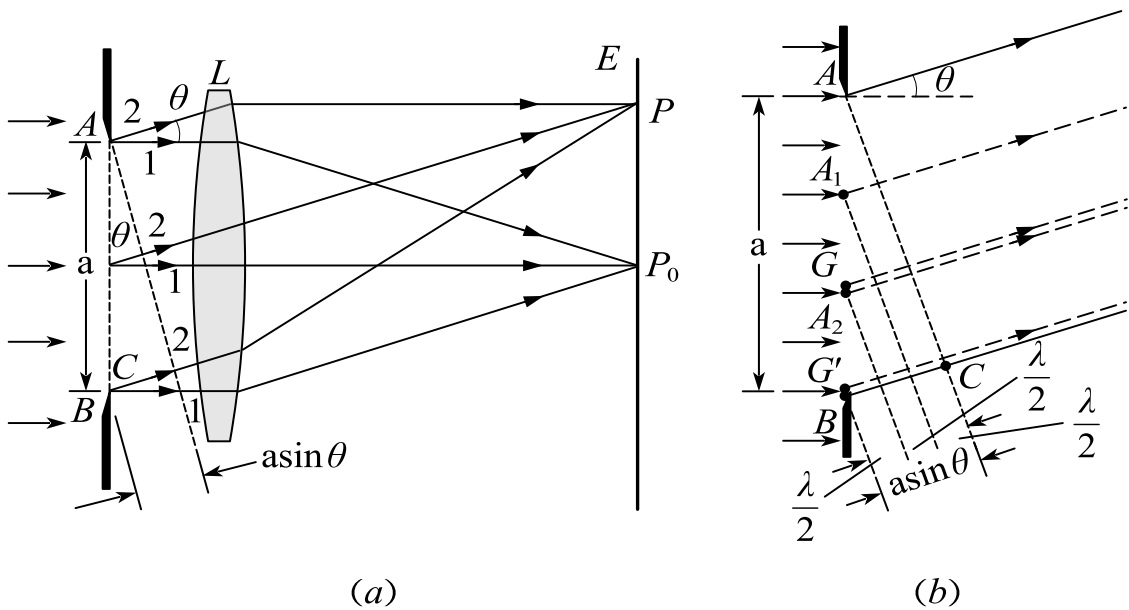
解析：惠更斯-菲涅耳原理：波在传播过程中，从同一波阵面上各点发出的子波，经传播而在空间某点相遇时，产生相干叠加。

## 2. 单缝的夫琅禾费衍射

### 1) 单缝的夫琅禾费衍射

利用菲涅尔半波带法：两条边缘衍射光束的光程差为  $\delta = BC = a \sin \theta$ ，可以作一些平行于  $AC$  的平面，使两相邻平面之间的距离等于入射光的半波长，假定这些平面将单缝处的波阵面  $AB$  分成整数个波带[图 (b)]。





单缝衍射条纹的计算

由于各个波带的面积相等，所以各个波带在  $P$  点所引起的光振幅接近相等。两相邻的波带上，任何两个对应点所发出的子波的光程差总是  $\frac{\lambda}{2}$ ，亦即相位差总是  $\pi$ 。经过透镜会聚，由于透镜不产生附加相位差，所以到达  $P$  点时相位差仍然是  $\pi$ 。结果任何两个相邻波带所发出的子波在  $P$  点引起的光振动将完全相互抵消。由此可见， $BC$  是半波长的偶数倍时，亦即对应于某给定角度  $\theta$ ，单缝可分成偶数个波带时，所有波带的作用成对地相互抵消，在  $P$  点处将出现暗纹；如果  $BC$  是半波长的奇数倍，亦即单缝可分成奇数个波带时，相互抵消的结果，还留下一个波带的作用，在  $P$  点处将出现明纹。

衍射暗纹出现条件：

$$a \sin \theta = k \lambda, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$a$  为单缝的宽度， $\theta$  为衍射角。

衍射明纹出现条件：

$$a \sin \theta = \pm \left( k + \frac{1}{2} \right) \lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$





中央明纹的宽度： $k = \pm 1$ 的两个暗点之间的角距离。 $k = 1$ 时的暗点对应衍射角 $\theta_1$ ，也是中央明纹的半角宽度 $\Delta\theta$

$$\Delta\theta = \theta_1 = \arcsin \frac{\lambda}{a}$$

当 $\theta_1$ 很小时， $\Delta\theta = \frac{\lambda}{a}$

题 1. 波长为 $600\text{nm}$  ( $1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$ )的单色光垂直入射到宽度为 $0.10\text{mm}$ 的单缝上，

观察夫琅禾费衍射图样，透镜焦距 $1.0\text{m}$ ，屏在透镜的焦平面处，求：

(1) 中央明条纹的宽度 $\Delta x_0$ 和其他明纹的宽度 $\Delta x$ ；

(2) 光屏上第二级明纹中心位置 $x_2$ 。

解：(1) 对于中央明级： $\Delta\theta = \arcsin \frac{\lambda}{a} \approx \frac{\lambda}{a}$

$$\therefore \Delta x_0 = 2\Delta\theta f = 1.2 \times 10^{-2}\text{m} \quad \Delta x = \Delta\theta f = 6 \times 10^{-3}\text{m}$$

$$(2) a \sin\theta = \frac{5}{2}\lambda \quad \therefore x_2 = \theta f = 1.5 \times 10^{-2}\text{m}$$

题 2. 在单缝夫琅和费衍射实验中，波长为 $\lambda$ 的单色光垂直入射在宽度为 $a = 4\lambda$ 的单缝上，对应于衍射角为 $30^\circ$ 的方向，单缝处波阵面可分成的半波带数目为

( )。

A. 4个      B. 8个      C. 6个      D. 2个

答案：A

解析： $a \sin\theta = 2\lambda = 4 \times \frac{\lambda}{2}$

2) 单缝衍射条纹光强的计算

单缝衍射光强公式：





### 3. 圆孔的夫琅禾费衍射 光学仪器的分辨本领

#### 1) 圆孔的夫琅禾费衍射

在单缝夫琅禾费衍射中，在光屏上看到的是圆孔的衍射图样，中央是一个较亮的圆斑，外围是一组同心的暗环和明环。这个由第一暗环所围的中央光斑，称为艾里斑。

第一级暗环的衍射角 $\theta_1$

$$\sin\theta_1 = \frac{0.61\lambda}{r} = \frac{1.22\lambda}{d}$$

艾里斑的半径：

$$R = f \tan\theta_1$$

由于 $\theta_1$ 很小，则 $R = \frac{1.22\lambda}{d} f$

小结： $\lambda$ 愈大或 $d$ 愈小，衍射现象愈显著，当 $\frac{1.22\lambda}{d} \ll 1$ 时，衍射现象可忽略。

**题 1. 一准直的单色光束（ $\lambda = 600nm$ ）垂直入射在直径为 $1.2cm$ 、焦距为 $50cm$ 的汇聚透镜上，试计算在该透镜焦平面上的衍射图样中心亮斑的角宽度和线宽度。**

$$\text{解：} \sin\theta_1 = \frac{1.22\lambda}{d} = 6.1 \times 10^{-5}$$

$$\therefore \theta = 2\theta_1 = 1.22 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$D = f\theta = 6.1 \times 10^{-5} \text{ m}$$

#### 2) 光学仪器的分辨本领

瑞利判据：对一个光学仪器来说，如果一个点光源的衍射图样的中央最亮处刚好与另一个点光源的衍射图样的第一个最暗处相重合，这时两衍射图样（重叠）



区的)光强度约为单个衍射图样的中央最大光强的80%，两个点光源恰好为这一光学仪器所分辨。

“恰能分辨”的两点光源的两衍射图样中心之间的距离，应等于艾里斑的半径。两点光源在透镜处所张的角称为最小分辨角 $\theta_R$ 。对于直径为 $d$ 的圆孔衍射图样来说，

$$\theta_R = \theta_1 = \frac{1.22\lambda}{d}$$

即最小分辨角的大小由仪器的孔径 $d$ 和光波的波长 $\lambda$ 决定。在光学中，常将光学仪器的最小分辨角的倒数称为这仪器的分辨本领

$$R = \frac{1}{\theta_R}$$

由上式可知，光学仪器的分辨率都与仪器的孔径成正比，与所用的光波的波长成反比。

题 2. 在通常情况下，人眼瞳孔直径约为 $2.3\text{mm}$ 。人眼最灵敏的黄绿光的波长为 $550\text{nm}$ ，则人眼的最小分辨角等于\_\_\_\_\_，若把两物点放在明视距离( $25\text{cm}$ )处，则人眼可分辨的最小距离为\_\_\_\_\_。

