复变函数参考答案

杜金鸿,15338039

2017 年 7 月 3 日

目录

1 复数及复平面

小结

1. 复数

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= |z|(\cos \mathrm{Arg}z + i \sin \mathrm{Arg}z) \end{aligned}$$

2. 共轭复数

(1) $\bar{z} = x - iy$

$\quad = |z|(\cos \mathrm{Arg}z - i \sin \mathrm{Arg}z)$

$|z| = |\bar{z}|$

$\mathrm{Arg}z = -\mathrm{Arg}\bar{z}$

(2) $\bar{\bar{z}} = z$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

3. 复数的运算

(1) 乘法

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$

(2) 除法

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

$\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2$

(3) 乘幂

$z^n = |z|^n[\cos(n\mathrm{Arg}z) + i \sin(n\mathrm{Arg}z)] \qquad \Longrightarrow \qquad (\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos(m\theta) + i\sin(m\theta) \qquad (m \in Z)$

$z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$

$z^{\frac{1}{n}} = +\sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\dfrac{1}{n}\mathrm{Arg}z\right) + i\sin\left(\dfrac{1}{n}\mathrm{Arg}z\right)\right] \qquad (n \in N_+)$

$z^a = ||z|^a|e^{ai\mathrm{Arg}z} \qquad (\forall a \in R)$

4. 等式与不等式

(1) $|\text{Re } z| \leqslant |z|, \quad |\text{Im } z| \leqslant |z|$

(2) 三角不等式 $\quad ||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

(3) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}(z_1, \overline{z_2})$

$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\text{Re}(z_1, \overline{z_2})$

(4) $\dfrac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leqslant z \leqslant |x| + |y|$

习题一

1 **计算:**

(1) $(1+i) \pm (1-2i)$ **(并作图);**

(2) $\frac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)}$;

(3) $\sqrt{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$,

其中

$$0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}, \alpha = \arctan 2, \beta = \arctan 3.$$

Proof.

(1) $(1+i) + (1-2i) = 2 - 3i$

$(1+i) - (1-2i) = i$

(2) $$\frac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)} = \frac{-i}{(1-i)(i-2)(i-3)} = \frac{-i(1+i)(2+i)(3+i)}{(1+1)(2^2+1)(3^2+1)} = \frac{-10i^2}{100} = \frac{1}{10}$$

(3) $\because \quad \tan\alpha = 2, \tan\beta = 3 \qquad \therefore \quad \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1$

$\because \quad 0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad \alpha + \beta = \dfrac{3\pi}{4}$

$\therefore \quad \cos(\alpha+\beta) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sin(\alpha+\beta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \quad \sqrt{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \sqrt{2}[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] = -1 + i$

□

2 **证明:**

(1) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ **(并作图);**

(2) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_2 z_3$;

(3) $\overline{\left[\frac{(3+7i)^2}{8+6i}\right]} = \frac{(3-7i)^2}{8-6i}$.

Proof.

设$z_k = x_k + iy_k \ (k = 1, 2, 3)$

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad z_1+(z_2+z_3) &= z_1+[(x_2+x_3)+i(y_2+y_3)] \\
&= (x_1+x_2+x_3)+i(y_1+y_2+y_3) \\
&= [(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)]+z_3 \\
&= (z_1+z_2)+z_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad z_1(z_2+z_3) &= (x_1+iy_1)[(x_2+iy_2)+(x_3+iy_3)] \\
&= (x_1+iy_1)[(x_2+x_3)+i(y_3+y_3)] \\
&= [x_1(x_2+x_3)-y_1(y_2+y_3)]+i[x_1(y_2+y_3)+y_1(x_2+x_3)] \\
&= [(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1x_3-y_1y_3)]+i[(x_1y_2+y_1x_2)+(x_1y_3+y_1x_3)] \\
&= [(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)]+[(x_1x_3-y_1y_3)+i(x_1y_3+y_1x_3)] \\
&= z_1z_2+z_2z_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad \overline{\left[\frac{(3+7i)^2}{8+6i}\right]} &= \overline{\left[\frac{(3+7i)^2(8-6i)}{(8+6i)(8-6i)}\right]} \\
&= \frac{\overline{(3+7i)}\ \overline{(3+7i)}\ \overline{(8-6i)}}{|8+6i|^2} \\
&= \frac{(3-7i)^2(8+6i)}{(8+6i)(8-6i)} \\
&= \frac{(3-7i)^2}{8-6i}
\end{aligned}
$$

□

3 **证明：**

(1) 当且仅当 $z=\bar{z}$ 时，复数 z 为实数；

(2) 设 z_1 及 z_2 是两复数. 如果 z_1+z_2 和 z_1z_2 都是实数，那么 z_1 和 z_2 或者都是实数，或者是一对共轭复数.

Proof.

(1) 设$z=x+yi$

$z=\bar{z} \quad iff \quad x+yi=x-yi \quad iff \quad y=-y \quad iff \quad y=0 iff \quad z$ 为实数

(2) 设$z_k=x_k+y_ki(k=1,2)$

$\because \quad z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i,\ \ z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i$为实数 $\quad \therefore \begin{cases} y_1+y_2=0, \\ x_1y_2+x_2y_1=0 \end{cases}$

若$y_1=0$,则$y_2=0$,则 z_1 和 z_2 都是实数

若$y_1\neq 0$,则$\begin{cases} y_2=-y_1\neq 0 \\ x_1(-y_1)+x_2y_1=0 \end{cases}$,即 $x_1=x_2$, 则 z_1 和 z_2 是一对共轭复数

□

4 **求复数 $\frac{z-1}{z+1}$ 的实部及虚部.**

Proof.

$$\text{设}z = x + yi$$

$$\because \quad \frac{z-1}{z+1} = \frac{x-1+yi}{x+1+yi}$$

$$= \frac{(x-1+yi)(x+1-yi)}{(x+1+yi)(x+1-yi)}$$

$$= \frac{x^2-(1-yi)^2}{(x+1)^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-1+2yi}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\therefore \quad Re\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} \qquad Im\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$$

□

5 **设** z_1 **及** z_2 **是两复数. 求证:**

(1) $|z_1-z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2-2Re(z_1,\overline{z_2})$

(2) $|z_1-z_2| \geqslant ||z_1|-|z_2||$

(3) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，**并说明其几何意义.**

Proof.

$$\text{设}z_k = x_k + y_k i \ (k=1,2)$$

(1)

$$|z_1-z_2|^2 = (z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}$$

$$= (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$$

$$= z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}$$

$$= |z_1|^2+|z_2|^2-(\overline{z_1\overline{z_2}}+z_1\overline{z_2})$$

$$= |z_1|^2+|z_2|^2-2Re(z_1,\overline{z_2})$$

(2)

$$\because \quad |z_1-z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2-2Re(z_1,\overline{z_2})$$

$$\therefore \quad ||z_1|-|z_2||^2 = |z_1|^2-2|z_1||z_2|+|z_2|^2$$

$$= |z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||\overline{z_2}|$$

$$= |z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1\overline{z_2}|$$

$$\because \quad |z_1\overline{z_2}| \geqslant Re(z_1\overline{z_2})$$

$$\therefore \quad |z_1|^2+|z_2|^2-2Re(z_1\overline{z_2}) \geqslant |z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1\overline{z_2}|$$

$$\therefore \quad |z_1-z_2|^2 \geqslant ||z_1|-|z_2||^2$$

$$\therefore \quad |z_1-z_2| \geqslant ||z_1|-|z_2||$$

(3)

$$\because \quad |z_1-z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2-2Re(z_1,\overline{z_2}), \quad |z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1,\overline{z_2})$$

$$\therefore \quad |z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

其几何意义为：平行四边形两对角线长的平方和等于各边平方和.

□

6 **设** $z=x+iy$. **证明**:

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant |z|\leqslant |x|+|y|.$$

Proof.

$\because$ 由均值不等式 $\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ 有 $\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{|x|^2+|y|^2}\leqslant |x|+|y|$$

$\therefore$ $\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant |z|\leqslant |x|+|y|$

□

7 **试证: 分别以** z_1,z_2,z_3 **及** w_1,w_2,w_3 **为顶点的两个三角形相似的必要与充分条件是**

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ z_1 & z_2 & z_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=0.$$

Proof.

$\because$ z_1,z_2,z_3为三角形顶点　　$\therefore$ z_1,z_2,z_3不共线

$$\therefore\quad 0=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ z_1 & z_2 & z_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1\\ w_1 & w_2-w_1 & w_3-w_1\end{vmatrix}=(z_2-z_1)(w_3-w_1)-(z_3-z_1)(w_2-w_1)$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{z_1-z_1}{z_3-z_1}=\frac{w_2-w_1}{w_3-w_1}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}\frac{|z_1-z_1|}{|z_3-z_1|}=\frac{|w_2-w_1|}{|w_3-w_1|}\\ \arg(z_2-z_1)-\arg(z_3-z_1)=\arg(w_2-w_1)-\arg(w_3-w_1)\end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$　两三角形相似

□

8 **如果** $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，**且** $z_1+z_2+z_3=0$，**证明** z_1,z_2,z_3 **是内接于单位圆的一个正三角形的顶点.**

Proof.

证法一

设$z_k=x_k+iy_k$ $(k=1,2,3)$

$\because$ $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1,\ z_1+z_2+z_3=0$

$$\therefore\quad \begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ y_1+y_2+y_3=0\end{cases}\quad(1)\qquad\qquad \begin{cases}x_1^2+y_1^2=1 & (2)\\ x_2^2+y_2^2=1 & (3)\\ x_3^2+y_3^2=1 & (4)\end{cases}$$

$\therefore$ 由 (1) 解得$x_1=-x_2-x_3, y_1=-y_2-y_3$,代入 (2) 得$2x_2x_3+2y_2y_3=1$ (5)

$\therefore$ $-1\times(5)+(3)+(4)$得$(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2=3$,即$|z_2-z_3|=\sqrt{3}$

同理可得$|z_1-z_2|=|z_1-z_3|=\sqrt{3}$

$\therefore$ z_1,z_2,z_3 是一个正三角形的顶点

$\because$ z_1,z_2,z_3 在单位圆上 $\therefore$ z_1,z_2,z_3 是内接于单位圆的一个正三角形的顶点

证法二

$\because$ $z_1+z_2+z_3=0$ $\therefore$ $z_3=-z_2-z_1$ $\therefore$ $\overline{z_3}=-(\overline{z_2}+\overline{z_1})$

$\therefore$ $z_3\overline{z_3}=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$

$\because$ $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ $\therefore$ $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=-1$

$\therefore$ $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)=3$

$\therefore$ $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$

同理可得$|z_1-z_2|=|z_1-z_3|=\sqrt{3}$

$\therefore$ z_1,z_2,z_3 是一个正三角形的顶点

$\because$ z_1,z_2,z_3 在单位圆上 $\therefore$ z_1,z_2,z_3 是内接于单位圆的一个正三角形的顶点

□

9 **应用棣莫弗公式，证明：**

(1) $(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$

(2) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ **及** $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

(3) $1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{(n+1)\theta}{n}\cos\frac{n\theta}{2}$ **及** $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta=\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{(n+1)\theta}{n}\sin\frac{n\theta}{2}$ $(\theta\neq 2k\pi; k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

Proof.

(1)
$$
\begin{aligned}
&(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n\\
=&\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}+i\cdot 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)^n\\
=&2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^n\\
=&2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

(2) $\because$
$$
\begin{aligned}
(\cos\theta+i\sin\theta)^3&=\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)\\
&=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta+3i^2\cos\theta\sin^2\theta+i^3\sin^3\theta\\
&=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)\\
&=[\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)]+i[3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta]\\
&=(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+i(3\sin\theta-4\sin^3\theta)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,\quad \sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

(3) $\because \quad \sum_{k=0}^{n}(\cos k\theta + i\sin k\theta) = (1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta) + i(\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta)$

$$= \sum_{k=0}^{n}(\cos\theta + i\sin\theta)^k$$
$$= 1\cdot\frac{1-(\cos\theta+i\sin\theta)^{n+1}}{1-(\cos\theta+i\sin\theta)}$$
$$= \frac{1-\cos((n+1)\theta)-i\sin((n+1)\theta)}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$$
$$= \frac{2\sin^2\frac{(n+1)\theta}{2}-2i\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{(n+1)\theta}{n}\left(\sin\frac{(n+1)\theta}{2}-i\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\left(\sin\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{(n+1)\theta}{n}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$$

$\therefore \quad 1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta = \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{(n+1)\theta}{n}\cos\frac{n\theta}{2},$

$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta = \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{(n+1)\theta}{n}\sin\frac{n\theta}{2} \qquad (\theta\neq 2k\pi; k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

□

10 **解方程** $z^2-3iz-(3-i)=0.$

Proof.

由求根公式得 $z=\frac{3i+\sqrt{3-4i}}{2}$

$\because$ 令 $\sqrt{3-4i}=a+bi$, 则 $3-4i=a^2-b^2+2abi$, 比较系数得 $\begin{cases} a^2-b^2=3 \\ 2ab=-4 \end{cases}$

$\therefore \quad a=\pm 2, b=\mp 1 \qquad \therefore \quad \sqrt{3-4i}=\pm(2-i)$

$\therefore \quad z_1=\frac{3i+(2-i)}{2}=1+i, \quad z_2=\frac{3i-(2-i)}{2}=-1+2i$

□

11 **求** $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})$ **的三次方根**.

Proof.

$\because \quad \frac{1}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

$\therefore \quad \sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})}=\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} \quad (k=0,1,2)$

□

12 **应用方程 $(z+1)^n=1$ 的 $n-1$ 个不为零的根的乘积，证明：**

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Proof.

$\because \quad 1=\cos(0)+i\sin(0) \qquad \therefore \quad \sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad (k=0,1,\cdots,n-1)$

$\therefore$ 方程非零根为$z_{k+1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}-1 \quad (k=1,\cdots,n-1)$

$\because \quad z_j=\overline{z_{n-j}} \qquad \therefore \quad z_jz_{n-j}=|z_j|^2=\left(\cos\frac{2j\pi}{n}-1\right)^2+\left(\sin\frac{2j\pi}{n}\right)^2=2-2\cos\frac{2j\pi}{n}$

$$\therefore \quad \left(\prod_{j=1}^{n-1}z_j\right)^2=\prod_{j=1}^{n-1}z_jz_{n-j}$$

$$=2^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(1-\cos\frac{2j\pi}{n})$$

$$=2^{n-1}\cdot 2^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}\sin^2\frac{j\pi}{n}$$

$$\therefore \quad \prod_{j=1}^{n-1}z_j=2^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}\sin\frac{j\pi}{n}$$

$\because$ 由 $1=(z+1)^n$ 二项式展开及根与系数关系，有$\prod_{j=1}^{n-1}z_j\cdot(0+1)=C_n^0=n$

$$\therefore \quad \sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

□

13 **设** $z_1,\cdots,z_n,w_1,\cdots,w_n\in C$. **证明拉格朗日等式：**

$$\left|\sum_{j=1}^{n}z_jw_j\right|^2=\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right)-\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}|z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}|^2,$$

并由此导出柯西不等式：

$$\left|\sum_{j=1}^{n}z_jw_j\right|^2\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right).$$

Proof.