答案： $\frac{671 \times 10^{-5}}{23}$ ； $\frac{16775 \times 10^{-7}}{23}$

解析： $\theta_R = \frac{1.22\lambda}{d} = \frac{671}{23} \times 10^{-5} \text{rad}$

$$R = \theta_R f = \frac{16775}{23} \times 10^{-7} \text{m}$$

望远镜的分辨本领决定于物镜的直径 $d$ ，望远镜的最小分辨角

$$\theta_R = \theta_1 = \frac{1.22\lambda}{d}$$



## 望远镜的分辨本领

$$R = \frac{1}{\theta_R} = \frac{d}{1.22\lambda}$$

提高望远镜的分辨本领的途径是增大物镜的直径。

题 3. 地面观察猎户星座里一个双星系统有  $1.2 \times 10^{-5}$  弧度的张角。如果双星发光的光波长  $\lambda = 5.0 \times 10^{-7} \text{ m}$ ，则能分辨此双星的望远镜的最小孔径是

$m$ 。

答案：  $\frac{61}{1200}$

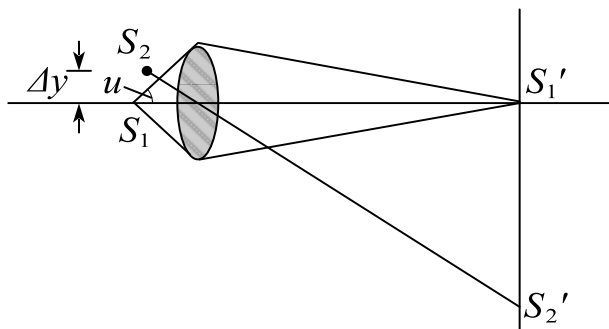
解析：  $\theta_R = \frac{1.22\lambda}{d}$

$$\therefore d = \frac{61}{1200} \text{ m}$$

显微镜的分辨极限不用最小分辨角而用最小分辨距离来表示，

$$\Delta y = \frac{0.61\lambda}{n \sin u}$$

其中  $n$  为物方的折射率， $u$  为孔径对物点的半张角。乘积  $n \sin u$  常称为显微镜的数值孔径，用符号  $N.A.$  表示。



显微镜的最小分辨距离

## 显微镜的分辨本领



$$R = \frac{1}{\Delta y} = \frac{n \sin u}{0.61\lambda}$$

题 4. 孔径相同的电子显微镜和光学显微镜比较,前者分辨本领大的原因是( ).

- A. 电子可以自由移动
- B. 电子的穿透力强
- C. 电子衍射的波长比可见光波长大
- D. 电子衍射的波长比可见光波长小

答案: D

解析: 根据  $R = \frac{n \sin u}{0.61\lambda}$  可知, 孔径相同, 波长越小分辨本领越大。

#### 4. 光栅衍射

##### 1) 光栅衍射

光栅: 由大量等宽等间距的平行狭缝构成的光学器件。

透射光栅的总缝数为  $N$ , 缝宽为  $a$ , 缝间不透光部分宽度为  $b$ ,  $(a + b) = d$

称为光栅常量。

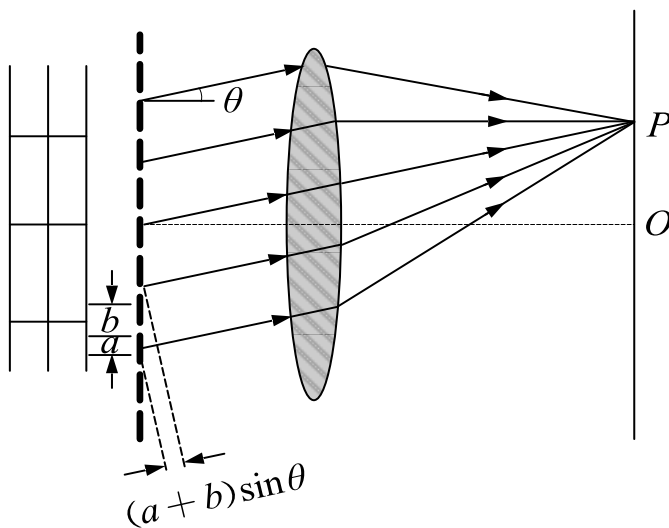


图 1 光栅衍射



图 2 光栅衍射的图像

配套课程 习题答案



当平行单色光垂直入射到光栅上(图1)，衍射光束通过透镜会聚在透镜的焦平面上，且在屏上几乎黑暗的背景上呈现出一系列又细又亮的明条纹，如图2所示。

## 2) 光栅方程

对应于衍射角 $\theta$ ，光栅上相邻两缝发出的光到达 $P$ 点时的光程差都是相等的，这一光程差等于 $d \sin \theta$

$$d \sin \theta = (a + b) \sin \theta = \pm k \lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

当 $\theta$ 满足上式时，所有的缝发出的光到达 $P$ 点时将发生相长干涉而形成明条纹，上式称为光栅方程。

**题 1. 以 $\lambda_1 = 400\text{nm}$ 与 $\lambda_2 = 500\text{nm}$ 的两种单色光同时垂直照射某光栅，发现除零级以外，它们的谱线第二次重叠是在 $30^\circ$ 的方向上，求：**

**(1) 光栅常数是多少？**

**(2) 该光栅 $1\text{mm}$ 有多少条刻痕？**

答案： (1)  $4\mu\text{m}$ ； (2) 250

解析： (1)  $d \sin \theta = k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2 \quad k_1 = k_2 + 1$

$$\Rightarrow k_2 = 4 \quad \therefore d = 4\mu\text{m}$$

$$(2) N = \frac{1\text{mm}}{d} = 250 \text{ 条}$$

## 3) 光栅衍射的强度分布

$$I_\theta = I_{10} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2$$

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta, \quad \beta = \frac{\pi(a+b)}{\lambda} \sin \theta$$



主极大：当  $d \sin \theta = k\lambda$ ， $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  时，干涉因子有极大值。

极小：光栅衍射光强分布公式中，多缝干涉因子  $\left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta}\right)^2$  和单缝衍射因子  $\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2$  中任一个为零，都会使光强为零，出现极小，光强为0

$$d \sin \theta = \frac{k'}{N} \lambda, \quad k' = 1, 2, \dots, (N-1), (N+1), (N+2), \dots$$

因此，在两个相邻主极大之间有  $N-1$  个极小值。

次极大：这些极大的光强仅为主极大的4%左右，称为次极大，两主极大之间出现的次极大的数目由极小数可推知为  $N-2$  个。

#### 4) 缺级 最大级次

##### (1) 缺级

如果  $\theta$  的某些值满足光栅方程的主明纹条件，而又满足单缝衍射的暗纹条件，这些主明纹将消失，这一现象称为缺级，如果  $\theta$  同时满足：

$$d \sin \theta = k\lambda$$

$$a \sin \theta = k'\lambda$$

则缺级的级数  $k$  为： $k = \frac{d}{a} k'$ ， $k' = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

##### (2) 最大级次

$$k_{\max} < \frac{d}{\lambda}$$

题 2. 波长  $\lambda = 450\text{nm}$  的单色光垂直入射到一光栅上，第二级主极大的衍射角为  $30^\circ$ ，第三级缺级，求：

(1) 光栅常数  $(a+b)$ ；

(2) 透光缝可能的最小宽度  $a$ ；





**(3) 可能观察到的全部主极大的级次.**

答案：(1)  $1.8\mu\text{m}$ ； (2)  $600\text{nm}$ ； (3)  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 4$

解析：(1)  $d \sin \theta_2 = 2\lambda \quad \therefore d = 1.8\mu\text{m}$

$$(2) k = \frac{d}{a} \quad \therefore a = 600\text{nm}$$

$$(3) k_{\max} < \frac{d}{\lambda} = 4 \quad \therefore \text{可能观察到 } 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

## 5) 光栅光谱

用复色光照射到光栅上，除中央明纹外，不同波长的同一级明纹的角位置是不同的，并按波长由短到长的次序自中央向外侧依次分开排列，每一干涉级次都有这样的一组谱线，光栅衍射产生的这种按波长排列的谱线称为光栅光谱。

**题 3. 一束白光垂直照射在一光栅上，在形成的同一级光栅光谱中，偏离中央明纹最远的是\_\_\_\_\_。（填“红光”或“紫光”）**

答案：红光

解析：根据光栅方程  $d \sin \theta = \pm k\lambda$  可知在同一级光栅光谱中，波长越长，衍射角越大，偏离中央明纹越远；红光波长比紫光波长长，所以红光最远。

## 6) 光栅的分辨本领

光栅的分辨本领：把波长靠得很近的两条谱线分辨清楚的本领，是表征光栅性能的主要技术指标。

色分辨本领：恰能分辨的两条谱线的平均波长  $\lambda$  与波长差  $\Delta\lambda$  的比，用  $R$  表示：

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN, \quad \Delta\lambda \text{ 愈小, 其分辨本领愈大。}$$

光栅的分辨本领  $R$  决定于光栅的缝数  $N$  和光谱的级次  $k$ 。



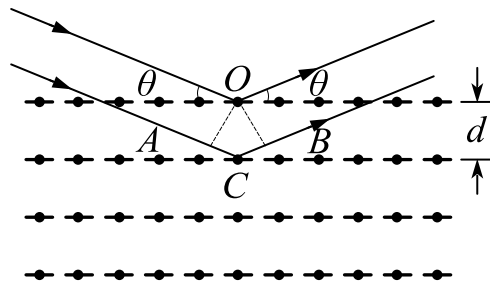
## 7) 干涉和衍射的区别和联系

如果参与相干叠加的各光束是按几何光学直线传播的，这种相干叠加是纯干涉问题，如薄膜干涉。

如果参与相干叠加的各光束的传播不符合几何光学模型，每一光束存在明显的衍射，这种情形干涉和衍射是同时存在的，如杨氏双缝等分波阵面的干涉装置。

## 5. X 射线的衍射

### 1) X 射线的衍射



布拉格公式圈图

各层散射射线相互加强而形成亮点的条件是

$$2d \sin \theta = k\lambda, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

上式称为布拉格公式或布拉格条件。

如果入射 X 射线的波长是连续分布的，则对于入射 X 射线束中波长值为

$$\lambda = \frac{2d \sin \theta}{k}, \quad k=1, 2, 3, \dots \text{的波，在反射中干涉相长。}$$



## 课时二十五 练习题

1. 波长为 $700nm$ 的平行红光垂直照射在一单缝上，缝后置一透镜，焦距为 $0.8m$ ，在透镜的焦距处放置一屏，若屏上呈现的中央明条纹的宽度为 $2mm$ ，求：(1)单缝的宽度；(2)同侧的第1级暗纹与第4级暗纹间的距离.
2. 平行单色光垂直入射于单缝上，观察夫琅和费衍射，若屏上 $P$ 点处为第二级暗纹，则单缝处波面相应地可划分为\_\_\_\_\_个半波带，若将单缝宽度缩小一半， $P$ 点将是第\_\_\_\_\_级\_\_\_\_\_纹.
3. 在夫琅费单缝衍射实验中，若仅仅增大单缝的宽度，而其他条件不变，则中央明条纹将会（ ）.
 

A. 宽度变小	B. 宽度不变，且中心强度也不变
C. 宽度变大	D. 宽度不变，但中心强度增大
4. 车两盏前灯相距 $l$ ，与观察者相距 $S = 10km$ ，夜间人眼瞳孔直径 $d = 5.0mm$ ，人眼波长为 $\lambda = 550nm$  ( $1nm = 10^{-9}m$ )，若只考虑人眼的圆孔衍射，则人眼可分辨两前灯的最小间距 $L =$ \_\_\_\_\_ ( $m$ ).
5. 波长 $\lambda = 550nm$  ( $1nm = 10^{-9}m$ )的单色光垂直入射于光栅常数 $d = 3 \times 10^{-4}cm$ 的平面衍射光栅上，能观察到的光谱线的最大级次为（ ）.
 

A. 2	B. 3	C. 4	D. 5
------	------	------	------
6. 用波长为 $600nm$ 的单色平行光垂直照射一平面光栅，测得第二级主极大的衍射角 $\theta$ 满足 $\sin\theta = 0.3$ ，第三级谱线缺失，求此光栅的光栅常数和缝宽.
7. 用每毫米500条栅纹的光栅，观察钠光谱线( $\lambda = 590nm$ )，光线垂直入射，问最多能看到几级条纹?
8. 在光栅的夫琅和费衍射中，当光栅在光栅所在平面内沿刻线的垂直方向上作微小移动时，则衍射花样（ ）.
 

A. 作与光栅移动方向相同的方向移动
--------------------



B. 作与光栅移动方向相反的方向移动

C. 中心不变，衍射花样变化

D. 没有变化

9. 波长  $\lambda = 600\text{nm}$  ( $1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$ ) 的单色平行光垂直入射到一光栅上，第2级明纹出现在  $\sin\theta = 0.2$  处，第4级为缺级。求：

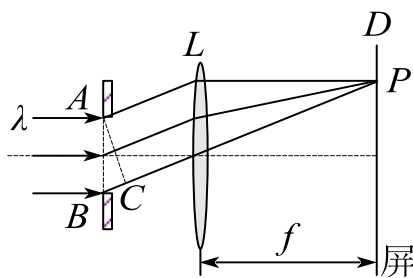
(1) 光栅常数；

(2) 光栅上狭缝的宽度；

(3) 在屏幕上能呈现的全部级数。

10. 为什么在日常生活中容易察觉声波的衍射现象而不太容易观察到光波的衍射现象？

11. 一束波长为  $\lambda$  的平行单色光垂直入射到一单缝  $AB$  上。在屏幕  $D$  上形成衍射图样，如果  $P$  是中央亮纹上侧第二个暗纹所在的位置，则  $\overline{BC}$  的长度为 ( )。



A.  $\lambda/2$

B.  $\lambda$

C.  $3\lambda/2$

D.  $2\lambda$

12. 菲涅耳圆屏衍射的几何阴影中心处有时是亮点，有时是暗点。 ( )

13. 在单缝夫琅和费衍射中： ( )。

A. 各次级明纹的强度相同

B. 中央明纹与其它次级明纹宽度相同

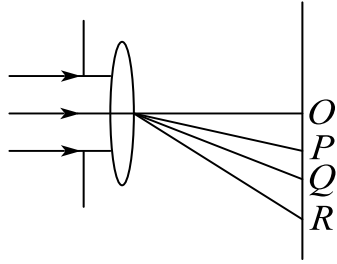
C. 中央明纹的宽度是其它次级明纹宽度的2倍

D. 中央明纹的宽度比其它次级明纹窄

14. 如图，波长为  $\lambda$  的单色平行光垂直照射单缝，若由单缝边缘发出的光波到达



光屏上  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  三点的光程差分别为  $2\lambda$ 、 $2.5\lambda$ 、 $3.5\lambda$ ，比较  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  三点的亮度，则有：（ ）。