$n=1$时：$|z_1w_1|^2=z_1w_1\overline{z_1w_1}=z_1\overline{z_1}w_1\overline{w_1}=|z_1|^2|w_1|^2$,结论成立

设 $n=m$ $(m\in N_+)$ 时, 结论成立. 即 $\left|\sum_{j=1}^{m}z_jw_j\right|^2=\left(\sum_{j=1}^{m}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m}|w_j|^2\right)-\sum_{1\leqslant j<k\leqslant m}|z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}|^2$

$$\therefore \quad \left|\sum_{j=1}^{m+1}z_jw_j\right|^2=\left|\sum_{j=1}^{m}z_jw_j+z_{m+1}w_{m+1}\right|^2$$

$$=\left|\sum_{j=1}^{m}z_jw_j\right|^2+|z_{m+1}w_{m+1}|^2+2Re\left[\left(\left|\sum_{j=1}^{m}z_jw_j\right|^2\right)(z_{m+1}w_{m+1})\right]$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m}|w_j|^2\right) - \sum_{1\leqslant j<k\leqslant m}|z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}|^2 + |z_{m+1}w_{m+1}|^2 + 2Re\left[\left(\left|\sum_{j=1}^{m}z_jw_j\right|^2\right)(z_{m+1}w_{m+1})\right]$$

$$\because \quad \left(\sum_{j=1}^{m+1}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m+1}|w_j|^2\right) = \sum_{k=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{m+1}|z_j|^2|w_k|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{m+1}z_j\overline{z_j}w_k\overline{w_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{m+1}|z_jw_k|^2$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m}|w_j|^2\right) + |z_{m+1}w_{m+1}|^2 + \sum_{j=1}^{m}|z_j|^2|w_{m+1}|^2 + \sum_{j=1}^{m}|z_{m+1}|^2|w_j|^2$$

$$Re\left[\left(\left|\sum_{j=1}^{m}z_jw_j\right|^2\right)(z_{m+1}w_{m+1})\right] = \left(\left|\sum_{j=1}^{m}z_jw_j\right|^2\right)(z_{m+1}w_{m+1}) + \overline{\left(\left|\sum_{j=1}^{m}z_jw_j\right|^2\right)(z_{m+1}w_{m+1})}$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{m}z_jw_j\right|^2 (z_{m+1}w_{m+1} + \overline{z_{m+1}w_{m+1}})$$

$$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant m+1}|z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}|^2 = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant m}|z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}|^2 + \sum_{j=1}^{m}|z_j\overline{w_{m+1}}-z_{m+1}\overline{w_j}|^2$$

$$= \sum_{1\leqslant j<k\leqslant m}|z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}|^2 + \sum_{j=1}^{m}[|z_j\overline{w_{m+1}}|^2 + |z_{m+1}\overline{w_j}|^2 - 2Re(z_j\overline{w_{m+1}}z_{m+1}\overline{w_j})]$$

$$= \sum_{1\leqslant j<k\leqslant m}|z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}|^2 + \sum_{j=1}^{m}|z_j|^2|w_{m+1}|^2 + \sum_{j=1}^{m}|z_{m+1}|^2|w_j|^2 - 2Re\left[\left(\left|\sum_{j=1}^{m}z_jw_j\right|^2\right)(z_{m+1}w_{m+1})\right]$$

$$\therefore \quad \left|\sum_{j=1}^{m+1}z_jw_j\right|^2 = \left(\sum_{j=1}^{m+1}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right) - \sum_{1\leqslant j<k\leqslant m+1}|z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}|^2$$

$\therefore$ 由数学归纳法 $\left|\sum_{j=1}^{n}z_jw_j\right|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right) - \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}|z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}|^2$

$$\therefore \quad \left|\sum_{j=1}^{n}z_jw_j\right|^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right)$$

□

14 **设** $|z_0| < 1$. **证明:**
如果 $|z| = 1$, **那么**

$$\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| = 1.$$

如果 $|z| < 1$, **那么**
(1) $\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| < 1$;
(2) $1 - \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|^2 = \frac{(1-|z_0|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{z_0}z|^2}$;
(3) $\frac{||z|-|z_0||}{1-|z_0||z|} \leqslant \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| \leqslant \frac{|z|+|z_0|}{1+|z_0||z|}$;

(4) $\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| \leqslant |z|+|z_0|$.

Proof.

若$|z|=1$:

$\because \quad |z-z_0| = |z||z-z_0| = |z||\overline{z-z_0}| = |z||\bar{z}-\overline{z_0}| = |z\bar{z}-z\overline{z_0}| = |1-z\overline{z_0}|$

$\therefore \quad \left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| = 1$

若$|z|<1$:

(1) $\because \quad |z|^2(1-|z_0^2|) < 1-|z_0|^2 \qquad \therefore \quad |z|^2+|z_0|^2 < 1+|z|^2|z_0|^2$

$\therefore \quad |z-z_0|^2 = |z|^2+|z_0|^2-2Re(z\overline{z_0}) < 1+|z|^2|z_0|^2-2Re(z\overline{z_0}) = |1-z\overline{z_0}|^2$

$\therefore \quad \left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| < 1$

(2)
$$\begin{aligned}|1-z\overline{z_0}|^2-|z-z_0|^2 &= (1+|z|^2|z_0|^2-2Re(z\overline{z_0}))-(|z|^2+|z_0|^2-2Re(z\overline{z_0}))\\ &= 1+|z|^2|z_0|^2-|z|^2-|z_0|^2\\ &= (1-|z_0|^2)(1-|z|^2)\end{aligned}$$

(3) $\because \quad |z_0|<1, |z|<1 \qquad \therefore \quad 1-|z_0||z| = 1-|\overline{z_0}z| = |1-\overline{z_0}z|$

$\because \quad ||z|-|z_0|| \leqslant |z-z_0| \qquad \therefore \quad \dfrac{||z|-|z_0||}{1-|z_0||z|} \leqslant \dfrac{|z-z_0|}{|1-\overline{z_0}z|} = \left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|$

$\because \quad \left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| < 1, \quad \dfrac{|z-z_0|+2|z_0|}{|1-|z_0||z||+2|z_0||z|} \geqslant |1-|z_0||z|+2|z_0||z|| = 1+|z_0||z|$

$\therefore \quad \left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| = \dfrac{|z-z_0|}{|1-\overline{z_0}z|} \leqslant \dfrac{|z-z_0|+2|z_0|}{|1-\overline{z_0}z|+2|z_0|} \leqslant \dfrac{|z-z_0|+2|z_0|}{|1-|z_0||z||+2|z_0||z|} \leqslant \dfrac{|z|+|z_0|}{1+|z_0||z|}$

$\therefore \quad \dfrac{||z|-|z_0||}{1-|z_0||z|} \leqslant \left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| \leqslant \dfrac{|z|+|z_0|}{1+|z_0||z|}$

(4) $\because 1+|z_0||z| \geqslant 1 \qquad \therefore \quad \left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| \leqslant \dfrac{|z|+|z_0|}{1+|z_0||z|} \leqslant |z|+|z_0|$

□

15 **设有限复数 z_1 及 z_2 在复球面上表示为 P_1 及 P_2 两点. 求证 P_1 及 P_2 的距离是:**

$$\frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}},$$

P_1 及 N(图 3)的距离是:

$$\frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}.$$

Proof.

设 P_1,P_2 分别为$(\xi_1,\eta_1,\zeta_1),(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)$.复平面上与 P_1,P_2 相对应的点分别为 $z_1(x_1,y_1,0),z_2(x_2,y_2,0).N=(0,0,1)$.

$\because \quad P_1,P_2$在复球面上 $\qquad \therefore \quad \xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2=1, \xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2=1$

$\because \quad N,P_1,z_1$共线 $\qquad \therefore \quad \dfrac{\xi_1-0}{x_1-0} = \dfrac{\eta_1-0}{y_1-0} = \dfrac{\zeta_1-1}{0-1} \qquad \therefore \quad x_1 = \dfrac{\xi_1}{1-\zeta_1}, \qquad y_1 = \dfrac{\eta_1}{1-\zeta_1}$

$\because \quad |z_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 = \dfrac{\xi_1^2+\eta_1^2}{(1-\zeta_1)^2} = \dfrac{1+\zeta_1}{1-\zeta_1} \qquad \therefore \quad \zeta_1 = \dfrac{|z_1|^2-1}{1+|z_1|^2}$

$\therefore \quad \xi_1 = \dfrac{2x_1}{1+|z_1|^2}, \quad \eta_1 = \dfrac{2y_1}{1+|z_1|^2}$

同理可得$\xi_2 = \dfrac{2x_2}{1+|z_2|^2}, \quad \eta_2 = \dfrac{2y_2}{1+|z_2|^2}, \qquad \zeta_2 = \dfrac{|z_2|^2-1}{1+|z_2|^2}$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad |P_1P_2| &= \sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2} \\
&= \sqrt{\frac{4[|z_1|^2+|z_2|^2-2Re(z_1z_2)]}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} \\
&= \sqrt{\frac{2^2|z_1-z_2|^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} \\
&= \frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|P_1N| &= \sqrt{(\xi_1-0)^2+(\eta_1-0)^2+(\zeta_1-1)^2} \\
&= \sqrt{\frac{4x_1^2+4y_1^2+4}{(1+|z_1|^2)}} \\
&= \sqrt{\frac{4(1+|z_1|^2)}{(1+|z_1|^2)}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}
\end{aligned}$$

□

16 **指出下列点集中哪些是开集，哪些是闭集，哪些是紧集：**

(1) **全体整数集；** (2) **有限个复数的集；**

(3) $\{z \in C : Im\ z > 0\} \setminus \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \{z \in C : z = k+iy, y \in [0,1]\}$

(4) C, C_∞ **及空集** $\varnothing$.

Proof.

(1) $\because \quad \forall z \in Z, \forall \delta > 0, \exists z_1 \in Z,\ s.t.\ z_1 \in B(z,\delta)$

$\therefore$ z是孤立点 $\therefore$ Z中没有聚点 $\therefore$ Z是闭集

$\because$ Z无界 $\therefore$ Z不是紧集

(2) $\because$ 有限个复数之集中每个复数都是孤立点，且该集有界 $\therefore$ 该集为闭集，且为紧集

(3) $\because$ $\{z \in C : Im\ z > 0\}$是开集, $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \{z \in C : z = k+iy, y \in [0,1]\}$ 是闭集

$\therefore$ $\{z \in C : Im\ z > 0\} \setminus \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \{z \in C : z = k+iy, y \in [0,1]\}$ 是开集

(4) C为无界开集；C_∞ 为无界闭集；$\varnothing$ 中没有聚点，因此为有界闭集

□

17 **满足下列条件的点** z **所组成的点集是什么图形？如果是区域，是单连通区域还是多连通区域？**

(1) $Im\ z=3$；

(2) $Re\ z>\frac{1}{2}$；

(3) $|z-i|\leqslant|2+i|$；

(4) $|z-2|+|z+2|=5$；

(5) $\arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$；

(6) $|z|<1, Re\ z\leqslant\frac{1}{2}$；

(7) $0<|z+1+i|<2$；

(8) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 2$；

(9) $0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4}, 2<Rez<3$；

(10) $0<\arg\frac{z-i}{z+i}<\frac{\pi}{4}$.

Proof.

(1) 过点 $3i$ 且平行于实轴的一条直线. 它不是区域.

(2) 以直线 $Re\ z=\dfrac{1}{2}$ 为左边界的半平面（不包括 $Re\ z=\dfrac{1}{2}$）. 它是单连通区域.

(3) 以点 i 为圆心，$\sqrt{5}$ 为半径的闭圆盘. 它是单连通闭区域.

(4) 以 ± 2 为焦点，以 $\dfrac{5}{2}$ 为长半轴. 它不是区域.

(5) 以点 i 为端点，斜率为 1 的半射线（不包括端点 i）. 它不是区域.

(6) 以原点为圆心，1 为半径的圆盘和以直线 $Re\ z=\dfrac{1}{2}$ 为右边界的区域（包括 $Re\ z=\dfrac{1}{2}$）的公共部分. 它不是区域.

(7) 以 $-1-i$ 为圆心，2 为半径去掉圆心的圆盘. 它是多连通区域.

(8) $\because\ \left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 2 \quad \therefore\ |z-1|\leqslant 2|z+1| \quad \therefore\ \left(x+\dfrac{5}{3}\right)^2+y^2\geqslant\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$

以 $-\dfrac{5}{3}$ 为圆心，$\dfrac{4}{3}$ 为半径的圆盘外所有点的集合. 它是多连通闭区域.

(9) 以直线 $Re\ z=2$，$Re\ z=3$ 为左、右底，以直线 $\arg(z-1)=\dfrac{\pi}{4}$ 和实轴为上、下腰的直角梯形（不包括边界）. 它是单连通区域.

(10) $\because\ \dfrac{z-i}{z+i}=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+i\dfrac{-2x}{x^2+(y+1)^2} \quad \therefore\ \dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}>\dfrac{-2x}{x^2+(y+1)^2}>0$

$$\therefore\ \begin{cases}-2x>0\\ x^2+y^2-1>0\\ -2x<x^2+y^2-1\end{cases} \qquad \therefore\ \begin{cases}x<0\\ x^2+y^2>1\\ (x+1)^2+y^2>2\end{cases}$$

在圆 $(x+1)^2+y^2=(\sqrt{2})^2$ 外且属于左半平面的所有点的集合. 它是单连通区域.

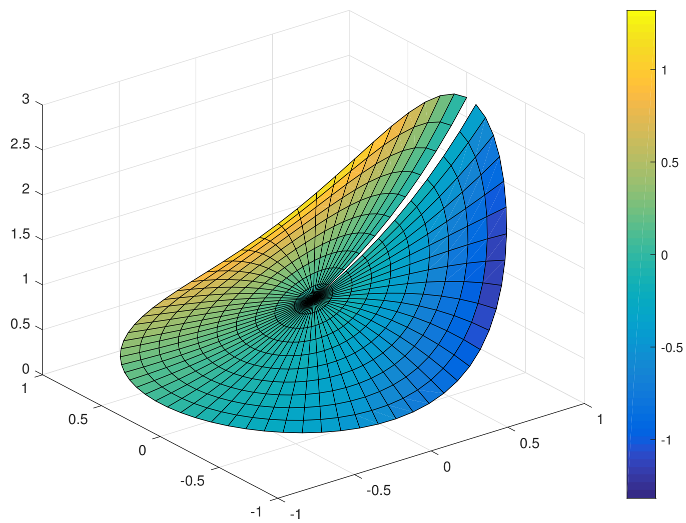
□

2　复变函数

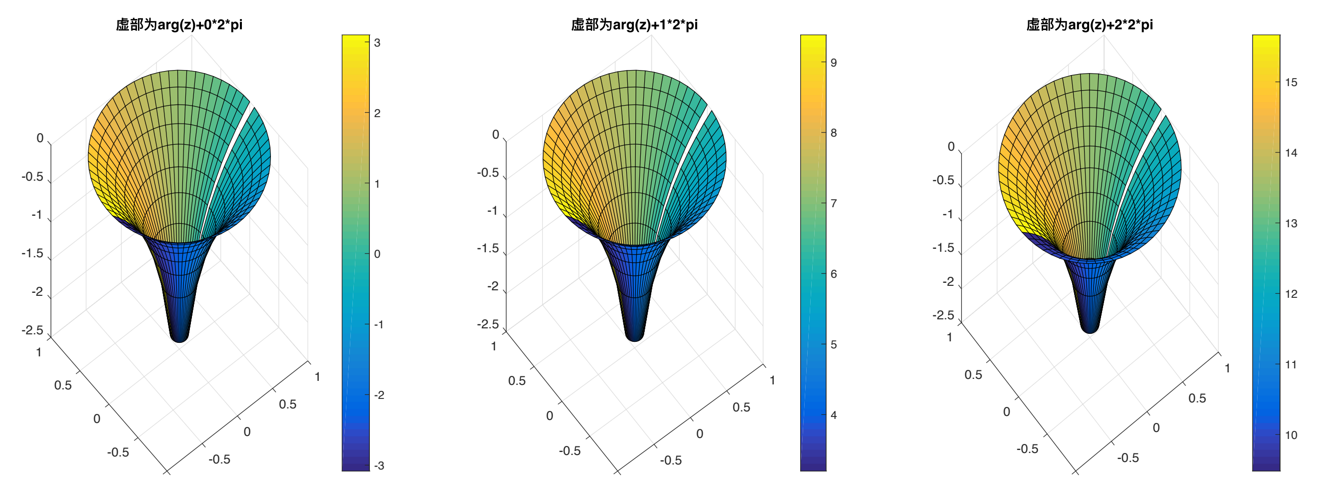
小结

1. 复变函数图像　利用 MATLAB 绘制复变函数图像，其中 xoy 平面表示定义域，纵轴表示 $\mathrm{Re}f(z)$，颜色表示 $\mathrm{Im}f(z)$(具体颜色所代表的值由每个图像右端的 colorbar 指明)。可以看到，在多连通分支的的函数图像中，$\mathrm{Im}f(z)$ 在割线处取值不连续。