A.  $P$  点最亮， $Q$  点次之， $R$  点最暗

B.  $Q$ 、 $R$  两点的亮度相同， $P$  点最暗

C.  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  三点亮度相同

D.  $Q$  点最亮， $R$  点次之， $P$  点最暗

15. 提高光学仪器成像的分辨本领要尽量减小衍射效应。 （ ）

16. (1) 在单缝夫琅禾费衍射实验中，垂直入射的光有两种波长  $400\text{nm}$  和  $760\text{nm}$ ，已知单缝宽度为  $a = 0.1\text{mm}$ ，透镜焦距为  $50\text{cm}$ ，求两种光第一级衍射明纹中心之间的距离；(2) 若用光栅常数为  $d = 0.01\text{mm}$  的光栅替换单缝，其他条件不变，求两种光第一级主极大之间的距离。

17. 光栅衍射条纹是多缝干涉与单缝衍射的总效果。 （ ）

18. 波长  $\lambda = 550\text{nm}$  的单色光垂直入射于光栅常数  $d = 2 \times 10^{-4}\text{cm}$  的平面衍射光栅上，可能观察到的光谱线的最大级次为（ ）。

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2



## 课时二十六 光的偏振

考点	重要程度	题型
1. 光的偏振状态	★★	选填、简答
2. 起偏与检偏 马吕斯定律	★★★★	选填、简答、计算
3. 反射和折射时光的偏振	★★★★	选填、简答、计算

### 1. 光的偏振状态

#### 1) 线偏振光（平面偏振光）

光的干涉和衍射现象说明了光的波动性，但还不能由此确定光是横波还是纵波，光的偏振现象进一步表明光的横波性。光的电磁理论指出，光是电磁波，光的振动矢量 $\vec{E}$ 与光的传播方向垂直。但是，在垂直于光的传播方向平面内，光矢量 $\vec{E}$ 还可能有各种不同的振动状态。

线偏振光：光矢量始终沿某一方向振动的光；

振动面：光的振动方向和传播方向组成的平面；

平面偏振光：由于线偏振光的光矢量保持在固定的振动面内，所以线偏振光又称平面偏振光。

**题 1. 干涉、衍射、偏振是一切波动所特有的现象。 ( )**

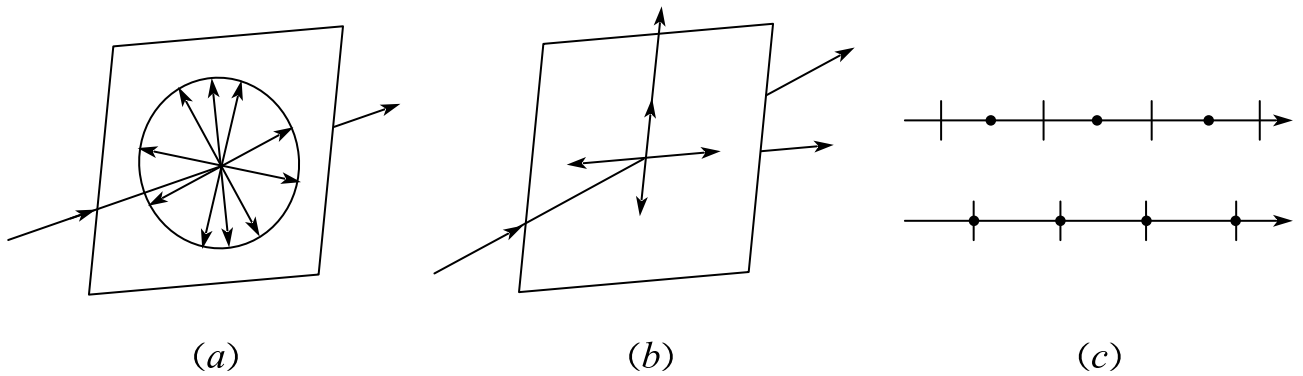
答案：x

解析：干涉和衍射是一切波动所特有的现象，但是偏振是横波特有的现象，纵波没有偏振现象。

#### 2) 自然光

光矢量的振动在各方向上的分布是对称的，振幅也可看作完全相等，这种光为自然光，它是非偏振的。



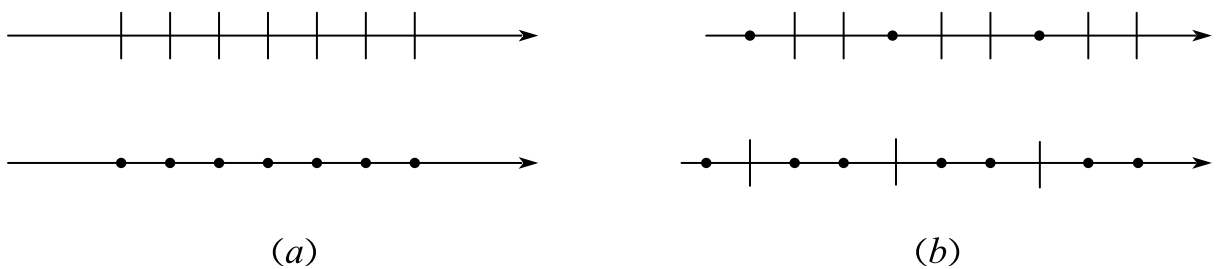


自然光

把自然光分解为两束相互独立的、等振幅的、振动方向相互垂直的线偏振光，这两个线偏振光的光强各等于自然光光强的一半。

3) 部分偏振光

把自然光两个互相垂直的独立振动分量中的一个完全消除或移走，只剩下另一个方向的光振动，则可获得线偏振光。如果只是部分地移走一个分量，使得两个独立分量不相等，则获得部分偏振光。



线偏振光和部分偏振光的表示法

线偏振光是完全偏振的，部分偏振光是介于完全偏振光和自然光之间的偏振状态；部分偏振光可以看作完全偏振光和自然光的混合。

4) 圆偏振光和椭圆偏振光

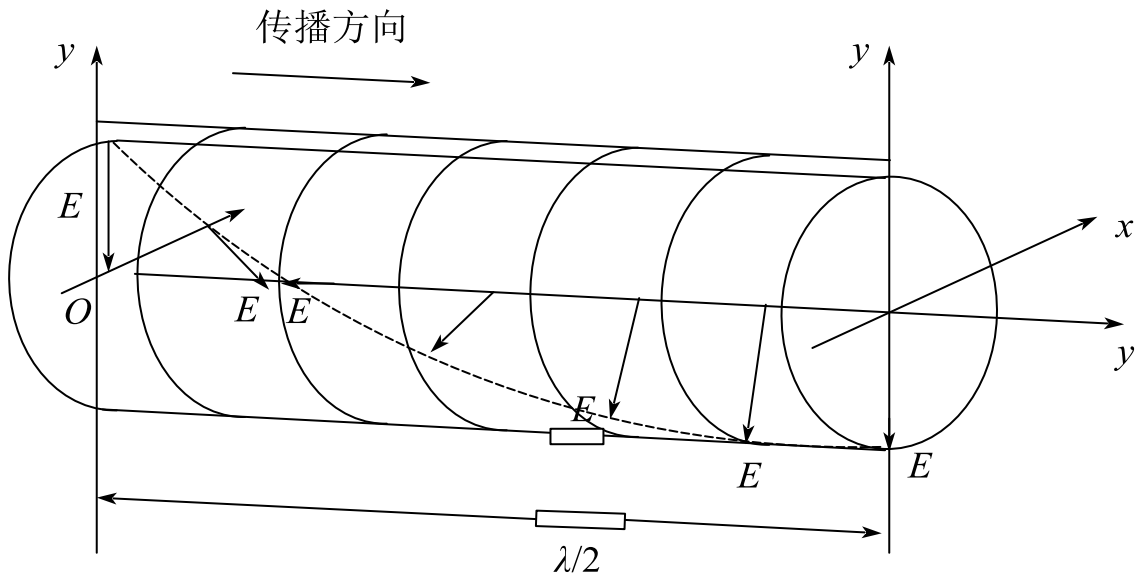
圆偏振光：如果迎着光的传播方向考察，光矢量端点轨迹是一个圆的振动状态。

椭圆偏振光：光矢量端点轨迹是一个椭圆。

椭圆偏振光可以看成是两个振动相互垂直、相位差为  $\frac{\pi}{2}$  的线偏振光的合成，



振幅相等时为圆偏振光。



某时刻右旋圆偏振光的光矢量  $E$  随  $z$  的变化

## 2. 起偏与检偏 马吕斯定律

### 1) 起偏和检偏

**起偏与起偏器：**从自然光获得偏振光的过程称为起偏，产生起偏作用的光学元件称为起偏器。

**偏振片：**一种常用的起偏器，它能对入射自然光的光矢量在某方向上的分量有强烈的吸收，而对与该方向垂直的分量吸收很少。

**偏振化方向：**偏振片只能透过沿某个方向的光矢量或光矢量振动沿该方向的分量，则把这个透光方向称为偏振片的偏振化方向或透振方向。

**检偏器：**检验入射光是否偏振光的元件称为检偏器。

**题 1.**一束光垂直照射到一偏振片上，当偏振片以入射光方向为轴转动时，发现透射光的光强有变化，但无全暗情形，则入射光是（ ）。

- A. 自然光
- B. 部分偏振光
- C. 完全线偏振光
- D. 不能确定其偏振情况的光





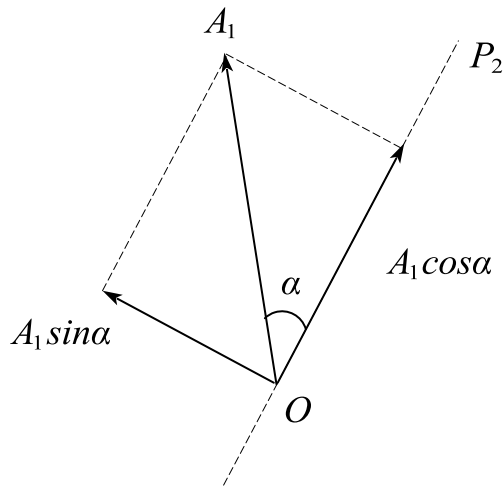
答案：B

解析：A 自然光的话光强不会发生变化，因为自然光的各个方向振幅相等；B 由于透射光强随着偏振片的转动发生变化，因此只能是部分偏振光；C 完全线偏振光会出现全暗情况。

## 2) 马吕斯定律

如果入射线偏振光的光强为  $I_1$  则透射光的光强  $I_2$  为  $I_2 = I_1 \cos^2 \alpha$

式中， $\alpha$  是检偏器的偏振化方向和入射线偏振光的光矢量振动方向之间的夹角。



马吕斯定律用图

题 2. 要使一束线偏振光通过偏振片之后振动方向转过  $90^\circ$ ，至少需要让这束光通过\_\_\_\_\_块理想偏振片，在此情况下，透射光强最大是原来光强的\_\_\_\_\_倍。

答案：2； $\frac{1}{4}$

解析：最少通过两片偏振片，并且每两次偏振的夹角之和为  $\frac{\pi}{2}$



$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = I_0 \cos^2 \theta_1$$

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta_2 = \frac{I_0}{4} \sin^2 2\theta$$

$$\therefore I_{2max} = \frac{I_0}{4}$$

题 3. 一束光是自然光和线偏振光的混合光，让它垂直通过一偏振片，若以此入射光束为轴旋转偏振片，测得透射光强度最大值是最小值的5倍，那么入射光束中自然光与线偏振光的光强比值为（ ）。

A. 1/2      B. 1/3      C. 1/4      D. 1/5      E. 1

答案：A

解析：自然光通过偏振片后光强减半。

自然光为  $I_0$ ，线偏光为  $I_1$

$$I_{max} = I_1 + \frac{I_0}{2}$$

$$I_{min} = \frac{I_0}{2}$$

$$\therefore I_{max} = 5I_{min}$$

$$\therefore I_1 = 2I_0$$

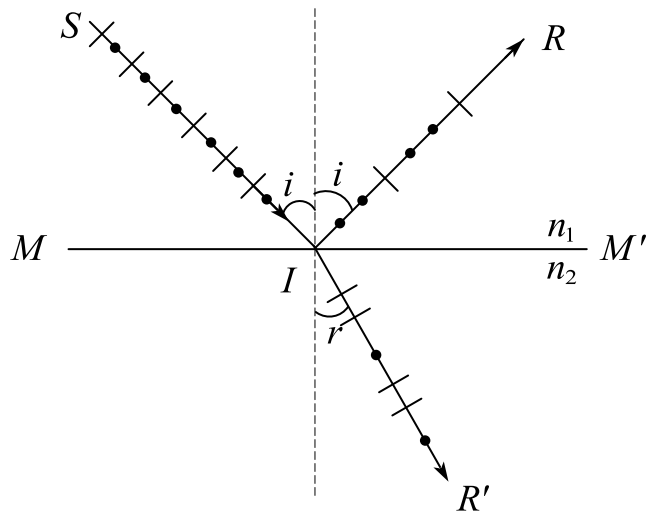
### 3. 反射和折射时光的偏振

#### 1) 反射和折射时光的偏振

自然光在两种介质的分界面上反射和折射时，反射光和折射光都将成为部分偏振光；在特定情况下，反射光有可能成为完全偏振光。



振动的光波从空气入射到玻璃后，在反射光束中垂直振动比平行振动强，而在折射光束中，平行振动比垂直振动强。反射光和折射光都将成为部分偏振光。



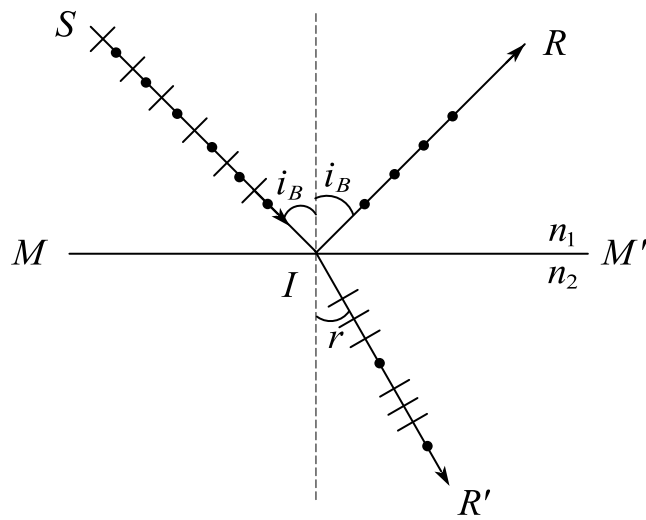
### 自然光反射和折射后产生的部分偏振光

当入射角 $i$ 等于某一特定的角度时，在反射光中只有垂直于入射面的振动，而平行于入射面的振动变为零，这时的反射光为完全偏振光，这个特定的入射角称作起偏振角，用 $i_B$ 表示，自然光以起偏振角 $i_B$ 入射到两种介质的分界面上时，

反射光线和折射光线相互垂直  $\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$

上式为布儒斯特定律，起偏角 $i_B$ 也成为布儒斯特角。当入射角等于布儒斯特角 $i_B$ 时，反射光为完全偏振光，其振动方向垂直于入射面。





布儒斯特角

题 1. 自然光入射到空气和玻璃的分界面上，当入射角为 $60^\circ$ 时，反射光为完全偏振光，则此玻璃的折射率为（ ）。

答案： $\sqrt{3}$

解析： $\because \tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$

$$n_2 = \sqrt{3}$$



## 课时二十六 练习题

1. 下列什么现象说明光是横波 ( )。
 

A. 光的干涉现象	B. 光的衍射现象
C. 光的色散现象	D. 光的偏振现象
  
2. 在自然界和日常生活中，人们经常在阳光下观察到一些非常漂亮的图案，如五彩斑斓的蜻蜓翅膀，这是因为 ( )。
  - A. 阳光在蜻蜓翅膀上发生了薄膜干涉
  - B. 阳光在蜻蜓翅膀上发生了衍射
  - C. 阳光在蜻蜓翅膀上发生了偏振
  - D. 以上均不对
  