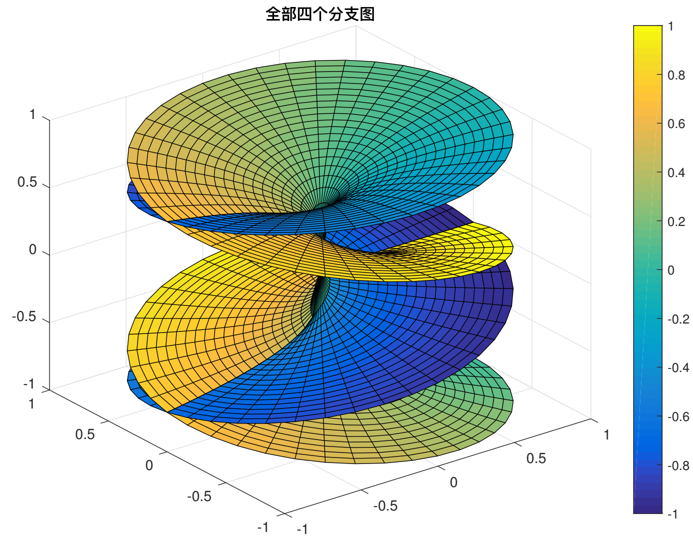
(a) 指数函数



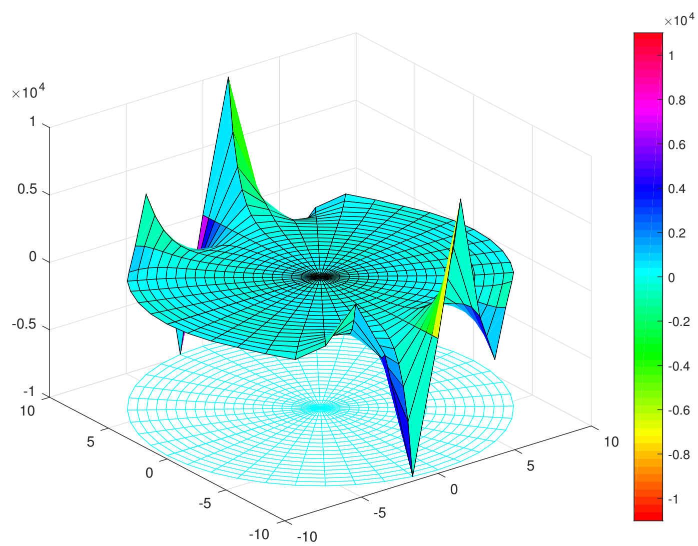
(b) 对数函数



(c) 幂函数 ($\sqrt[4]{z}$)



(d) 三角函数 ($\sin z$)



2. 解析函数

1). 柯西-黎曼（$C-R$）条件

2). 导数

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}
$$

3). 解析函数 $f(z)\equiv C$ 的充要条件

(a) $f'(z)\equiv 0$

(b) $\mathrm{Re}f(z)\equiv C_1$

(c) $\mathrm{Im}f(z)\equiv C_2$

(d) $\arg f(z)\equiv C_3$

(e) $\overline{f(z)}$ 解析

(f) $|f(z)|\equiv C_4$

(g) $au+bv=c$

习题二

1 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内连续，并对任意的 $z_0\in\partial D, \lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z\in D)$ 存在. 证明：

$$F(z)=\begin{cases} f(z), & \text{当} z\in D \\ \lim\limits_{\xi\to z} f(\xi), & \text{当} z\in\partial D \end{cases}$$

在 $\overline{D}$ 上连续.

Proof.

$\because \quad F(z)=f(z)\ (z\in D),\ f(z)$在 D 上连续 $\qquad \therefore \quad F(z)$在 D 上连续

$\because \quad \forall z_0\in\partial D, \forall\{\xi_n\}\subset D,\ s.t.\ \lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=z_0,\ \lim\limits_{z\to z_0} f(z)\ (z\in D)$存在

$\therefore \quad F(z_0)=\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty} F(\xi_n) \qquad \therefore \quad F(z)$在 ∂D 上连续

$\therefore \quad$ 在 $\overline{D}$ 上连续

□

2 （1）设函数 f 在区域 D 内一致连续. 证明：对任意的 $z_0\in\partial D, \lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z\in D)$ 存在.
（2）$\frac{1}{1+z^2}$ 在圆盘 $|z|<1$（称为单位圆盘）内是否一致连续？

Proof.

(1) 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$\because \quad f$ 在区域 D 内一致连续 $\qquad \therefore \quad \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,\ s.t.\ \forall z_1,z_2\in D,\ |z_1-z_2|<\delta,\ |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$

$\because \quad \forall z_0\in\partial D, \exists\{\xi_n\}\subset D,\ s.t.\ \lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=z_0$

$\because \quad$ 对 D 中任意收敛到 z_0 的点列 $\{\xi_n\}$: $\exists N\in N_+,\ s.t.\ n>N$时$,|\xi_n-z_0|<\dfrac{\delta}{2}$

$\therefore\quad m,n>N$时,$|\xi_m-\xi_n|\leqslant|\xi_m-z_0|+|\xi_n-z_0|<\delta$

$\therefore\quad |f(\xi_m)-f(\xi_n)|<\varepsilon$

$\therefore\quad |u(\xi_m)-u(\xi_n)|<\varepsilon,|v(\xi_m)-v(\xi_n)|<\varepsilon\qquad\therefore$ 由 *Cauchy* 收敛准则 $\lim\limits_{n\to\infty}u(\xi_n)=u(z),\lim\limits_{n\to\infty}v(\xi_n)=v(z)$

$\therefore\quad \lim\limits_{z\to z_0}f(z)(z\in D)$存在

(2) **证法一**:

$\because\quad \forall z_0=x_0+iy_0\in D=\{z||z|<1\},D$为开集 $\qquad\therefore\quad \exists\delta_0>0,\ s.t.\ B(z_0,\delta_0)\subset D$

$\because\quad \forall\varepsilon>0,\forall z\in B(z_0,\delta_0)\subset D,|z|\leqslant|z_0|+\delta_0<1$

$\therefore\quad |1+z^2|\geqslant 1-|z^2|=1-|z|^2\geqslant 1-|z|>1-(|z_0|+\delta_0)$

$$\therefore\quad \left|\frac{1}{1+z^2}-\frac{1}{1+z_0^2}\right|=\left|\frac{z_0^2-z^2}{(1+z^2)(1+z_0^2)}\right|$$
$$=\frac{|z_0^2-z^2|}{|(1+z^2)(1+z_0^2)|}$$
$$=\frac{|z_0+z||z_0-z|}{|1+z^2||1+z_0^2|}$$
$$\leqslant\frac{|z_0+z||z_0-z|}{|1+z_0^2|(1-|z_0|-\delta_0)}$$
$$\leqslant\frac{2|z_0-z|}{|1+z_0^2|(1-|z_0|-\delta_0)}$$

$\therefore\quad$ 取$\delta=\min\{\delta_0,\dfrac{\varepsilon|1+z_0^2|(1-|z_0|-\delta_0)}{2}\}$,则当 $|z-z_0|<\delta$ 时，有$\left|\dfrac{1}{1+z^2}-\dfrac{1}{1+z_0^2}\right|<\varepsilon$

$\therefore\quad f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$在 $z=z_0$ 处连续 $\qquad\therefore\quad$ 由 z_0 任意性有$f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$在 D 上连续

$\because\quad \forall n\in N_+,z_n=i\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\in D,z_0=i\in\partial D,\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=\infty\qquad\therefore\quad\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$

$\therefore\quad$ 由第 (1) 题知$f(z)$在 D 内不一致连续

证法二:

取$z_1=\dfrac{n}{n+1}i,z_2=\dfrac{n-1}{n}i$

$\because\quad |z_1-z_2|=\dfrac{1}{n(n+1)}\to 0\quad(n\to\infty)$

$$\left|\frac{1}{1+z_1^2}-\frac{1}{1+z_2^2}\right|=\left|\frac{1}{1-\frac{n^2}{(1+n)^2}}-\frac{1}{1-\frac{(n-1)^2}{n^2}}\right|$$
$$=\left|\frac{(n+1)^2}{2n+1}-\frac{n^2}{2n-1}\right|$$
$$=\frac{2n^2-1}{4n^2-1}$$
$$=\frac{1-\frac{1}{2n^2}}{2-\frac{1}{2n^2}}\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$$

$\therefore\quad f(z)$在 D 内不一致连续

□

3 **下列函数在何处可微？在何处解析？**

（1）$f(z)=x^2-iy$;　　（2）$f(z)=2x^3+iy^3$;　　（3）$f(z)=|z|^2$;

（4）$f(z)=xy^2+ix^2y$;　　（5）$e^{x^2-y^2}\cos 2xy+ie^{x^2-y^2}\sin 2xy.$

Proof.

记$Re\ f(z)=u(x,y), Im\ f(z)=v(x,y)$

(1) $\because$ u,v在 R^2 上可微,$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\iff x=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $f(z)$在 $\{z(x,y)|x=-\frac{1}{2}\}$ 上可微

$\because$ $\{z(x,y)|x=-\frac{1}{2}\}$不是开区域　$\therefore$ $f(z)$ 无处解析

(2) $\because$ u,v在 R^2 上可微,$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\iff 6x=3y^2$

$\therefore$ $f(z)$在 $\{z(x,y)|6x=3y^2\}$ 上可微

$\because$ $\{z(x,y)|6x=3y^2\}$不是开区域　$\therefore$ $f(z)$ 无处解析

(3) $\because$ $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$, u,v在 R^2 上可微,$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\iff x=y=0\iff z=0$

$\therefore$ $f(z)$在 $z=0$ 处可微

$\because$ $\{0\}$不是开区域　$\therefore$ $f(z)$ 无处解析

(4) $\because$ u,v在 R^2 上可微,$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\iff\begin{cases}y^2=x^2\\ 2xy=-2xy\end{cases}\iff x=y=0\iff z=0$

$\therefore$ $f(z)$在 $z=0$ 处可微

$\because$ $\{0\}$不是开区域　$\therefore$ $f(z)$ 无处解析

(5) $\because$ u,v在 R^2 上可微,$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\iff\begin{cases}-4xye^{x^2-y^2}\sin(2xy)=-4xye^{x^2-y^2}\cos(2xy)\\ 4xye^{x^2-y^2}\sin(2xy)=4xye^{x^2-y^2}\cos(2xy)\end{cases}\iff x,y\in R$

$\iff z\in C$

$\therefore$ $f(z)$在 C 上可微

$\because$ C是开区域　$\therefore$ $f(z)$ 在 C 上解析

□

4 **设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析. 证明：如果对每一点 $z\in D$，有**

$$f'(z)=0,$$

那么 $f(z)$ 在 D 内为常数.

Proof.

$\because \quad f(z)$在 D 内解析 $\quad \therefore \quad f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}, \quad \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$

$\because \quad f'(z)=0 \quad \therefore \quad \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ \frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$

$\therefore \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$

$\therefore \quad u(x,y),v(x,y)$恒为常数 $\quad \therefore \quad f(z)$在 D 内为常数

□

5 **设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析. 证明：如果 $f(z)$ 满足下列条件之一，那么它在 D 内为常数：**
(1) $Re\ f(z)$ 或 $Im\ f(z)$ 在 D 内为常数；
(2) $|f(z)|$ 在 D 内为常数.

Proof.

(1) 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$,不妨设$u=Ref(z)\equiv c_1$,则$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

$\because \quad f(z)$在 D 内解析 $\quad \therefore \quad \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$

$\therefore \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \therefore \quad v(x,y)=Imf(z)\equiv c_2$

$\therefore \quad f(z)$在 D 内恒为常数

同理可证，若 $Imf(z)\equiv c$ 时，$f(z)$ 在 D 内恒为常数

(2) $\because \quad |f(z)|^2=u^2+v^2$在 D 内恒为常数

$\therefore \quad \begin{cases}2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad ①\\ 2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad ②\end{cases}$

$\because \quad f(z)$在 D 内解析 $\quad \therefore \quad \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad ③\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad ④\end{cases}$

$\therefore \quad u\times ①+v\times ②$,得 $\quad (u^2+v^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

$v\times ①-u\times ②$,得 $\quad (u^2+v^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

$\therefore \quad u^2+v^2=0 \quad or \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

$\therefore \quad u=v\equiv 0 \quad or$ 由第 (1) 题有 u,v 恒为常数

$\therefore$ 综上，u,v 恒为常数，即 $f(z)$ 在 D 内恒为常数

□

6 **证明：若函数 $f(z)$ 在上半平面解析，那么函数 $\overline{f(\bar{z})}$ 在下半平面解析.**

Proof.

$\because\quad f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在 $\{z=x+yi|y>0\}$ 内解析 $\quad\therefore\quad \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\quad (y>0)$

$\because\quad \forall z\in\{z=x+yi|y<0\},\bar{z}\in\{z=x+yi|y>0\},\qquad \overline{f(\bar{z})}=\overline{u(x,-y)+iv(x,-y)}=u(x,-y)-iv(x,-y)\quad (y<0)$

$\therefore\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial(-y)}=\dfrac{\partial(-v)}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial u}{\partial(-y)}=-\left(-\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)=-\dfrac{\partial(-v)}{\partial x}\quad (y<0)$

$\therefore\quad \overline{f(\bar{z})}$ 在下半平面解析

□

7 **试用柯西-黎曼条件，证明下列函数在复平面上解析：**

$$z^2,\ e^z,\ \sin x,\ \cos z;$$

而下列函数不解析：

$$\overline{z^2},\ e^{\bar{z}},\ \sin\bar{z},\ \cos\bar{z}.$$

Proof.

设$z=x+iy$

$z^2=x^2-y^2+i2xy,\quad u=x^2-y^2,\quad v=2xy$

$\because\quad u,v$在 R^2 上可微, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2y$恒成立

$\therefore\quad z^2$在 C 上解析

$e^z=e^x(\cos y+i\sin y),\quad u=e^x\cos y,\quad v=e^x\sin y$

$\because\quad u,v$在 R^2 上可微, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-e^x\sin y$恒成立

$\therefore\quad e^z$在 C 上解析

$\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\dfrac{e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^y(\cos x-i\sin x)}{2i}=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x+i\cdot\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x,$

$u=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x,\quad v=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x$

$\because\quad u,v$在 R^2 上可微, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\sin x$恒成立

$\therefore\quad \sin z$在 C 上解析

$\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\dfrac{e^{-y}(\cos x+i\sin x)+e^y(\cos x-i\sin x)}{2}=-\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x+i\cdot\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x,$

$u=-\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x,\quad v=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x$

$\because\quad u,v$在 R^2 上可微, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\sin x,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x$恒成立

$\therefore\quad \cos z$在 C 上解析

$\overline{z^2}=x^2-y^2-i2xy,\quad u=x^2-y^2,\quad v=-2xy$

$\because\quad \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\quad iff\quad y=0,\quad \{z=x+iy|y=0\}$不是区域 $\quad\therefore\quad \overline{z^2}$不解析

$e^{\bar z}=e^x(\cos y-i\sin y),\quad u=e^x\cos y,\quad v=-e^x\sin y$

$\because\quad \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\quad iff\quad y=0,\quad \{z=x+iy|y=0\}$不是区域 $\quad\therefore\quad e^{\bar z}$不解析

$\because\quad \sin\bar z=\dfrac{e^{i\bar z}-e^{-i\bar z}}{2i}=\dfrac{e^{-y}(\cos x-i\sin x)-e^{y}(\cos x+i\sin x)}{2i}=-\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x+i\cdot\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x,$

$u=-\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x,\quad v=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x$

$\because\quad \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\quad iff\quad x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\in Z),\quad \{z=x+iy|x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\in Z)\}$不是区域

$\therefore\quad \sin\bar z$不解析

$\because\quad \cos\bar z=\dfrac{e^{i\bar z}+e^{-i\bar z}}{2}=\dfrac{e^{-y}(\cos x-i\sin x)+e^{y}(\cos x+i\sin x)}{2}=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x+i\cdot\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\sin x,$

$u=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x,\quad v=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}\sin x$

$\because\quad \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\quad iff\quad x=k\pi\ (k\in Z),\quad \{z=x+iy|x=k\pi\ (k\in Z)\}$不是区域

$\therefore\quad \cos\bar z$不解析

□

8 **证明在极坐标下函数** $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ **的柯西-黎曼条件是:**

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\frac{\partial u}{\partial\theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Proof.