3. 如果两个偏振片堆叠在一起，且偏振化方向之间夹角为 $60^\circ$ ，光强为 $I_S$ 的自然光垂直入射在偏振片上，则出射光强为 ( )。
 

A. $I_S/8$	B. $I_S/4$	C. $3I_S/8$	D. $3I_S/4$
------------	------------	-------------	-------------
  
4. 两个偏振化方向正交的偏振片平行放置，强度为 $I_0$ 的自然光垂直入射，在两偏振片之间平行插入另一个偏振片，该偏振片以匀角速度 $\omega$ 绕光传播方向旋转，则从最后一个偏振片出射的光线的明暗变化的频率为\_\_\_\_\_，最大光强为\_\_\_\_\_。
  
5. 设偏振片没有吸收，光强为 $I_0$ 的自然光垂直通过两个偏振片后，出射光强 $I = I_0/8$ ，则两个偏振片的偏振化方向之间的夹角为\_\_\_\_\_。
  
6. 强度为 $I_a$ 的自然光和强度为 $I_b$ 的线偏振光混合而成的一束光，垂直入射在一块偏振片上，当以入射光方向为转轴旋转偏振片时，出射光最大值和最小值的比为 $n$ ，则 $I_a/I_b =$ \_\_\_\_\_。
  
7. 一束平行的自然光，以 $60^\circ$ 角入射到平玻璃表面上，若玻璃的折射率为 $\sqrt{3}$ ，则反射光束是\_\_\_\_\_（填“完全偏振光、部分偏振光、自然光”）。



8. 自然光以布儒斯特角从空气入射到透明介质表面，下面说法错误的是

( )。

- A. 反射光是线偏振光
- B. 折射光是部分偏振光
- C. 反射光和折射光是垂直的
- D. 反射光的振动方向平行于入射面

9. 当自然光以布儒斯特角入射到两种各向同性介质的交界面时，折射光为

( )。

- A. 线偏振光，其光矢量的振动方向垂直于入射面
- B. 部分偏振光
- C. 线偏振光，其光矢量的振动方向平行于入射面
- D. 椭圆偏振光

10. 光的偏振现象，说明光是\_\_\_\_\_。(填“纵波”或者“横波”)

11. 一束光强为 $I$ 的自然光垂直照射到一个偏振片上，透射光为( )。

- A. 自然光
- B. 部分偏振光
- C. 线偏振光
- D. 无法确定

12. 如果两个偏振片堆叠在一起，且偏振化方向之间夹角为 $45^\circ$ ，光强为 $I_S$ 的自然光垂直入射在偏振片上，则出射光强为( )。

- A.  $I_S/8$
- B.  $I_S/4$
- C.  $3I_S/8$
- D.  $3I_S/4$

13. 自然光通过两个偏振化方向成 $60^\circ$ 角的偏振片后，透射光的强度为 $I_1$ 。若在这两个偏振片之间插入另一偏振片，它的偏振化方向与前两个偏振片均成 $30^\circ$ 角，则透射光强为多少？

14. 马吕斯定律的数学表达式为 $I = I_0 \cos^2 \alpha$ ，式中 $I$ 为通过检偏器的透射光的强度， $I_0$ 为\_\_\_\_\_的强度， $\alpha$ 为入射光\_\_\_\_\_方向和检偏器\_\_\_\_\_方向之间的夹角。



15. 一束自然光以 $60^\circ$ 的入射角照射到不知其折射率的某一透明介质表面时反射光为线偏振光。画出反射光和折射光的光路图及偏振态并标出折射角度。

16. 自然光以布儒斯特角由空气入射到一玻璃表面上，反射光是（ ）。

- A. 在入射面内振动的完全偏振光
- B. 平行于入射面的振动占优势的部分偏振光
- C. 垂直于入射面振动的完全偏振光
- D. 垂直于入射面的振动占优势的部分偏振光

17. 一束自然光以布儒斯特角由空气入射到一玻璃表面上，则透射光束是\_\_\_\_\_（填：自然光、线偏振光或部分偏振光）



## 课时二十七 光的双折射 现代光学

知识点	重要程度	题型
1. 光的双折射	★★★	选填、简答
2. 偏振光的干涉 人为双折射	★★★	选填、简答
3. 旋光性	★	简答
4. 现代光学简介	★	简答

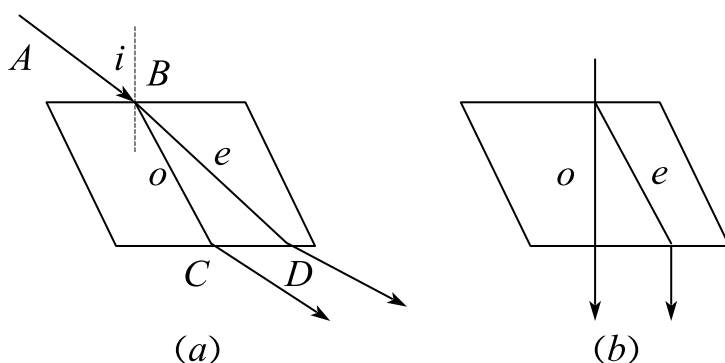
### 1. 光的双折射

#### 1) 寻常光和非常光

##### (1) 双折射

一束光线进入一般晶体后，分裂成两束光线，它们沿不同方向折射，该现象称为双折射，它是由晶体的各向异性造成的。

##### (2) 寻常光与非常光



寻常光和非常光

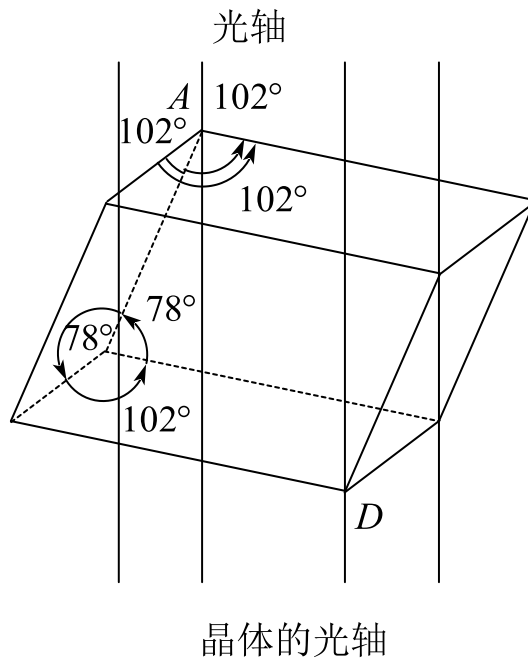
当改变入射角 $i$ 时，两束折射光之一恒遵守通常的折射定律，对于方解石等晶体这束光称为寻常光，通常用 $o$ 表示（简称 $o$ 光），另一束光不遵守折射定律，这束光称为非常光，用 $e$ 表示（简称 $e$ 光）。

#### 2) 光轴与主平面

##### (1) 光轴







改变入射光的方向时，在方解石这类晶体内部有一确定的方向，光沿这个方向传播时，寻常光和非常光不再分开，不产生双折射现象，这一方向称为晶体的光轴。

晶体中仅具有一个光轴方向的，称为单轴晶体，有些晶体具有两个光轴方向，称为双轴晶体。

## (2) 主平面

在晶体中，把包含光轴和任一已知光线所组成的平面称为晶体中该光线的主平面。

$o$ 光和 $e$ 光都是线偏振光，它们的光矢量的振动方向不同， $o$ 光的振动方向垂直于它对应的主平面； $e$ 光的振动方向平行于与它对应的主平面。在大多数情况下，这两个主平面之间的夹角很小，因而 $o$ 光和 $e$ 光的振动方向可以认为是互相垂直的。

## 3) 单轴晶体的子波波阵面

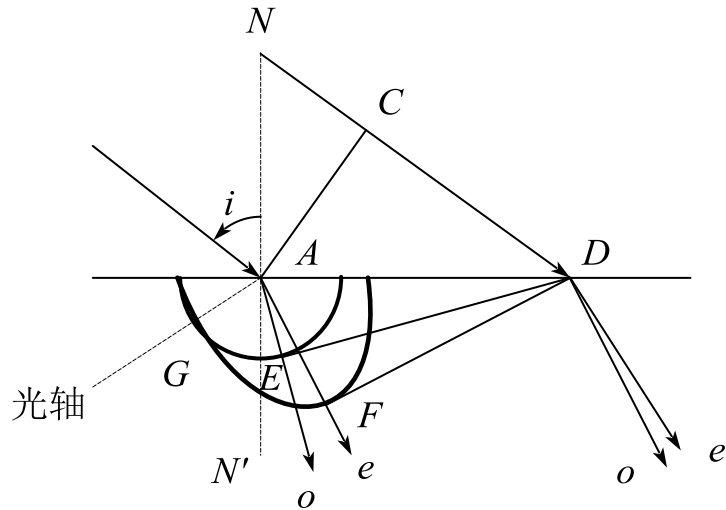
用 $v_o$ 表示 $o$ 光在晶体中的传播速率， $v_e$ 表示 $e$ 光在晶体中沿垂直于光轴方向的传播速率，对于 $v_o > v_e$ 的晶体，称为正晶体，而 $v_o < v_e$ 的晶体称为负晶体。



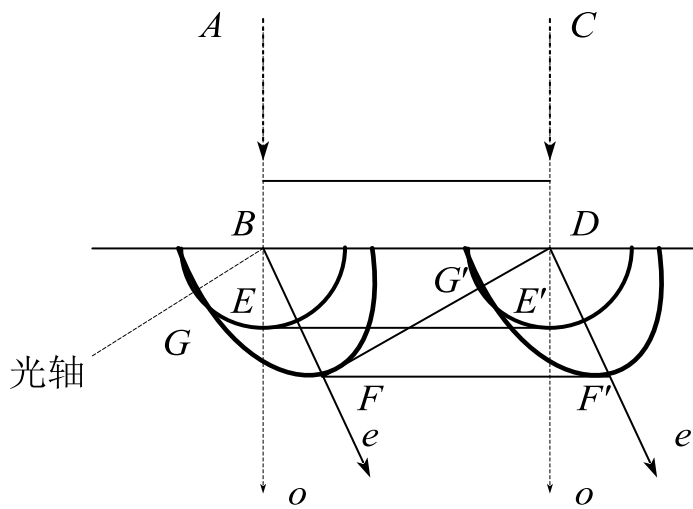
通常把真空中的光速  $c$  与  $e$  光沿垂直于光轴方向的传播速率  $v_e$  之比，称为  $e$  光的主折射率。

$$n_o = \frac{c}{v_o}, \quad n_e = \frac{c}{v_e}$$

4) 惠更斯原理在双折射现象中的应用

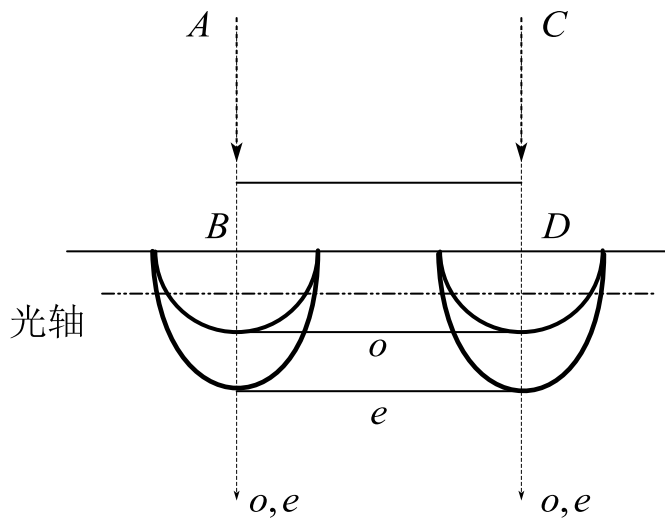


(a) 平面波倾斜地射入方解石的双折射现象



(b) 平面波垂直射入方解石的双折射现象





(c) 平面波垂直射入方解石(光轴在折射面内并平行于晶面)的双折射现象

### 晶体内 $o$ 光和 $e$ 光的传播

- (1) 倾斜入射的平面波：各向异性介质中非常光  $AF$  与非常光的波阵面并不垂直。
- (2) 垂直入射的平面波（晶体的光轴与晶体表面斜交）；
- (3) 垂直入射的平面波（晶体的光轴平行于晶体表面）：晶体中两种光线仍沿原入射方向，两者的传播速率不相等，因而和光在晶体中沿光轴方向传播时只有一种传播速率、无双折射的情况。

### 5) 晶体的二向色性和偏振片

二向色性：晶体对互相垂直的两个电矢量分量具有选择吸收的性能。

$H$  偏振片：把聚乙烯醇薄膜加热，沿一定方向拉伸，使碳氢化合物分子沿拉伸方向排列起来，然后浸入含碘的溶液中，取出烘干后即可制成。

$K$  偏振片：它是将聚乙烯醇薄膜放在高温炉中，通以氯化氢，除去聚乙烯醇分子中的一些水分子，形成聚乙烯醇的细长分子。再单向拉伸而成。性能稳定，且耐高温，不易褪色。

$HK$  偏振片：由  $H$  型和  $K$  型偏振片组合而成，适用于远红外的偏振片。

题 1. 下列哪种仪器不能用来获得完全偏振光？ ( )



A. 偏振片

B. 光栅

C. 玻璃片堆

D. 尼科尔棱镜

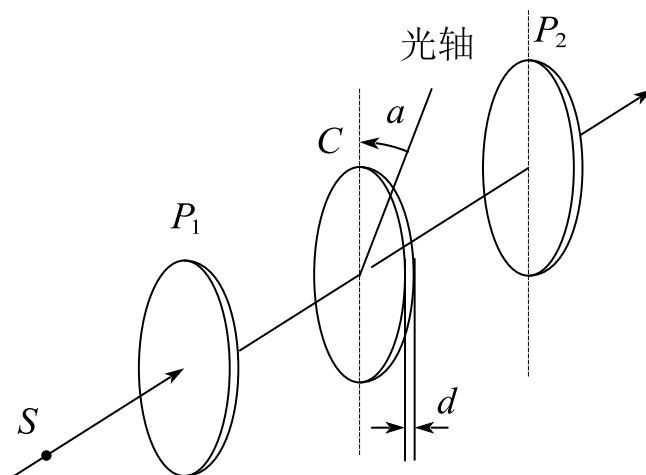
答案：B.

解析：A. 偏振片可以直接获得完全偏振光；C. 玻璃片堆可以利用布儒斯特角入射获得完全偏振的反射光；D. 尼科尔棱镜利用的是双折射现象获得完全偏振光。

## 2. 偏振光的干涉 人为双折射

### 1) 偏振光的干涉

如图所示， $P_1$  是偏振片， $C$  是双折射晶片，光轴与晶面平行，由起偏振器  $P_1$  射来的偏振光垂直入射于晶面。



偏振光的干涉

透过偏振片  $P_2$  的光，是由透过  $P_1$  的线偏振光所产生的振动方向相同、振幅相等、有恒定相位差的两束相干光，因而能够产生干涉现象，这两束光总相位差：

$$\Delta\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} (n_e - n_o) + \pi$$

干涉明纹出现的条件：

$$(n_e - n_o)d = \left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$



干涉暗纹出现的条件：

$$(n_e - n_o)d = k\lambda$$

色偏振：如果所用的是白光光源，对各种波长的光来讲，干涉最强和干涉最弱的条件也各不相同，当正交偏振片之间的晶片厚度为一定时，视场将出现一定的色彩。

题 1. 在双缝干涉试验中，用单色自然光在屏上形成干涉条纹，若在两缝后放一个偏振片，则干涉条纹的间距\_\_\_\_\_（填不变、变大或变小），明纹的亮度\_\_\_\_\_（填变强、变弱或为零）。