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. 做极坐标变换: $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$

由链式法则有 $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r},\quad \dfrac{\partial u}{\partial\theta}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\theta}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial\theta}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

下证: $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\\ \frac{\partial u}{\partial\theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}\end{cases}\iff\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$

$\Longleftarrow$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= \left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial r} - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= \left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\frac{1}{r\cos\theta}\cos\theta - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\frac{1}{-r\sin\theta}\sin\theta \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\
\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= \left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta} - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= \left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\frac{1}{\sin\theta}(-r\sin\theta) - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\frac{1}{\cos\theta}r\cos\theta \\
&= -r\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) \\
&= -r\frac{\partial v}{\partial r}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial r}{\partial x} - r\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial \theta}{\partial x} \\
&= \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial y}{\partial \theta}\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) - r\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial y}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial r}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial r}{\partial y} - r\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial \theta}{\partial y} \\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial x}{\partial \theta}\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) - r\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right) \\
&= -\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{\partial v}{\partial x}$$

□

9　下章将要证明，在任何区域 D 内的解析函数 $f(z)$ 一定有任意阶导数. 由此证明:

(1) $f(z)$ 的实部和虚部在 D 内也有任意阶导数，并且满足拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

(2) 在 D 内,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2.$$

(3) 设 $f(z)$ 的实部及虚部分别是 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$. 那么在 D 内,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'(z)|^2.$$

Proof.

(1) $\because$ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$在 D 内可导 $\quad\therefore$ $u(x,y), v(x,y)$偏导数存在, $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$

$\because$ $f'(z)$在 D 内可导, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial y}$都是 $f'(z)$ 的实部或虚部 $\quad\therefore$ 它们均有偏导数

$\therefore$ $u(x,y), v(x,y)$二阶偏导数存在

$\because$ $f(z)$有任意阶导数 $\quad\therefore$ $u(x,y), v(x,y)$任意阶偏导数存在 $\quad\therefore$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$

$$\begin{aligned}
\because\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) - i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) - i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

(2) $\because$ $|f(z)|^2 = u^2(x,y) + v^2(x,y)$ $\quad\therefore$ $\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2 = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}|f(z)|^2 = 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y}$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2 = 2\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) + 2\left(v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2 = 2\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)+2\left(v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 &= 2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+2v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\\ &\quad +2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)+2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)\\ &= 0+0+2|f(z)|^2+2|f(z)|^2\\ &= 4|f'(z)|^2\end{aligned}$$

(3) $\because$ $f(z)$在 D 内解析 $\therefore$ $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$

$$\therefore\quad \begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = |f'(z)|^2$$

□

10 **设两个实变数的函数 $u(x,y)$ 有偏导数. 这一函数可以写成 $z=x+iy$ 及 $\bar{z}$ 的函数**

$$u = u\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right).$$

证明:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right),\ \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

设复变函数 $f(z)$ 的实部及虚部分别是 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$，并且它们都有偏导数，求证：对于 $f(z)$，柯西-黎曼条件可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}+i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}=0.$$

Proof.

$\because\quad u=u\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)\qquad \therefore\quad \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2i},\quad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=-\frac{1}{2i}$

$\therefore$ 由链式法则有 $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$\because\quad \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}i\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}\\ &= \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}+i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)+i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

$$= 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = 0$$

□

11 **试求出** e^{2+i},$\mathrm{Ln}(1+i), i^i, 1^{\sqrt{2}}, (-2)^{\sqrt{2}}$ **的值.**

Proof.

$$\begin{aligned}
e^{2+i} &= e^2(\cos 1 + i\sin 1) \\
\mathrm{Ln}(1+i) &= \ln|1+i| + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \qquad (k \in Z) \\
i^i &= e^{i\mathrm{Ln}i} \\
&= e^{i(\ln|i|) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \\
&= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \qquad (k \in Z) \\
1^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}1} \\
&= e^{\sqrt{2}(\ln 1 + i2k\pi)} \\
&= e^{i2\sqrt{2}k\pi} \\
&= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi) \qquad (k \in Z) \\
(-2)^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}(-2)} \\
&= e^{\sqrt{2}[\ln|-2| + i(\pi + 2k\pi)]} \\
&= e^{\sqrt{2}\ln 2}(\cos[\sqrt{2}(2k+1)\pi] + i\sin[\sqrt{2}(2k+1)\pi]) \qquad (k \in Z)
\end{aligned}$$

□

12 **由** $z = \sin w$ **及** $z = \cos w$ **所定义的函数** w **分别称为** z **的反正弦函数及反余弦函数. 求出它们的解析表达式（利用对数函数）.**

Proof.

(1) $\because \quad z = \sin w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \qquad \therefore \quad e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0 \qquad \therefore \quad e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$

$\therefore$ 由一元二次函数求根公式有 $e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$

$\therefore \quad iw = \mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad \therefore \quad \arcsin z = w = -i\mathrm{Ln}(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$

(2) $\because \quad z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} \qquad \therefore \quad e^{iw} - 2z + e^{-iw} = 0 \qquad \therefore \quad e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$

$\therefore$ 由一元二次函数求根公式有 $e^{iw} = z \pm \sqrt{1+z^2}$

$\therefore$ $iw = \mathrm{Ln}(z+\sqrt{1+z^2})$ $\quad\therefore$ $\arcsin z = w = -i\mathrm{Ln}(z \pm \sqrt{1+z^2})$

□

（注：$\sqrt{1+z^2}$ 是二值函数，故等价于 $\pm\sqrt{1+z^2}$.）

13 由

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{及} \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

所定义的函数分别称为双曲正弦函数及双曲余弦函数. 证明

$$\sinh z = -i\sin(iz), \cosh z = \cos(iz).$$

由此从关于三角函数的有关公式导出：

$$\begin{aligned}
&\cosh z^2 - \sinh z^2 = 1,\\
&\sinh(z_1+z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2,\\
&\cosh(z_1+z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2,\\
&\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y,\\
&\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i\sin x \sinh y,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sinh z = \cosh z, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cosh z = \sinh z.
\end{aligned}$$

Proof.

$\because$ $\sin(iz) = \dfrac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = -\dfrac{e^z - e^{-z}}{2i}$ $\quad\therefore$ $\sinh z = -i\sin(iz)$

$\because$ $\cos(iz) = \dfrac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ $\quad\therefore$ $\cosh z = \cos(iz)$

$\therefore$ $\cosh z^2 - \sinh z^2 = [\cos(iz)]^2 - [-i\sin(iz)]^2 = \cos^2(iz) + \sin^2(iz) = 1$

$$\begin{aligned}
\sinh(z_1+z_2) &= -i\sin[i(z_1+z_2)]\\
&= -i\sin(iz_1)\cos(iz_2) + i\cos(iz_1)\sin(iz_2)\\
&= \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cosh(z_1+z_2) &= \cos[i(z_1+z_2)]\\
&= \cos(iz_1)\cos(iz_2) - \sin(iz_1)\sin(iz_2)\\
&= \cos(iz_1)\cos(iz_2) + [-i\sin(iz_1)][-i\sin(iz_2)]\\
&= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x+iy) &= \sin x\cos(iy) + \cos x\sin(iy)\\
&= \sin x\cos(iy) + \cos x[-i\sin(iy)]\\
&= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\cos(x+iy) &= \cos x\cos(iy)-\sin x\sin(iy)\\
&= \cos x\cos(iy)-i\sin x[-i\sin(iy)]\\
&= \cos x\cosh y-i\sin x\sinh y
\end{aligned}
$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sinh z=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[-i\sin(iz)]=\cos(iz)=\cosh z$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cosh z=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos(iz)=-i\sin(iz)=\sinh z$$

□

14 **设函数 $f\left(\frac{1}{z}\right)$ 在 $z=0$ 解析，那么我们说 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 解析. 下列函数中，哪些在无穷远点解析?**

$$e^z,\mathrm{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right),\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m}{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n},\frac{\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}.$$

Proof.

(1) $\because \lim\limits_{\substack{x\to0^+\\x\in R}}e^{\frac{1}{x}}=\infty,\lim\limits_{\substack{x\to0^-\\x\in R}}e^{\frac{1}{x}}=0$

$\therefore$ $e^{\frac{1}{z}}$在 $z=0$ 处不连续　$\therefore$ $e^{\frac{1}{z}}$在 $z=0$ 处不解析　$\therefore$ e^z在 $z=\infty$ 处不解析

(2) $f(z)=\mathrm{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right),f\left(\frac{1}{z}\right)=\mathrm{Ln}\left(\frac{z+1}{1-z}\right)=\mathrm{Ln}(z+1)-\mathrm{Ln}(1-z)$

$\because$ $\mathrm{Ln}(z+1),\mathrm{Ln}(1-z)$ 都是多值解析函数,$z=0$ 不是枝点

$\therefore$ $f\left(\frac{1}{z}\right)$的每一个解析分支在 $z=0$ 处解析　$\therefore$ $f(z)$在 $z=\infty$ 解析

(3) $f(z)=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m}{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n},f\left(\frac{1}{z}\right)=z^{n-m}\frac{a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_n}$　$(a_m\neq0,b_n\neq0)$

$\therefore$ 当 $m\leqslant n$ 时,$f\left(\frac{1}{z}\right)$在 $z=0$ 处解析,$f(z)$在 $z=\infty$ 解析

当 $m>n$ 时,$f\left(\frac{1}{z}\right)$在 $z=0$ 处不解析,$f(z)$在 $z=\infty$ 不解析

(4) $f(z)=\frac{\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}},f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{1+\sqrt{z}}$

$\because$ $f\left(\frac{1}{z}\right)$是双值函数,$z=0$ 是枝点, 两个解析分支在 $z=0$ 不解析

$\therefore$ $f(z)$在 $z=\infty$ 不解析

□

15 **在复平面上取上半虚轴作割线. 试在所得区域内分别取定函数 $\sqrt{z}$ 与 $\mathrm{Ln}z$ 在正实轴分别取正实值和实值的一个解析分支，并求它们在上半虚轴左沿的点及右沿的点 $z=i$ 处的值.**

Proof.

(1) $\sqrt{z}=\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{2}}$在正实轴取正实值的一个解析分支是$\sqrt{z}=\sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}}$　$\left(\frac{\pi}{2}-2\pi<\arg z<\frac{\pi}{2}\right)$

在右沿点 $z=i$ 处$\sqrt{i}=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

在左沿点 $z=i$ 处$\sqrt{i}=e^{-i\frac{3\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

(2) $\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$在正实轴取实值的一个解析分支是$\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\arg z \quad \left(\frac{\pi}{2}-2\pi<\arg z<\frac{\pi}{2}\right)$

在右沿点 $z=i$ 处$\mathrm{Ln}i=\ln 1+i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{3}{2}\pi i$

在左沿点 $z=i$ 处$\mathrm{Ln}i=\ln 1+i\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}i$

□

16 **在复平面上取正实轴作割线. 试在所得区域内:**

(1) 取定函数 $z^{\alpha}(-1<\alpha<0)$ 在正实轴上沿取正实值的一个解析分支，并求这一分支在 $z=-1$ 处的值；在正实轴下沿的值.

(2) 确定函数 $\mathrm{Ln}z$ 在正实轴上沿取实值的一个解析分支，并求这一解析分支在 $z=-1$ 处的值; 在正实轴下沿的值.

Proof.

(1) $z^{\alpha}=e^{\alpha \mathrm{Ln}z}=e^{\alpha[\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)]}=e^{\alpha\ln|z|}\cdot e^{i\alpha(\arg z+2k\pi)} \qquad (k\in Z)$

在正实轴取正实值的一个解析分支是 $z^{\alpha}=e^{\alpha\ln|z|}\cdot e^{i\alpha\arg z} \qquad (0<\arg z<2\pi)$

该分支在 $z=-1$ 处的值为 $(-1)^{\alpha}=e^{\alpha\ln|-1|}e^{i\alpha\pi}=\cos(\alpha\pi)+i\sin(\alpha\pi)$

该分支在正实轴下沿 $z=x$ 的值为 $x^{\alpha}=e^{\alpha\ln|x|}e^{i2\alpha\pi}=e^{\alpha\ln x}[\cos(2\alpha\pi)+i\sin(2\alpha\pi)]$

(2) $\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$

在正实轴取实值的一个解析分支是 $\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\arg z \qquad (0<\arg z<2\pi)$

该分支在 $z=-1$ 处的值为 $\mathrm{Ln}(-1)=\ln|-1|+i\pi=i\pi$

该分支在正实轴下沿 $z=x$ 的值为 $\mathrm{Ln}x=\ln|x|+i2\pi=\ln x+2\pi i$

□

17 **求函数 $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}(0<k<1)$ 的支点. 证明它在线段**

$$-\frac{1}{k}\leqslant x\leqslant -1, 1\leqslant x\leqslant \frac{1}{k}$$

的外部能分成解析分支，并求在 $z=0$ 取正值的那个分支.

Proof.

$$\begin{aligned}
f(z)&=\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}\\
&=\sqrt{(1-z)(1+z)(1-kz)(1+kz)}\\
&=k\sqrt{(z-1)(z+1)(z-\frac{1}{k})(z+\frac{1}{k})} \qquad (0<k<1)
\end{aligned}$$

设在 z_1 处有起始值 $z_1-1=r_1e^{i\theta_1},z_1+1=r_2e^{i\theta_2},z_1-\dfrac{1}{k}=r_3e^{i\theta_3},z_1+\dfrac{1}{k}=r_4e^{i\theta_4}$

$\therefore$ $f(z)$的起始值为 $\omega_1=k\sqrt{r_1r_2r_3r_4}e^{i\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{2}}$

$\because$ $\sqrt{z}$的支点为 $0,\infty$ $\quad\therefore$ $f(z)$可能的支点为$\pm1,\pm\dfrac{1}{k},\infty$

$\because$ 当 z 依逆时针方向沿任一条不经过 $\pm1,\pm\dfrac{1}{k}$, 并在其内部包含点 $z=1$ 而不包含其它三点的简单闭曲线连续变动回到原来位置时，θ_1 变为 $\theta_1+2\pi,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 不变，起始值变为 $\omega_1'=k\sqrt{r_1r_2r_3r_4}e^{i\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+2\pi}{2}}=-\omega_1$

$\therefore$ $z=1$是 $f(z)$ 的支点

同理可证,$z=-1,z=\pm\dfrac{1}{k}$ 也是 $f(z)$ 的支点

$\because$ 当 z 依逆时针方向沿任一条不经过 $\pm1,\pm\dfrac{1}{k}$, 并在其内部包含点 $z=\pm1,z=\pm\dfrac{1}{k}$ 的简单闭曲线连续变动回到原来位置时，$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 增加 2π，起始值变为 $\omega_1'=k\sqrt{r_1r_2r_3r_4}e^{i\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+8\pi}{2}}=\omega_1$

$\therefore$ $z=\infty$不是 $f(z)$ 的支点

类似地，可以证明，若简单闭曲线内部恰含两个枝点，则点 z 依逆时针方向沿曲线连续变动一周时，函数值也不变

$\therefore$ 在线段$-\dfrac{1}{k}\leqslant x\leqslant-1,1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{k}$的外部 $f(z)$ 分成解析分支:

$$\begin{aligned}\omega_1&=k\sqrt{r_1r_2r_3r_4}e^{i\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+2m\pi}{2}}\\&=\sqrt{|(1-z^2)(1-k^2z^2)|}e^{i\frac{1}{2}[\arg(1-z^2)+\arg(1-k^2z^2)+2m\pi]}\qquad(m=0,1,\quad z\in D)\end{aligned}$$

$\because$ $z=0$时$f(z)$取正值 $\quad\therefore$ $\sqrt{|(1-0)(1-0)|}e^{i\frac{1}{2}[\arg(1-0)+\arg(1-0)+2m\pi]}=e^{im\pi}>0$

$\therefore$ $m=0$ $\quad\therefore$ $z=0$ 时 $f(z)$ 取正值的分支为$\omega_0=\sqrt{|(1-z^2)(1-k^2z^2)|}e^{i\frac{1}{2}[\arg(1-z^2)+\arg(1-k^2z^2)]}$

□

18 **设函数**

$$\omega=\sqrt[3]{\frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}}.$$

如果规定在 $z=3$ 时，$w>0$. 作两种适当的割线，求这函数的一个解析分支在 $z=i$ 的值.

Proof.

$$\begin{aligned}\omega&=\sqrt[3]{\frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}}\\&=\sqrt[3]{\left|\frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}\right|}e^{\frac{i}{3}[\mathrm{Arg}(z+1)-\mathrm{Arg}z+\mathrm{Arg}(z-1)+\mathrm{Arg}(z-2)]}\end{aligned}$$

任作一条简单连续闭曲线 C, 使其不经过 $-1,0,1,2$, 并使其内区域含 1，但不含 $-1,0,2$. 设 z_1 是 C 上一点，取定 $\mathrm{Arg}(z+1)$,$\mathrm{Arg}z$,$\mathrm{Arg}(z-1)$,$\mathrm{Arg}(z-2)$ 在 z_1 的值 $\arg(z_1+1),\arg z_1,\arg(z_1-1),\arg(z_1-2)$

当 z 从 z_1 依逆时针方向连续变动时，$\arg(z_1+1),\arg z_1,\arg(z_1-2)$ 不变，$\arg(z_1-1)$ 增加 2π，ω 在 z_1 的值从 $\qquad\omega_1=\sqrt[3]{\left|\dfrac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}\right|}e^{\frac{i}{3}[\arg(z+1)-\arg z+\arg(z-1)+\arg(z-2)]}$

连续变动到 $\sqrt[3]{\left|\frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}\right|}e^{\frac{i}{3}[\arg(z+1)-\arg z+\arg(z-1)+\arg(z-2)+2\pi]}\neq\omega_1$

$\therefore$ 1是 ω 的支点

同理可证,$-1,0,2$ 也是 ω 的支点

任作一条简单连续闭曲线，使其内区域含 $-1,0,1,2$, 可证明 ∞ 是 ω 的支点

$\therefore$ 在复平面上沿实轴作割线 $-1\leqslant x\leqslant 2(y=0)$ 和沿虚轴作割线 $y>0(x=0)$, 则在所得区域 D 内，可把 ω 分成解析分支

$\because$ $z=3$时$,\arg(z+1)=\arg(z)=\arg(z-1)=\arg(z-2)=0,\omega>0$

在 D 内 ω 有三个解析分支 $\omega=\sqrt[3]{\left|\frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}\right|}e^{\frac{i}{3}[\arg(z+1)-\arg z+\arg(z-1)+\arg(z-2)+2k\pi]}$ $(k=0,1,2)$

$\therefore$ $z=3,\omega>0$ 的分支是 $\omega=\sqrt[3]{\left|\frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}\right|}e^{\frac{i}{3}[\arg(z+1)-\arg z+\arg(z-1)+\arg(z-2)]}$

$\because$ 在区域 D 内, 当 z 从 3 沿曲线 C 逆时针方向连续变动到上半虚轴右沿点时，$\arg(z+1)$ 增加 $\frac{\pi}{4}$,$\arg z$ 增加 $\frac{\pi}{2}$,$\arg(z-1)$ 增加 $\frac{3\pi}{4}$,$\arg(z-2)$ 增加 $\pi-\arctan 2$

$\therefore$ $\arg(z+1)=\frac{\pi}{4},\arg z=\frac{\pi}{2},\arg(z-1)=\frac{3\pi}{4},\arg(z-2)=\pi-\arctan 2$

$\therefore$ ω的所求分支在上半虚轴右沿点 i 处的值是 $\sqrt[3]{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}e^{\frac{i}{3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}+\pi-\arctan 2\right)}=\sqrt[6]{20}e^{\frac{i}{3}\left(\pi+\arctan\frac{1}{2}\right)}$

$\because$ 在区域 D 内, 当 z 从上半虚轴左沿点沿曲线 C 逆时针方向连续变动到 3 时，$\arg(z+1)$ 增加 $\frac{7\pi}{4}$,$\arg z$ 增加 $\frac{3\pi}{2}$,$\arg(z-1)$ 增加 $\frac{5\pi}{4}$,$\arg(z-2)$ 增加 $\pi+\arctan 2$

$\therefore$ $\arg(z+1)=-\frac{7\pi}{4},\arg z=-\frac{3\pi}{2},\arg(z-1)=-\frac{5\pi}{4},\arg(z-2)=-\pi-\arctan 2$

$\therefore$ ω的所求分支在上半虚轴右沿点 i 处的值是 $\sqrt[3]{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}e^{\frac{i}{3}\left(-\frac{7\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}-\pi-\arctan 2\right)}=-\sqrt[6]{20}e^{\frac{i}{3}\arctan\frac{1}{2}}$

□

（注：这里用到等式 $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}.$ **）**

19 **找出下列推理的错误：因为** $(-z)^2=z^2$**，所以** $2\mathrm{Ln}(-z)=2\mathrm{Ln}z$. **因此** $\mathrm{Ln}(-z)=\mathrm{Ln}z$.

Proof.

$\because$ $\mathrm{Ln}z^2=\ln|z|^2+i(2\theta+2k\pi)\qquad(k\in Z)$

$2\mathrm{Ln}z=2[\ln|z|+i(\theta+2k\pi)]=\ln|z|^2+i(\theta+2k\pi)\qquad(k\in Z)$

$\therefore$ $\mathrm{Ln}z^2\neq 2\mathrm{Ln}z\qquad(\theta\neq 2k\pi,k\in Z)$

$\therefore$ 由$(-z)^2=z^2$推不出$2\mathrm{Ln}(-z)=\mathrm{Ln}(-z)^2=\mathrm{Ln}z^2=2\mathrm{Ln}z$ （第一个与最后一个等号不一定成立)

□

3 复变函数的积分

小结

习题三

1 分别计算沿着（1）直线段； （2）单位圆（$|z|=1$）的左半圆； （3）单位圆的右半圆的下列积分：

$$I=\int_{-i}^{i}|z|\mathrm{d}z.$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
(1)\quad &\because\quad z=it\quad(-1\leqslant t\leqslant 1)\\
&\therefore\quad I=\int_{-i}^{i}|z|\mathrm{d}z\\
&\quad=\int_{-1}^{1}|it|i\mathrm{d}t\\
&\quad=\int_{-1}^{0}|it|i\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}|it|i\mathrm{d}t\\
&\quad=\int_{-1}^{0}|i||t|i\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}|i||t|i\mathrm{d}t\\
&\quad=\int_{-1}^{0}(-t)i\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}ti\mathrm{d}t\\
&\quad=2i\int_{0}^{1}t\mathrm{d}t\\
&\quad=it^2\Big|_0^1\\
&\quad=i\\
(2)\quad &\because\quad z=e^{i\theta}\quad(\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2})\\
&\therefore\quad I=\int_{-i}^{i}|z|\mathrm{d}z\\
&\quad=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|e^{i\theta}|ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta\\
&\quad=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta\\
&\quad=e^{i\theta}\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\
&\quad=2i\\
(3)\quad &\because\quad z=e^{i\theta}\quad(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})\\
&\therefore\quad I=\int_{-i}^{i}|z|\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |e^{i\theta}| ie^{i\theta} \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ie^{i\theta} \mathrm{d}\theta \\
&= e^{i\theta} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2i
\end{aligned}
$$

□

2 计算积分

$$I = \int_L \mathrm{Re}\ z \mathrm{d}z,$$

在这里 L 分别表示：(1) 单位圆（按反时针方向从 1 到 1 取积分）；　(2) 从 z_1 沿直线段到 z_2.

Proof.

(1) $\because$ $L: z = e^{i\theta} \quad (0 \leqslant \theta < 2\pi)$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ I &= \int_L \mathrm{Re}\ z \mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} \cos\theta ie^{i\theta} \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (i\cos^2\theta - \cos\theta\sin\theta) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(i\frac{\cos 2\theta + 1}{2} - \cos\theta\sin\theta \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \left(\frac{\sin 2\theta}{4} i + \frac{i\theta}{2} + \frac{\sin^2\theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= i\pi
\end{aligned}
$$

(2) 设 $z_1 = x_2 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$

$\because$ $L: z = z_1 + (z_2 - z_1)t \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ I &= \int_L \mathrm{Re}\ z \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 [x_1 + (x_2 - x_1)t](z_2 - z_1) \mathrm{d}t \\
&= (z_2 - z_1) \left[x_1 t + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)t^2 \right] \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(z_2 - z_1)(x_1 + x_2)
\end{aligned}
$$

□

3 设函数 $f(z)$ 当 $|z - z_0| > r_0 (0 < r_0 < r)$ 时是连续的. 令 $M(r)$ 表示 $|f(z)|$ 在 $|z - z_0| = r > r_0$ 上的最大值，并且假定

$$\lim_{r \to +\infty} rM(r) = 0.$$

试证明

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

在这里 K_r **是圆** $|z-z_0| = r.$

Proof.

$\because$ $f(z)$ 在 $|z-z_0| > r_0$ 内连续 $\therefore$ $f(z)$在 $K_r : |z-z_0| = r > r_0$ 上连续 $\therefore$ $\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}z$存在

对 $|z-z_0| = r$ 的任意分割，分点按逆时针顺序排列为：$z_0,\cdots,z_n = z_0$. ξ_k 是 z_{k-1} 到 z_k 弧上任一点

$\because$ $|f(z)| \leqslant M(r)$ $\therefore$ $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})\right| \leqslant M(r)\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \leqslant 2\pi r M(r)$

$\therefore$ $\left|\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi r M(r) \to 0 \quad (r\to\infty)$

□

4 **如果满足上题中条件的函数** $f(z)$ **还在** $|z-z_0| > r_0$ **内解析，那么对任何** $r > r_0$,

$$\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Proof.

$\forall r > r_0$,任取 $r' > r > r_0$

$\because$ $f(z)$ 在 $|z-z_0| > r_0$ 内解析 $\therefore$ $f(z)$ 在 $r \leqslant |z-z_0| \leqslant r'$ 内解析

$\therefore$ 由复连通区域的柯西定理, 有 $\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}z = \int_{K_{r'}} f(z)\mathrm{d}z$

$\therefore$ 令 $r' \to \infty$, 由第 3 题有 $\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{r'\to\infty}\int_{K_{r'}} f(z)\mathrm{d}z = 0$

□

5 **计算积分**

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^4-1}.$$

Proof.

解法一

$\because$ $f(z) = \frac{1}{z^4-1}$在 $|z| > 1$ 解析. $\forall r > 1, |f(z)| = \frac{1}{|z^4-1|} \leqslant \frac{1}{|z|^4-1} = \frac{1}{r^4-1}$

$\therefore$ $0 \leqslant M(r) \leqslant \frac{1}{r^4-1}, 0 \leqslant rM(r) \leqslant \frac{r}{r^4-1} \to 0 \quad (r\to+\infty)$

$\therefore$ $\lim_{r\to+\infty} rM(r) = 0$

$\therefore$ 由第 4 题有 $\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}z = 0$

解法二

方程 z^4-1 的根为 $z_1=1,z_2=i,z_3=-1,z_4=-i$. 取 r 使以 z_1,z_2,z_3,z_4 为圆心，r 为半径的圆 B_1,B_2,B_3,B_4 互不相交、都包含在 $|z|=2$ 内

$\because$ $f(z)$在由 $|z|=2$ 和 B_1,B_2,B_3,B_4 围成的闭区域内解析 $\quad\therefore$ $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{4}\int_{B_i} f(z)\mathrm{d}z$

$\because$ $\dfrac{1}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$在 $|z-z_1|\leqslant r$ 上解析

$$\therefore \quad \text{由柯西公式有} \int_{B_1} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{B_1}\frac{\frac{1}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}}{(z-z_1)}\mathrm{d}z$$
$$=\frac{2\pi i}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}$$
$$=\frac{2\pi i}{(1-i)(1+1)(1+i)}$$
$$=\frac{\pi i}{2}$$

同理可得 $\displaystyle\int_{B_2}\frac{\mathrm{d}z}{z^4-1}=-\frac{\pi}{2},\ \int_{B_3}\frac{\mathrm{d}z}{z^4-1}=-\frac{\pi i}{2},\ \int_{B_4}\frac{\mathrm{d}z}{z^4-1}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^4-1}=0$

□

6 设 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在单连通区域 D 内解析，α 及 β 是 D 内两点，证明

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)g'(z)\mathrm{d}z = f(z)g(z)\Big|_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta} f'(z)g(z)\mathrm{d}z \quad \text{（分部积分公式）},$$

在这里从 α 到 β 的积分是沿 D 内连接 α 及 β 的一条简单曲线取的.

Proof.

$\because$ $f(z),g(z)$在单连通区域 D 内解析 $\quad\therefore$ $f(z)g(z)$在 D 内解析

$\because$ 由柯西公式，$[f(z)g(z)]'$ 在 D 内有任意阶导数 $\quad\therefore$ $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$在 D 内解析

$\therefore$ 由微积分基本定理和积分性质，得

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(z)g(z)\mathrm{d}z+\int_{\alpha}^{\beta} f(z)g'(z)\mathrm{d}z=\int_{\alpha}^{\beta} f'(z)g(z)+f(z)g'(z)\mathrm{d}z=f(z)g(z)\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

$$\therefore \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(z)g'(z)\mathrm{d}z=f(z)g(z)\Big|_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta} f'(z)g(z)\mathrm{d}z$$

□

7 计算积分:

（1）$I=\int_C\dfrac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$; （2）$I=\int_C \ln z\mathrm{d}z$,

在这里用 C 表示单位圆（按反时针方向从 1 到 1 取积分），而被积函数分别取为按下列各值决定的解析分支：（1）$\sqrt{1}=1$ **或** $\sqrt{1}=-1$; （2）$\ln 1=0$ **或** $\ln 1=2\pi i$.

Proof.

(1) $\because$ $\sqrt{1}=1$对应的解析分支为 $\frac{1}{\sqrt{z}}=|z|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{i}{2}\arg z}$

$$\begin{aligned}\therefore\quad I&=\int_C\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\\&=\int_{|z|=1}|z|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{i}{2}\arg z}\mathrm{d}z\\&=\int_{|z|=1}e^{-\frac{i}{2}\theta}\mathrm{d}e^{i\theta}\\&=\int_0^{2\pi}ie^{\frac{i}{2}\theta}\mathrm{d}\theta\\&=i\cdot\frac{2}{i}e^{\frac{i}{2}\theta}\Big|_0^{2\pi}\\&=-4\end{aligned}$$

$\because$ $\sqrt{1}=-1$对应的解析分支为 $\frac{1}{\sqrt{z}}=|z|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{i}{2}(\arg z+2\pi)}$

$$\begin{aligned}\therefore\quad I&=\int_C\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}\\&=\int_{|z|=1}|z|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{i}{2}(\arg z+2\pi)}\mathrm{d}z\\&=\int_{|z|=1}e^{-\frac{i}{2}(\theta+2\pi)}\mathrm{d}e^{i\theta}\\&=\int_0^{2\pi}e^{-\frac{i}{2}(\theta+2\pi)}\cdot ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}ie^{\frac{i}{2}(\theta-2\pi)}\mathrm{d}\theta\\&=i\cdot\frac{2}{i}e^{\frac{i}{2}(\theta-2\pi)}\Big|_0^{2\pi}\\&=4\end{aligned}$$

(2) $\because$ $\ln 1=0$对应的解析分支为 $\ln z=\ln|z|+i\arg z\quad(0\leqslant\arg z<2\pi)$

$$\begin{aligned}\therefore\quad I&=\int_C\ln z\mathrm{d}z\\&=\int_{|z|=1}(\ln|z|+i\arg z)\mathrm{d}z\\&=\int_{|z|=1}i\arg z\mathrm{d}e^{i\theta}\\&=\int_0^{2\pi}i\theta\cdot ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta\\&=e^{i\theta}(i\theta-1)\Big|_0^{2\pi}\\&=2\pi i\end{aligned}$$

$\because$ $\ln 1=2\pi i$对应的解析分支为 $\ln z=\ln|z|+i\arg z+2\pi i\quad(0\leqslant\arg z<2\pi)$

$$\begin{aligned}\therefore\quad I&=\int_C\ln z\mathrm{d}z\\&=\int_{|z|=1}(\ln|z|+i\arg z+2\pi i)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{|z|=1} (i \arg z + 2\pi i) \mathrm{d}z \\
&= \int_{|z|=1} (i\theta + 2\pi i) \mathrm{d}e^{i\theta} \\
&= \int_0^{2\pi} (i\theta + 2\pi i) \cdot ie^{i\theta} \mathrm{d}\theta \\
&= \left[e^{i\theta}(i\theta - 1) - \frac{2\pi}{i} e^{i\theta} \right] \Big|_0^{2\pi} \\
&= 2\pi i
\end{aligned}
$$

□

8 **如果积分路线不经过点** $\pm i$, **那么**

$$
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).
$$

Proof.

若积分曲线 C_0 不经过且不环绕 $\pm i$, 则必存在单连通区域 D 包含 C_0 并且不包含 $\pm i$: 若 C_0 不经过虚轴，则显然可选取右半平面为 D; 若 C_0 经过虚轴，则其与虚轴交点只能位于 $\pm i$ 之间，且存在最小 a、最大值 b，因此取 $D = \left\{ z = x + iy \middle| a - \frac{1}{2}(a+i) < y < b + \frac{1}{2}(i-b) \right\} \cup \{ z = x + yi | x > 0 \}$.