答案：不变；变弱。

解析：由于干涉条件未发生变化，光程差也没发生变化，所以干涉条纹间距不变；但是由于自然光通过偏振片后光强减半，因此明纹亮度会变弱。

## 2) 人为双折射

### (1) 光弹性效应

设 $n_o$ 、 $n_e$ 分别为 $o$ 光和 $e$ 光的折射率，在一定的压强范围内， $(n_e - n_o)$ 与压强成正比，即

$$n_e - n_o = kp$$

式中， $k$ 是非晶体 $E$ 的压强光学系数， $o$ 光和 $e$ 光穿过偏振片 $P_2$ 后将进行干涉，如果样品各处压强不同，将出现干涉条纹，这种特性称为光弹性。

### (2) 电光效应

克尔效应：有些非晶体或液体，在强大电场的作用下，显示出双折射现象。

折射率之差 $n_e - n_o$ 与 $E^2$ 和光在真空中的波长 $\lambda_0$ 成正比：

$$n_e - n_o = K\lambda_0 E^2$$

$o$ 光和 $e$ 光在电场强度 $E$ 的作用下，通过两极板间厚度为 $l$ 的液体层时，所产生



的光程差为：

$$\delta = l(n_e - n_o) = KIE^2 \lambda_0$$

式中， $K$  为克尔常量，视液体的材料而定。

### (3) 磁致双折射效应

在强磁场的作用下，某些非晶体也能产生双折射现象，称为磁致双折射效应。主要有两种，发生于蒸气中的称为佛克脱效应；发生于液体中的称为科顿—穆顿效应。

设  $n_o$ 、 $n_e$  分别为物质在磁场  $\vec{H}$  作用下对  $o$  光和  $e$  光的折射率，则有

$$n_e - n_o = C\lambda_0 H^2$$

式中， $\lambda_0$  为光在真空中的波长， $C$  为常量，与物质的性质和光波波长有关。

### (4) 波片

波片，又称为相位延迟片，因为偏振光具有折射率不同，可能用薄膜定向拉伸或双折射材料加工而成。使通过波片的两个互相正交的偏振分量产生相位偏移，可用来调整光束的偏振状态。

在光学元器件中常见的波片由石英晶体制作而成，主要为四分之一波片和二分之一波片（半波片）。石英晶体具有双折射效应，依据  $x, y, z$  三轴方向上，定向切割的角度不同，产生的光程差不同。

四分之一波片（ $\frac{\lambda}{4}$  波片）：能使  $o$  光和  $e$  光光程差为  $\frac{\lambda}{4}$  的晶片，相位差为  $\frac{\pi}{2}$ 。

二分之一波片（半波片）：能使  $o$  光和  $e$  光光程差为  $\frac{\lambda}{2}$  的晶片，相位差为  $\pi$ 。

当光矢量振动方向与晶片光轴夹角为  $\theta$  时

① 线偏振光经过二分之一波片时，仍为线偏振光，但其振动面转动了  $2\theta$  角度。特殊有，当  $\theta = \frac{\pi}{4}$  时，偏振方向与原偏振方向垂直。

② 线偏振光经过四分之一波片时，变为椭圆偏振光。特殊有，当  $\theta = \frac{\pi}{4}$  时，

4配套课程 习题答案



变为圆偏振光。

### 3. 旋光性

#### 1) 旋光性与旋光性物质

当线偏振光通过某些透明物质时，它的振动面将以光的传播方向为轴线旋转一定的角度，这种现象称为旋光性，能使振动面旋转的物质称为旋光性物质。

旋光性的相关结论：

(1) 不同的旋光物质可以使偏振光的振动面向不同的方向旋转。如果面对光源观测，使振动面向右(顺时针向)旋转的物质称为右旋物质；使振动面向左(反时针向)旋转的物质称为左旋物质。

(2) 振动面的旋转角与波长有关，与旋光物质的厚度  $d$  有关，旋转角  $\theta$  的大小可用下式表示

$$\theta = ad$$

式中， $a$ 称为旋光率。

当偏振白光通过旋光性物质后，各种色光的振动面分散在不同的平面内，这种现象称为旋光色散。

(3) 偏振光通过糖溶液、松节油等液体时，振动面的旋转角可用下式表示

$$\theta = acd$$

$c$ 是旋光物质的浓度。

### 4. 现代光学简介

#### 1) 傅里叶光学

阿贝成像原理：平面上出现网格的像，是组成空间频谱的这些亮点作为子波波源所发出的光在像平面进行相干叠加的结果。

成像过程：入射光经物平面发生夫琅禾费衍射，在透镜后焦平面上形成一系

配套课程 习题答案



列衍射斑纹，即物的空间频谱；衍射斑纹发出子波在像平面上相干叠加，像是干涉的结果。

成像过程是光通过衍射分频，再通过干涉合频，即由两次傅里叶变换来完成。

## 2) 全息照相

### (1) 全息照相的特点

照相底片所记录的物体各点的光强(振幅)，而全息照相记录的是光的全部信息(波长、振幅和相位)；

通过普通照相得到的只是物体的二维平面图像，而全息照相可以再现物体逼真的立体图像；

普通照相底片撕去一部分，所记录的图像也就不完整了；而全息片破碎了，只需一小块碎片，仍能再现完整的图像。

### (2) 全息照相的记录和再现

物光与参考光：激光器输出的光通过分光镜分成两束，一束经反射镜和扩束镜投射到物体上，然后经物体反射或透射后再射到感光底片上，这部分光称为物光；另一束经反射镜和扩束镜后直接投射到感光底片上，这部分光称为参考光。

全息照相的成像：全息记录和波前再现：

波前的全息记录：利用干涉的方法记录物体散射的光波在某一个波前平面上的复振幅分布，这就是波前的全息记录；

物光波前的再现：用一束参考光照射在全息图上，就好像在一块复杂光栅上发生衍射，在衍射光波中将包含有原来的物光波，因此当观察者迎着物光波方向观察时，便可看到物体的再现像，物光波前的再现利用了光波的衍射。

再现光：用一束同参考光的波长和传播方向完全相同的光束照射全息照片，这光束称为再现光。

### (3) 全息照相的应用

全息显微摄影与全息显示；全息干涉计量；全息光学元件；全息信息储存。

## 3) 非线性光学





非线性光学一般可分为两大类：一类是强光与被动介质；另一类是强光与激活介质。

光学整流：从一个交变电场得到一个恒定电场。

光学倍频：辐射频率为入射光频率两倍的倍频光的现象。

光学混频：如入射光包含两种频率，沿同一方向同时入射到非线性介质上，这时极化强度  $\vec{P}$  中，除了基频项、直流项和倍频项外，还有和频( $\omega_1 + \omega_2$ )项以及差频( $\omega_1 - \omega_2$ )项，它们将辐射相应的光波，这种现象称为光学混频。

自聚焦：使中央部分的功率密度变得更大，这又使光束进一步收缩，最后形成一根极细的亮丝。



## 第二十七课时 练习题

1. 正单轴晶体石英满足以下条件： $n_1 = n_2 = n_o$ ， $n_3 = n_e \neq n_o$ ，且 $n_e > n_o$ 。  
( )
2. 一束单色线偏振光垂直入射到四分之一波片，当入射的线偏振光的光矢量振动方向与波片的光轴的夹角为 $45^\circ$ 时，出射光为 ( )。  
A. 线偏振光      B. 圆偏振光      C. 椭圆偏振光      D. 部分偏振光
3. 对纵向运用的 *KDP* 电光晶体而言，加电场后该晶体的光学特性有哪些？
4. 在夫琅禾费单缝衍射试验中，对于给定的入射单色光，当缝宽度变小时，除中央亮纹的中心位置不变外，各级衍射条纹 ( )。  
A. 对应的衍射角变小      B. 对应的衍射角变大  
C. 对应的衍射角也不变      D. 光强也不变
5. 全息照相过程分为两步：第一步是干涉的记录，第二步是衍射的再现。
6. (判断) 两台结构相同的激光器发出的激光具有非常相近的强度、波长及偏振方向，这两束激光相干。( )



# 恭喜你完成本课程学习!

领取练习题答案

&配套课程等资料

请关注公众号【蜂考】



一起学习，答疑解惑  
请加入蜂考学习交流群