$\therefore \quad \int_{C_0} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \arctan z \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

若简单闭曲线 C_1 不经过 $\pm i$，环绕 i 而不环绕 $-i$，按逆时针方向绕行一次，则 $\int_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \pi$

若简单闭曲线 C_2 不经过 $\pm i$，环绕 $-i$ 而不环绕 i，按逆时针方向绕行一次，则 $\int_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = -\pi$

若简单闭曲线 C_3 不经过 $\pm i$，环绕 i 和 $-i$，按逆时针方向绕行一次，则 $\int_{C_3} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = 0$

$\therefore$ 积分曲线 C 可通过增补积分路线，分解为只绕行 i 的简单闭曲线 k_1 条、只绕行 $-i$ 的简单闭曲线 k_2 条、同时绕行 $\pm i$ 的简单闭曲线 k_3 条、不绕行 $\pm i$ 的简单曲线 1 条

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} &= \int_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} \\
&= k_1 \int_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} + k_2 \int_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} + k_3 \int_{C_3} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} + \int_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} \\
&= \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad (k \in Z)
\end{aligned}
$$

□

9 **证明**:

(1) $\left| \int_c (x^2 + iy^2) \mathrm{d}z \right| \leqslant 2, C$ **为联** $-i$ **到** i **的线段**;

(2) $\left| \int_c (x^2 + iy^2) \mathrm{d}z \right| \leqslant \pi, C$ **为右半单位圆** $|z| = 1, \mathrm{Re}\, z \geqslant 0$;

(3) $\left| \int_c \frac{\mathrm{d}z}{z^2} \right| \leqslant 2, C$ **为联** i **到** $i+1$ **的线段**.

Proof.

(1) $\because \quad \forall z=x+iy\in C=\{z=x+iy|x=0,-1\leqslant y\leqslant 1\},\ |x^2+iy^2|=y^2\leqslant 1,\ L_C=2$

$\therefore \quad \left|\int_c (x^2+iy^2)\mathrm{d}z\right|\leqslant 1\cdot L_C=2$

(2) $\because \quad \forall z=x+iy\in C=\{z=x+iy||z|=1,x\geqslant 0\},\ |x^2+iy^2|=\sqrt{x^4+y^4}\leqslant\sqrt{(x^2+y^2)^2}=x^2+y^2=1,\ L_C=\pi$

$\therefore \quad \left|\int_c (x^2+iy^2)\mathrm{d}z\right|\leqslant 1\cdot L_C=\pi$

(3) $\because \quad \forall z=x+iy\in C=\{z=x+iy|0\leqslant x\leqslant 1,y=1\},\ \left|\frac{1}{z^2}\right|=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{x^2+1}\leqslant 1,\ L_C=1$

$\therefore \quad \left|\int_c \frac{\mathrm{d}z}{z^2}\right|\leqslant 1\cdot L_C<2$

□

10 **设 $f(z)$ 在原点的邻域内连续，那么**

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta=2\pi f(0).$$

Proof.

$\because$ $f(z)$在原点的邻域内连续 $\quad\therefore\quad \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ s.t.\ \forall z=re^{i\theta}\in C,|z|<\delta$时，有 $|f(z)-f(0)|<\dfrac{\varepsilon}{2\pi}$

$$\because\quad \left|\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta-2\pi f(0)\right|=\left|\int_0^{2\pi}[f(re^{i\theta})-f(0)]\mathrm{d}\theta\right|$$
$$\leqslant\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})-f(0)|\mathrm{d}\theta$$
$$<\varepsilon$$

$$\therefore\quad \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta=2\pi f(0)$$

□

11 **计算积分：**

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\mathrm{d}z$; (2) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2}$;

(3) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2}$; (4) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z\mathrm{d}z}{(2z+1)(z-2)}$.

Proof.

(1) 由柯西公式得 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\mathrm{d}z=2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z-0}\mathrm{d}z=2\pi i e^z\Big|_{z=0}=2\pi i$

(2) $\dfrac{1}{z^2+2}$在 $z=\pm\sqrt{2}i$ 处不解析. 作圆 $C_{1,2}=\left\{z:|z\pm\sqrt{2}i|=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right\}$. 则 $\dfrac{1}{z^2+2}$ 在 $|z|=2$ 与 C_1,C_2 围成的多连通区域内解析

$\therefore$ 由柯西定理有 $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2}=2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2}+\int_{C_2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2}$

$\because$ 由柯西公式有 $\displaystyle\int_{C_1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2}=2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\frac{1}{z+\sqrt{2}i}}{z-\sqrt{2}i}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{z+\sqrt{2}i}\Big|_{z=\sqrt{2}i}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$$\int_{C_2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2}=\int_{C_2}\frac{\frac{1}{z-\sqrt{2}i}}{z+\sqrt{2}i}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{z-\sqrt{2}i}\Big|_{z=-\sqrt{2}i}=-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2}=0$

(3) $\because$ $\dfrac{1}{z^2+2}$在 $|z|\leqslant 1$ 内解析 $\therefore$ 由柯西定理有 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+2}=0$

(4) $\because$ $\dfrac{z}{z-2}$ 在 $|z|\leqslant\dfrac{1}{3}<\left|-\dfrac{1}{2}\right|$ 内解析

$\therefore$ 由柯西公式有 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z\mathrm{d}z}{(2z+1)(z-2)}=\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\frac{z}{z-2}}{z+\frac{1}{2}}\mathrm{d}z=\frac{\pi i z}{z-2}\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{\pi i}{5}$

□

12 **证明**

$$\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^n e^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta},$$

在这里 C **是围绕原点的一条简单闭曲线.**

Proof.

$\because$ 设$f(\zeta)=\dfrac{z^n}{n!}e^{z\zeta}$,则$f(\zeta)$在 ζ 平面上解析

$\therefore$ $\displaystyle f^{(n)}(z')=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z')^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$ $\therefore$ $\displaystyle f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{z^n}{n!}e^{z\zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta^{n+1}}=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{z^n e^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$

$\because$ $f^{(n)}(\zeta)=\dfrac{z^n}{n!}\cdot z^n e^{z\zeta}$ $\therefore$ $f^{(n)}(0)=\dfrac{(z^n)^2}{n!}$

$\therefore$ $\displaystyle\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{z^n e^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}=\frac{(z^n)^2}{n!}$ $\therefore$ $\displaystyle\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^n e^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$

□

13 **设**

$$f(z)=\int_{|\zeta|=3}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,$$

求 $f'(1+i)$.

Proof.

$\because$ 设$g(z)=3z^2+7z+1$,则 $g(z)$ 在复平面上解析

$\therefore$ 由柯西公式有 $\displaystyle g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=3}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi i}f(z)$

$\therefore \quad f(z)=2\pi i g(z) \qquad \therefore \quad f'(z)=2\pi i g'(z)$

$\because \quad g'(z)=6z+7 \qquad \therefore \quad g'(1+i)=6(1+i)+7=13+6i$

$\therefore \quad f'(1+i)=2\pi i(13+6i)=2\pi(-6+13i)=-12\pi+26\pi i$

□

14 **通过计算**

$$\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{z} \ (n=1,2,\cdots),$$

证明

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta \mathrm{d}\theta=2\pi\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}.$$

Proof.

设$z=e^{i\theta} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$,则$\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\int_0^{2\pi}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^{2n}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}\mathrm{d}\theta=2^{2n}i\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta$

$\because \quad \int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\int_{|z|=1}\frac{\left(z^2+1\right)^{2n}}{z^{2n+1}}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{(2n)!}[(z^2+1)^{2n}]^{(2n)}\Big|_{z=0}$

$\because \quad (z^2+1)^{2n}=z^{4n}+C_{2n}^{2n-1}z^{2(2n-1)}+\cdots+C_{2n}^{1}z^2+C_{2n}^{0}$

$\therefore \quad [(z^2+1)^{2n}]^{(2n)}=c_1z^{2n}+c_2z^{2n-2}+\cdots+c_{n-1}z^2+c_n$

$\therefore \quad [(z^2+1)^{2n}]^{(2n)}\Big|_{z=0}=c_n=2n(2n-1)\cdots 1\cdot C_{2n}^{n}=\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^2$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{z}&=\frac{2\pi i}{(2n)!}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^2\\&=2\pi i\frac{(2n)!}{(n!)^2}\\&=\frac{\pi i 2^{n+1}(2n-1)!!}{n!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta&=\frac{1}{2^{2n}i}\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{z}\\&=\frac{1}{2^{2n}i}\cdot\frac{\pi i 2^{n+1}(2n-1)!!}{n!}\\&=2\pi\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\end{aligned}$$

□

15 **如果在 $|z|<1$ 内，$f(z)$ 解析，并且**

$$|f(z)|\leqslant\frac{1}{1-|z|},$$

证明

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e(n+1)! \quad (n=1,2,\cdots).$$

Proof.

$$\text{设 } C: |z| = \frac{n}{n+1} \quad (\forall n \in N_+)$$

$\because$ $f(z)$在 $|z|<1$ 内解析 $\quad\therefore$ $f^{(n)}(0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$

$\because$ $|f(z)| \leqslant \dfrac{1}{1-|z|}$

$$\begin{aligned}\therefore\quad |f^{(n)}(0)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z\right| \\ &\leqslant \left|\frac{n!}{2\pi i}\right| \frac{\dfrac{1}{1-\dfrac{n}{n+1}}}{(\dfrac{n}{n+1})^{n+1}} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= (n+1)!\frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= (n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &< e(n+1)!\end{aligned}$$

□

16 **如果 $f(z)$ 在 $|z-z_0|>r_0$ 内解析，并且 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = A$, 那么对任何正数 $r>r_0$，**

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}z = A,$$

在这里 K_r 是圆 $|z-z_0|=r$，积分是按反时针方向取的.
本题是关于含无穷远点的区域的柯西定理.

Proof.

$\because$ $\dfrac{1}{z-z_0}$在 $|z-z_0|>r_0$ 解析 $\quad\therefore$ $\displaystyle\int_{K_r}\frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = 2\pi i$

$\therefore$ $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}z - A = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}\left[f(z)-\frac{A}{z-z_0}\right]\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_r}\frac{zf(z)-A-z_0f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$

$\because$ $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = A \quad\therefore$ $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0 \quad\therefore$ $\lim\limits_{z\to\infty}[zf(z)-A-z_0f(z)] = 0$

$\therefore$ $\forall\varepsilon>0, \exists R>r_0+|z_0|$, $s.t.$ 当 $|z|>R$ 时，有 $|zf(z)-A-z_0f(z)|<\varepsilon$

$\therefore$ 当 $r'>|z_0|+R$ 即当 $r'>r_0+2|z_0|$ 时，有

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{K'_r} f(z)\mathrm{d}z - A\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{r'}}\left[\frac{zf(z)-A-z_0f(z)}{z-z_0}\right]\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{r'}\cdot 2\pi r' = \varepsilon$$

$\therefore$ $\lim\limits_{r'\to+\infty}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{K_{r'}} f(z)\mathrm{d}z = A$

$\because$ $\forall r>r_0, \exists r'>\max\{r_0+2|z_0|, r\}, K_r, K_{r'}$ 围成复连通区域

$\therefore$ 由柯西定理有 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{r'}} f(z)\mathrm{d}z$

$\therefore \quad \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{K_r} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{r'\to+\infty} \dfrac{1}{2\pi i}\int_{K_{r'}} f(z)\mathrm{d}z = A$

□

17 如果函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 的外区域 D 内及 C 上每一点解析. 并且

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \alpha,$$

那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} -f(z)+\alpha & (\text{当 } z\in D \text{ 时}), \\ \alpha & (\text{当 } z\in C \text{ 的内区域时}), \end{cases}$$

这里沿 C 的积分是按反时针方向取的.
本题是关于含无穷远点的区域的柯西公式.

Proof.

$\because \quad \forall z\in D, \exists R_0 > |z| \geqslant 0,\ s.t.\ z$ 与 C 均在圆周K_{R_0}中.$f(z)$ 在 C 与 K_{R_0} 所围成区域及边界上解析

$\therefore \quad$ 由柯西公式有 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C^-} \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi + \dfrac{1}{2\pi i}\int_{K_{R_0}} \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$ 其中 C^- 与 C 反向

$\therefore \quad \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = -\dfrac{1}{2\pi i}\int_{C^-} \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = -f(z) + \dfrac{1}{2\pi i}\int_{K_{R_0}} \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$

设 $F(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$, 则 $F(\xi)$ 在 $|\xi| \geqslant R_0$ 上解析

$\because \quad \displaystyle\lim_{z\to\infty} f(z) = \alpha \quad \therefore \quad \lim_{\xi\to\infty} \xi F(\xi) = \lim_{\xi\to\infty} \dfrac{f(\xi)}{1-\dfrac{z}{\xi}} = \alpha \quad \therefore$ 由第 16 题有 $\forall R \geqslant R_0$, $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\xi|=R} F(\xi)\mathrm{d}\xi = \alpha$

$\therefore \quad$ 由柯西定理有 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{K_{R_0}} F(\xi)\mathrm{d}\xi = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R} F(\xi)\mathrm{d}\xi = \alpha$

$\therefore \quad \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = -f(z) + \alpha$

$\because \quad \forall z\in D^c, \exists R_0 : |z| > R_0 > 0,\ s.t.\ z$ 在圆周K_{R_0}内.$\dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$在 C 与 K_{R_0} 所围成区域及边界上解析

$\therefore \quad$ 由柯西定理有 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{K_{R_0}} \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \alpha$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} -f(z)+\alpha & (\text{当 } z\in D \text{ 时}), \\ \alpha & (\text{当 } z\in C \text{ 的内区域时}), \end{cases}$$

□

18 如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，并且不等于零，那么
(1) $\exists g(z)$ 在 D 内解析，使得 $e^{g(z)} = f(z)$;
(2) 对于整数 $q \geqslant 2, \exists h(z)$ 在 D 内解析，使得 $[h(z)]^q = f(z)$.

Proof.

(1) $\because$ $f(z)$在 D 内解析且不等于 0 $\quad\therefore$ $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$在 D 内存在一解析分支 $F(z)$, 则其有原函数 $g_1(z)$

$\therefore$ $[e^{-g_1(z)}f(z)]' = -F(z)e^{-g_1(z)}f(z) + e^{-g_1(z)}f'(z) = 0$

$\therefore$ 由第二章第 4 题 $e^{-g_1(z)}f(z) \equiv c$ $\quad\therefore$ $f(z) = ce^{g_1(z)} = e^{\ln c + g_1(z)}$

$\therefore$ 令$g(z) = g_1(z) + c$,则 $e^{g(z)} = f(z)$

(2) $\because$ $f(z)$在 D 内解析且不等于 0 $\quad\therefore$ $\dfrac{1}{q}[f(z)]^{\frac{1}{q}-1}$在 D 内存在一解析分支 $F(z)$, 则其有原函数$h_1(z)$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad [h_1(z)]^{-q}f(z)' &= -q\cdot h_1'(z)[h_1(z)]^{-q-1}f(z) + [h_1(z)^{-q}]f'(z) \\
&= -q\frac{1}{q}\{[f(z)]^{\frac{1}{q}-1}\}'[h_1(z)]^{-q-1}f(z) + [h_1(z)]^{-q}f'(z) \\
&= -[f(z)]^{\frac{1}{q}-1}[h_1(z)]^{-q-1}f'(z) + [h_1(z)]^{-q}f'(z) \\
&= -[h_1(z)]^{-q}f'(z) + [h_1(z)]^{-q}f'(z) = 0
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $[h_1(z)]^{-q}f(z) \equiv c$ $\quad\therefore$ $f(z) = c[h_1(z)]^p = [c^{\frac{1}{p}}h_1(z)]^p$

$\therefore$ 令$h(z) = c^{\frac{1}{p}}h_1(z)$,则$[h(z)]^q = f(z)$

□

19 设 $P(z)$ 是一个 $n(n \geqslant 1)$ 次多项式，并且 $P(z) = 0$ 的根全部在区域 D 内，在这里 D 的边界是一条简单闭合曲线. 设 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析.

(1) 令

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{P(t)}\frac{P(t)-P(z)}{t-z}\mathrm{d}t \quad (z \in D),$$

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{P(t)}\frac{\mathrm{d}t}{t-z} \quad (z \in D).$$

证明 $R(z)$ 是次数不超过 $n-1$ 的一个多项式，并且 $Q(z)$ 在 D 内解析.

(2) 证明 $\forall z \in D$,

$$f(z) = P(z)Q(z) + R(z).$$

如果在 D 内解析的函数 $Q_1(z)$ 及次数不超过 $n-1$ 的多项式 $R_1(z)$ 满足

$$f(z) = P(z)Q_1(z) + R_1(z),$$

那么

$$Q(z) \equiv Q_1(z), R(z) \equiv R_1(z).$$

Proof.

(1) $\because$ $P(t) - P(z)$是 $t-z$ 的 $n(n \geqslant 1)$ 次多项式 $\quad\therefore$ $\dfrac{P(t)-P(z)}{t-z}$是关于 $t-z$ 的 $n-1$ 次多项式

$\therefore$ $\dfrac{P(t)-P(z)}{t-z}$是关于 z 的 $n-1$ 次多项式 $\quad\therefore$ $R(z)$是次数不超过 $n-1$ 的多项式

$\because$ $P(z)$是次数为 n 的多项式 $\quad\therefore$ $P(t)(t-z)$是关于 t 的次数不超过 $n+1$ 的多项式

$\therefore$ 由代数基本定理有 $\dfrac{1}{P(t)(t-z)}=\sum\limits_{i=1}^{n+1}\dfrac{c_i}{t-z_i}\quad(z_i\in D, z_{n+1}=z)$

$\because$ 由柯西公式有 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\dfrac{f(t)}{t-z_i}\mathrm{d}t=f(z_i)\qquad\therefore\quad Q(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_if(z_i)+c_{n+1}f(z)$在 D 内解析

(2) $\forall z\in D,\ P(z)Q(z)+R(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C P(z)\dfrac{f(t)}{P(t)}\dfrac{\mathrm{d}t}{t-z}+\dfrac{1}{2\pi i}\int_C\dfrac{f(t)}{P(t)}\dfrac{P(t)-P(z)}{t-z}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2\pi i}\int_C\dfrac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t$

$\because$ $f(z)$在 $\overline{D}$ 上解析 $\qquad\therefore\quad f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\dfrac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t=P(z)Q(z)+R(z)$

$\because$ $f(z)=P(z)Q(z)+R(z),\ f(z)=P(z)Q_1(z)+R_1(z)$

$\therefore$ $0=P(z)[Q(z)-Q_1(z)]+[R(z)-R_1(z)]\qquad\therefore\quad P(z)[Q(z)-Q_1(z)]=R_1(z)-R(z)$

$\because$ $R_1(z)-R(z)$是次数不超过 $n-1$ 的多项式,$P(z)$ 是次数为 n 的多项式,$Q(z)-Q_1(z)$ 在 D 内解析

$\therefore$ $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\{P(z)[Q(z)-Q_1(z)]\}=\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}[R_1(z)-R(z)]=0$

$\therefore$ $Q^{(n)}(z)-Q_1^{(n)}(z)=0\qquad\therefore\quad Q(z)-Q_1(z)$是次数不超过 $n-1$ 的多项式

$\therefore$ 当 $Q(z)-Q_1(z)\neq 0$ 时,$P(z)[Q(z)-Q_1(z)]$是次数不少于 n 的多项式;

当 $Q(z)-Q_1(z)=0$ 时，$P(z)[Q(z)-Q_1(z)]=0$

$\because$ $P(z)[Q(z)-Q_1(z)],R_1(z)-R(z)$次数相同 $\qquad\therefore\quad Q(z)-Q_1(z)=R_1(z)-R(z)=0$

$\therefore$ $Q(z)\equiv Q_1(z),R(z)\equiv R_1(z)$

□

4 级数

小结

1. 简单函数的幂级数展开

1). 指数函数 e^z

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

2). 对数函数 $\mathrm{Ln}(1+z)$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots$$

这里取 $z=0$ 时取值为 0 的解析分支

3). 幂函数 $(1+z)^\alpha$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \binom{\alpha}{2} z^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} z^n + \cdots$$

这里

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}$$

4). 三角函数 $\sin z, \cos z$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \cdots$$

$k = 0, 1, 2\cdots$

习题四

1 设已给复数序列 $\{z_n\}$. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \xi$, 其中 ξ 是一有限复数，那么

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} = \xi.$$

Proof.

证法一

设 $z_n = x_n + iy_n\ (n = 1, 2\cdots),\ \xi = x + iy.$

$\because \quad \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \xi \qquad \therefore \quad \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x,\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = x,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = y$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(x_1 + iy_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_n + iy_n)}{n}$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\\
&= x+iy\\
&= \xi
\end{aligned}
$$

证法二

$\because\quad \lim_{n\to+\infty} z_n=\xi \qquad \therefore\quad \forall\varepsilon>0,\exists N_1\in N_+,\ s.t.$ 当 $n\geqslant N_1$ 时,$|z_n-\xi|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

$\because\quad$ 对上述$\varepsilon,\exists N_2\in N_+,\ s.t.$ 当 $n>N_2$ 时,$\dfrac{|z_1-\xi|+|z_2-\xi|+\cdots+|z_{N_1}-\xi|}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad \left|\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}-\xi\right| &= \left|\frac{(z_1-\xi)+(z_2-\xi)+\cdots+(z_n-\xi)}{n}\right|\\
&\leqslant \frac{|z_1-\xi|+|z_2-\xi|+\cdots+|z_n-\xi|}{n}\\
&= \frac{|z_1-\xi|+|z_2-\xi|+\cdots+|z_{N_1}-\xi|}{n}+\frac{|z_{N_1+1}-\xi|+|z_{N_1+2}-\xi|+\cdots+|z_n-\xi|}{n}\\
&< \frac{|z_1-\xi|+|z_2-\xi|+\cdots+|z_{N_1}-\xi|}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\\
&\leqslant \frac{(z_1-\xi)+(z_2-\xi)+\cdots+(z_{N_1}-\xi)}{n}\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=\xi$$

□

2 **证明：任何有界的复数序列一定有一个收敛的子序列.**

Proof.

设 $z_n=x_n+iy_n$

$\because\quad |z_n|\leqslant M\quad (n\in N_+)\qquad \therefore\quad |x_n|\leqslant|z_n|\leqslant M,|y_n|\leqslant|z_n|\leqslant M$

$\therefore\quad$ 由实数致密性定理 $\{x_n\}$ 有一收敛子列 $\{x_{n_k}\},\lim_{k\to\infty}x_n=x$

$\because\quad |y_{n_k}|\leqslant M\qquad \therefore\quad$ 由实数致密性定理,$\{y_{n_k}\}$ 有一收敛子列 $\{y_{n_{k_j}}\},\lim_{j\to\infty}y_{n_j}=y$

$\therefore\quad \lim_{j\to\infty}z_{n_{k_j}}=\lim_{j\to\infty}(x_{n_{k_j}}+iy_{n_{k_j}})=x+iy,$即有一收敛子序列

□

3 **证明：在两相乘级数中，一个收敛，一个绝对收敛时，第 1 段中所有关于柯西乘积的结果仍成立.**

Proof.

设 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n'$ 收敛，$\sum_{n=1}^{+\infty}z_n''$ 绝对收敛.$\sum_{n=1}^{+\infty}z_n'=\sigma',\sum_{n=1}^{+\infty}z_n''=\sigma''$. 记$S_m=\sum_{n=1}^{m}(z_1'z_n''+z_2'z_{n-1}''+\cdots+z_n'z_1'')$

$\therefore \quad \exists M>0,\ s.t.\ \forall k\in N_+,\quad \begin{cases} |z_1'+z_2'+\cdots+z_k'|<M \\ |z_1''|+|z_2''|+\cdots+|z_k''|<M \end{cases}$ (1)

$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\ s.t.\ \forall k>N,\forall p\in N_+,\ \begin{cases} |z_{k+1}'+z_{k+2}'+\cdots+z_{k+p}'|<\varepsilon \\ ||z_{k+1}''|+|z_{k+2}''|+\cdots+|z_{k+p}''||<\varepsilon \end{cases}$ (2)

$\therefore$ 在 (2) 中令 $p\to\infty$, 可见当 $k>N$ 时, $\begin{cases} |\sigma'-\sum\limits_{n=1}^{k} z_n'|\leqslant\varepsilon \\ |\sigma''-\sum\limits_{n=1}^{k} z_n''|\leqslant\varepsilon \end{cases}$ (3)

$\therefore$ 当 $m=2k-1(k\in N_+)$ 时,

$$S_m-\sum_{n=1}^{[\frac{m}{2}]}z_n'\sum_{n=1}^{[\frac{m}{2}]}z_n''=z_1''(z_{[\frac{m}{2}]+1}'+z_{[\frac{m}{2}]+2}'+\cdots+z_m')+z_2''(z_{[\frac{m}{2}]+1}'+z_{[\frac{m}{2}]+2}'+\cdots+z_{m-1}')+\cdots+z_{[\frac{m}{2}]}''(z_{[\frac{m}{2}]+1}'+z_{[\frac{m}{2}]+2}')$$
$$+z_{[\frac{m}{2}]+1}''(z_1'+z_2'+\cdots+z_{[\frac{m}{2}]+1}')+z_{[\frac{m}{2}]+2}''(z_1''+z_2''+\cdots+z_{[\frac{m}{2}]})+\cdots+z_m''z_1'$$

当 $m=2k(k\in N_+)$ 时,

$$S_m-\sum_{n=1}^{[\frac{m}{2}]}z_n'\sum_{n=1}^{[\frac{m}{2}]}z_n''=z_1''(z_{[\frac{m}{2}]}'+z_{[\frac{m}{2}]+2}'+\cdots+z_m')+z_2''(z_{[\frac{m}{2}]+1}'+z_{[\frac{m}{2}]+1}'+\cdots+z_{m-1}')+\cdots+z_{[\frac{m}{2}]}''z_{[\frac{m}{2}]+1}'$$
$$+z_{[\frac{m}{2}]+1}''(z_1'+z_2'+\cdots+z_{[\frac{m}{2}]+1}')+z_{[\frac{m}{2}]+2}''(z_1''+z_2''+\cdots+z_{[\frac{m}{2}]})+\cdots+z_m''z_1'$$

其中 $[\frac{m}{2}]$ 表示不超过 $\frac{m}{2}$ 的最大整数.

$\therefore$ 由 (1)(2)，当 $m>2N+2$ 时,

$$\left|S_m-\sum_{n=1}^{[\frac{m}{2}]}z_n'\sum_{n=1}^{[\frac{m}{2}]}z_n''\right|<(|z_1''|+|z_2''|+\cdots+|z_{m_1}''|)\varepsilon+|z_{[\frac{m}{2}]+1}''+z_{[\frac{m}{2}]+2}''+\cdots+z_m|M<2M\varepsilon$$

$\therefore$ 由 (1)(2), 当 $m>2N+2$ 时,

$$\begin{aligned}|S_m-\sigma'\sigma''|&\leqslant\left|S_m-\sum_{n=1}^{[\frac{m}{2}]}z_n'\sum_{n=1}^{[\frac{m}{2}]}z_n''\right|+\left|\sum_{n=1}^{[\frac{m}{2}]}z_n'\sum_{n=1}^{[\frac{m}{2}]}z_n''-\sigma'\sigma''\right|\\&<2M\varepsilon+\left|\sum_{n=1}^{[\frac{m}{2}]}z_n'\right|\left|\sum_{n=1}^{[\frac{m}{2}]}z_n''-\sigma''\right|+|\sigma''|\left|\sum_{n=1}^{[\frac{m}{2}]}z_n'-\sigma'\right|\\&<2M\varepsilon+M\varepsilon+M\varepsilon\\&=4M\varepsilon\end{aligned}$$

$\therefore \quad \lim\limits_{m\to\infty}S_m=\sigma'\sigma'' \qquad \therefore \quad \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(z_1'z_n''+z_2'z_{n-1}''+\cdots+z_n'z_1'')=\sigma'\sigma''$

□

4 **证明定理** 2.1 **及** 2.2.

Proof.

(1) $\because\ f_n(z)\rightrightarrows f(z) \qquad \therefore\ \forall\varepsilon,\exists N\in N_+,\ s.t.$ 当 $n>N$ 时,$|f(z)-f_n(z)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\forall z\in E)$

$\because\ \forall z_0\in E,\ f_{N+1}(z)$在 z_0 处连续 $\qquad\therefore\ \exists\delta>0,\ s.t.$ 当 $|z-z_0|<\delta$ 时, $|f_{N+1}(z)-f_{N+1}(z_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore \quad |f(z)-f(z_0)| \leqslant |f(z)-f_{N+1}(z)|+|f_{N+1}(z)-f_{N+1}(z_0)|+|f_{N+1}(z_0)-f(z_0)|<\varepsilon$

$\therefore \quad f(z)$在 z_0 处连续 $\qquad \therefore \quad f(z)$在 E 上连续

(2) $\because \quad f_n(z) \rightrightarrows \varphi(z) \quad (z\in C), f_n(z)$在 C 上连续 $\qquad \therefore$ 由定理 2.1 有 $\varphi(z)$在 C 上连续

$\therefore \quad \forall \varepsilon>0, \exists N\in N_+,\ s.t.$ 当 $n>N$ 时, $|f_n(z)-\varphi(z)|<\dfrac{\varepsilon}{L_C}$

$$\therefore \quad \left|\int_C f_n(z)\mathrm{d}z-\int_C \varphi(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_C [f_n(z)-f(z)]\right| \leqslant \int_C |f_n(z)-\varphi(z)|\mathrm{d}z<\varepsilon$$

$$\therefore \quad \int_C \varphi(z)\mathrm{d}z=\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\mathrm{d}z$$

同理可证对级数成立 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\int_C f_n(z)\mathrm{d}z=\int_C f(z)\mathrm{d}z$

□

5 试求下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^{n^2}z^n$, **其中** $|q|<1$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z^{n!}$；

(3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^p z^n$, **其中** p **是一正整数**；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} [3+(-1)^n]^n z^n$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{n^n}z^n$；

(6) $1+\dfrac{ab}{c}z+\dfrac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2+\cdots+\dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)}z^n+\cdots$,
其中 a,b,c **是复数，但** c **不是零或负整数**.

Proof.

(1) $\because \quad \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|q^{n^2}|}=\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0 \qquad \therefore \quad R=+\infty$

(2) $\because \quad \sqrt[n]{|a_n|}=\begin{cases}1, & n=k!\\ 0, & n\neq k!\end{cases} \quad (k\in N_+) \qquad \therefore \quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1 \qquad \therefore \quad R=1$

(3) $\because \quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^p|}=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^p=1 \therefore \quad R=1$

(4) $\because \quad \sqrt[n]{|a_n|}=3+(-1)^n=\begin{cases}4, & n=2k\\ 2, & n=2k-1\end{cases} \quad (k\in N_+) \qquad \therefore \quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=4 \qquad \therefore \quad R=\dfrac{1}{4}$

(5) $\because \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{1}{e} \qquad \therefore \quad R=e$

(6) 当 a 或 b 是 0 或负整数时，易得收敛半径为 $R=+\infty$

当 a,b 均不是 0 或负整数时，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}\right|=1$, 得$R=1$

□

6 设在 $|z|<R$ 内解析的函数 $f(z)$ 有泰勒展式

$$f(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\cdots+\alpha_n z^n+\cdots,$$

试证：（1）令 $M(r)=\max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f(re^{i\theta})|$. 我们有

$$|\alpha_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n}(\text{柯西不等式}),$$

在这里 $n=0,1,\cdots;0<r<R$.

（2）由（1）证明刘维尔定理.

（3）当 $0\leqslant r<R$ 时，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{+\infty}|\alpha_n|^2 r^{2n}.$$

Proof.

(1) $\because$ 幂级数展式的唯一性, $\alpha_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{r^n}$. 由定理 4.3 的柯西不等式, $\left|\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|\leqslant\dfrac{M(r)}{r^n}$

$\therefore$ $|\alpha_n|\leqslant\dfrac{M(r)}{r^n}$

(2) 设 $f(z)$ 为整函数且有界，即 $f(z)$ 在复平面上解析，且存在 $M>0,\ s.t.\ |f(z)|\leqslant M \quad (z\in C)$

$\because$ 由泰勒定理 $f(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_n z^n+\cdots \quad (z\in C)$

$\therefore$ 由 (1) 有, 当 $n\in N_+$ 时 $|\alpha_n|\leqslant\dfrac{M(r)}{r^n}\leqslant\dfrac{M}{r^n}\to 0 \quad (r\to+\infty)$ $\therefore$ $\alpha_n=0 \quad (n\in N_+)$

$\therefore$ $f(z)\equiv\alpha_0$

(3) $\because$ 闭曲线$|z|=r\subset\{z:|z|<R\}$

$\therefore$ 由幂级数收敛性 $f(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_n z^n+\cdots$在 $|z|=r$ 上一致收敛且绝对收敛

$\therefore$ $\overline{f(z)}=\overline{\alpha_0}+\overline{\alpha_1}\overline{z}+\cdots+\overline{\alpha_n}\overline{z}^n+\cdots$在 $|z|=r$ 上一致收敛且绝对收敛

$\therefore$ $f(z)\overline{f(z)}$在 $|z|=r$ 上一致收敛且绝对收敛

$\therefore$ 在 $|z|=r$ 上有 $|f(z)|^2=f(z)\overline{f(z)}$

$$\begin{aligned}&=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n z^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\overline{\alpha_n}\overline{z}^n\right)\\&=\sum_{n,m\in N}\alpha_n\overline{\alpha_m}z^n\overline{z}^m\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}|\alpha_n|^2|z|^{2n}+\sum_{n\neq m}\alpha_n\overline{\alpha_m}z^n\overline{z}^m\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}|\alpha_n|^2r^{2n}+\sum_{n\neq m}r^{n+m}\alpha_n\overline{\alpha_m}z^{n-m}\end{aligned}$$

$\therefore$ 令 $z=re^{i\theta}$, 则 $|f(re^{i\theta})|^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2r^{2n}+\sum\limits_{n\neq m}r^{n+m}\alpha_n\overline{\alpha_m}e^{i(n-m)\theta}$ 在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛且绝对收敛

$\because$ $\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)\theta}\mathrm{d}\theta=0$ $\therefore$ $\int_0^{2\pi}\sum\limits_{n\neq m}r^{n+m}\alpha_n\overline{\alpha_m}e^{i(n-m)\theta}\mathrm{d}\theta=\sum\limits_{n\neq m}r^{n+m}\alpha_n\overline{\alpha_m}\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)\theta}\mathrm{d}\theta=0$

$$\therefore \quad \int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta = 2\pi\sum_{n=0}^{+\infty}|\alpha_n|^2r^{2n} \qquad \therefore \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}|\alpha_n|^2r^{2n}$$

□

7 **证明：如果在** $|z|<r$ **上及** $|z|<\rho$ **内，我们分别有**

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n \text{ 及 } g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n,$$

其中 $0<r,\rho<+\infty$, **而且** $f(z)$ **在** $|z|\leqslant r$ **上连续，那么在** $|z|<\rho r$ **内,**

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nb_nz^n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}f(\zeta)g\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}.$$

Proof.

$\because$ 当 $|\zeta|=r$，$|z|<\rho r$ 时,$\left|\frac{z}{\zeta}\right|<\rho$

$\therefore$ $g\left(\frac{z}{\zeta}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n$在 $|\zeta|=r$ 上绝对一致收敛

$\because$ $f(z)$在 $|z|\leqslant r$ 上连续 $\quad\therefore$ $|f(\zeta)|\leqslant M$在 $|\zeta|=r$ 上有界 $\quad\therefore$ $\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|\leqslant\frac{M}{r}$在 $|\zeta|=r$ 上有界

$\therefore$ $f(\zeta)g\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta}=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}z^n$在 $|\xi|=r$ 上一致收敛

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}f(\zeta)g\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}z^n\mathrm{d}\zeta\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}f^{(n)}(0)b_nz^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nb_nz^n\end{aligned}$$

□

8 **设** z **是任一复数，证明** $|e^z-1|\leqslant e^{|z|}-1\leqslant|z|e^{|z|}$.

Proof.

$$\begin{aligned}|e^z-1|&=\left|z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right|\\&\leqslant|z|+\frac{|z|^2}{2!}+\frac{|z|^3}{3!}+\cdots\\&=\left(1+|z|+\frac{|z|^2}{2!}+\frac{|z|^3}{3!}+\cdots\right)-1\\&=e^{|z|}-1\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \cdots \\
&= |z|\left(1 + \frac{|z|}{2!} + \frac{|z|^2}{3!} + \cdots\right) \\
&\leqslant |z|\left(1 + |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \cdots\right) \\
&= |z|e^{|z|}
\end{aligned}
$$

□

9 求下列解析函数或多值函数的解析分支在 $z=0$ 的泰勒展式：
（1）$\sin^2 z$;（2）$e^z\cos z$；（3）$\frac{1}{2}\left(\mathrm{Ln}\frac{1}{1-z}\right)^2$；
（4）$(2-z)^{\frac{3}{4}}$；（5）$\tan z$（计算到 z^5 的系数）.

Proof.

$$
\begin{aligned}
(1)\quad \sin^2 z &= \frac{1}{2}(1-\cos(2z)) \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}z^{2n}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n} \qquad (|z| < +\infty)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\quad e^z\cos z &= \frac{1}{2}[e^{(1+i)z} + e^{(1-i)z}] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{n!}z^n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{2\cdot n!}z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n(e^{\frac{n\pi}{4}i} + e^{-\frac{\pi}{4}i})}{2\cdot n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^2}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}z^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)\quad &\because \quad F(z) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Ln}\frac{1}{1-z}\right)^2 \text{在 } z=0 \text{ 处取值为 } 0 \text{ 的解析分支在 } |z|<1 \text{ 内解析} \\
&\therefore \quad F'(z) = -\frac{1}{1-z}\mathrm{Ln}(1-z),\ \sum_{n=0}^{\infty}z^n, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}z^{n+1}\text{在 } |z|<1 \text{ 内绝对收敛} \\
&\qquad\qquad = \sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}z^{n+1} \\
&\qquad\qquad = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right)z^{n+1} \\
&\qquad\qquad = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)z^n \\
&\therefore \quad F(z) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Ln}\frac{1}{1-z}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$= \int \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) z^n \mathrm{d}z$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) z^{n+1}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right) z^n \qquad (|z|<1)$$

(4) $(2-z)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} \left(1-\frac{z}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$

$$= 2^{\frac{3}{4}} \left[1+\frac{\frac{3}{4}}{1}\left(-\frac{z}{2}\right)+\frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)}{2!}\left(-\frac{z}{2}\right)^2+\cdots\right]$$
$$= 2^{\frac{3}{4}} \left[1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{3\cdot(-1)\cdot(-5)\cdots(7-4n)}{4^n n!} z^n\right] \qquad (|z|<2)$$

(5) $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$

$$= \frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots}{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (|z|<\frac{\pi}{2})$$

$$\therefore \quad z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots = \sin z = \cos z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \left[1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right] \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$\therefore \quad \text{比较系数有} \begin{cases} 0 = 1\cdot a_0 \\ 1 = 1\cdot a_1 \\ 0 = 1\cdot a_2 - \frac{1}{2!}a_0 \\ -\frac{1}{3!} = 1\cdot a_3 - \frac{1}{2!}a_1 \\ 0 = 1\cdot a_4 - \frac{1}{2!}a_2 + \frac{1}{4!}a_0 \\ \frac{1}{5!} = 1\cdot a_5 - \frac{1}{2!}a_3 + \frac{1}{4!}a_1 \\ \quad \vdots \end{cases} \qquad \therefore \quad \tan z = z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\cdots \qquad (|z|<\frac{\pi}{2})$$

□

10 **设** $f(z)$ **是一整函数，并且假定存在一个正整数** n**，以及两个正数** R **及** M**，使得当** $|z|>R$ **时，**

$$|f(z)| \leqslant M|z|^n.$$

证明 $f(z)$ **是一个至多** n **次的多项式或一常数.**

Proof.

$\because \quad f(z)$是整函数 $\quad \therefore \quad$ 由泰勒展开 $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \qquad (|z|<\infty)$

$\because \quad \exists n \in N_+, R>0, M>0,\ s.t.\ \forall z \in \{z : |z|>R\},\ |f(z)| < M|z|^n$

$\therefore\quad \forall R_1>R$,作圆 $C_{R_1}:|z|=R_1$, $\quad |a_k|=\left|\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_{R_1}}\dfrac{f(\xi)}{\xi^{k+1}}\mathrm{d}\xi\right|\leqslant\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{MR_1^n}{R_1^{k+1}}\cdot 2\pi R_1=MR_1^{n-k}$

$\therefore\quad$ 当$k>n$时, $\lim\limits_{R_1\to\infty}MR_1^{n-k}=0\qquad\therefore\quad a_k=0\quad(k>n)$

$\therefore\quad f(z)=\sum\limits_{m=1}^{n}a_mz^m\qquad\therefore\quad f(z)$是一个至多 n 次的多项式或一常数

□

11 **证明**：$\forall z\in C,\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z.$

Proof.

$$\because\quad \forall z\in C, n\mathrm{Ln}\left(1+\frac{z}{n}\right)=n\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\left(\frac{z}{n}\right)^m=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\frac{z^m}{n^{m-1}}\to z\quad(n\to\infty)$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}e^{n\mathrm{Ln}\left(1+\frac{z}{n}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}n\mathrm{Ln}\left(1+\frac{z}{n}\right)}=e^z$$

□

12 **求下列解析函数或多值函数的解析分支在指定区域内的洛朗展式:**

(1)$\dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$ **在** $0<|z|<1$ **内;**

(2)$\dfrac{1}{(z^5-1)(z-3)}$ **在** $1<|z|<3$ **内;**

(3)$\sin\dfrac{z}{z-1}$ **在** $0<|z-1|<1$ **内;**

(4)$e^{\frac{z}{z+2}}$ **在** $2<|z|<+\infty$ **内;**

(5)$\dfrac{1}{z^\alpha(1+z)}$ **在** $0<|z+1|<1$ **内，其中** $0<\alpha<1, z^\alpha(1^\alpha=1)$;

(6)$\dfrac{\mathrm{Ln}z}{z^2-1}$ **在** $0<|z-1|<1$ **及** $0<|z+1|<1$ **内，**$\ln z(\ln 1=0)$.

Proof.

(1) $\because\quad \dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$在 $0<|z|<1$ 内解析

$$\therefore\quad \frac{e^z}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nz^{2n}\right]$$

$$=\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{(-1)^n+1^n}{2}z^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{\frac{k}{2}}\frac{(-1)^k+1}{2}\cdot\frac{1}{(n-k)!}\right]z^{n-1}\qquad(0<|z|<1)$$

(2) $$\because\quad \frac{1}{(z^5-1)(z-3)}=\frac{1}{242}\cdot\frac{1}{z-3}-\frac{1}{242}\cdot\frac{z^4}{z^5-1}-\frac{3}{242}\cdot\frac{z^3}{z^5-1}-\frac{3^2}{242}\cdot\frac{z^2}{z^5-1}-\frac{3^3}{242}\cdot\frac{z}{z^5-1}-\frac{3^4}{242}\cdot\frac{1}{z^5-1}$$

在 $1<|z|<3$ 内解析

$$\frac{1}{242}\cdot\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{242}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{242}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}=-\frac{81}{242}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^{n+5}}$$

$$-\frac{1}{242}\cdot\frac{z^4}{z^5-1}=-\frac{1}{242}z^4\cdot\frac{1}{z^5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z^5}}=\frac{1}{242}z^4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{5(n+1)}}=-\frac{81}{242}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^4}\cdot\frac{1}{z^{5(n+1)-4}}$$

$$-\frac{3}{242}\cdot\frac{z^3}{z^5-1}=-\frac{3}{242}z^3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{5(n+1)}}=-\frac{81}{242}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{z^{5(n+1)-3}}$$

$$-\frac{3^2}{242}\cdot\frac{z^2}{z^5-1}=-\frac{3^2}{242}z^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{5(n+1)}}=-\frac{81}{242}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^2}\frac{1}{z^{5(n+1)-2}}$$

$$-\frac{3^3}{242}\cdot\frac{z}{z^5-1}=-\frac{3^3}{242}z\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{5(n+1)}}=-\frac{81}{242}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3}\frac{1}{z^{5(n+1)-1}}$$

$$-\frac{3^4}{242}\cdot\frac{z}{z^5-1}=-\frac{3^4}{242}z\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{5(n+1)}}=-\frac{81}{242}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{5(n+1)}}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{(z^5-1)(z-3)}=-\frac{81}{242}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^{n+5}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{z^{5(n+1)-k}}\right)\right]\qquad(1<|z|<3)$$

(3) $\because$ $\sin\frac{z}{z-1}=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z-1}$ 在 $0<|z-1|<1$ 内解析

$$\cos\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2n}}$$

$$\sin\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}$$

$$\therefore\quad \sin\frac{z}{z-1}=\sin 1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2n}}+\cos 1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin\left(1+\frac{2n\pi}{2}\right)}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2n}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin\left(1+\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}\frac{1}{(z-1)^n}\qquad(0<|z-1|<1)$$

(4) $\because$ $e^{\frac{z}{z+2}}$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内解析

$$\therefore\quad e^{\frac{z}{z+2}}=e^{\frac{1}{1+\frac{2}{z}}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(1+\frac{2}{z}\right)^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left[1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}\cdot\left(\frac{2}{z}\right)^k\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}\frac{2^k}{z^k}$$

$$=e+\sum_{n=1}^{+\infty}2^k\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{n!}\binom{n+k-1}{k}\right]z^{-n}\qquad(2<|z|<+\infty)$$

(5) $\because$ $\frac{1}{z^\alpha(1+z)}$在 $0<|z+1|<1$ 内解析

$$\frac{1}{z^\alpha}=\frac{1}{(-1)^\alpha}\frac{1}{[1-(z+1)]^\alpha}$$

$$=\left|\frac{1}{1}\right|^{\alpha}e^{-i\alpha\arg z}[1-(z+1)]^{-\alpha}$$

$$=e^{-\pi\alpha i}\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\binom{-\alpha}{n}(z+1)^n\right]$$

$$\therefore\quad \frac{1}{z^{\alpha}(1+z)}=e^{-\pi\alpha i}\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\binom{-\alpha}{n}(z+1)^n\right]\frac{1}{1+z}$$

$$=e^{-\pi\alpha i}\left[\frac{1}{1+z}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\binom{-\alpha}{n}(z+1)^{n-1}\right]$$

(6) $\because\quad \frac{\mathrm{Ln}z}{z^2-1}$在 $0<|z-1|<1$ 内解析x $\qquad \frac{\ln z}{z^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\ln z}{z-1}-\frac{\ln z}{z+1}\right)\qquad(\ln 1=0)$

$$\frac{\ln z}{z-1}=\frac{\ln[1+(z-1)]}{z-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{n+1}$$

$$\frac{\ln z}{z+1}=\frac{1}{2+(z-1)}\cdot\ln[1+(z-1)]$$

$$=\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n\right]\left[\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}(z-1)^{n+1}\right]$$

$$\overset{\text{柯西乘积}}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}(z-1)^{k+1}\cdot(-1)^{n-k}\frac{1}{2^{n-k+1}}(z-1)^{n-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)2^{n-k+1}}\right](z-1)^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)2^{n-k}}\right](z-1)^n$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{Ln}z}{z^2-1}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{n+1}-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)2^{n-k}}\right](z-1)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{n+1}-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)2^{n-k}}\right](z-1)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)2^{n-k}}\right](z-1)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)2^{n-k}}\right](z-1)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{(k+1)}\right](z-1)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{(k+1)}\right](z-1)^n\qquad(0<|z-1|<1)$$

$\because\quad \frac{\mathrm{Ln}z}{z^2-1}$在 $0<|z+1|<1$ 内解析 $\qquad \frac{\ln z}{z^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\ln z}{z-1}-\frac{\ln z}{z+1}\right)$

$$\frac{\ln z}{z+1}=\frac{\ln[-1+(z+1)]}{z+1}=\frac{\ln(-1)+\ln[1-(z+1)]}{z+1}=\frac{\pi i}{z+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+1)^n}{n+1}$$

$$\frac{\ln z}{z-1} = \frac{1}{-2+(z-1)} \cdot \ln[-1+(z+1)]$$

$$= \left[-\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n\right]\left[\pi i - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}(z+1)^{n+1}\right]$$

$$\overset{\text{柯西乘积}}{=} -\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}(z+1)^{k+1} \cdot \frac{1}{2^{n-k+1}}(z+1)^{n-k}$$

$$= -\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)2^{n-k+1}}\right](z+1)^{n+1}$$

$$= -\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)2^{n-k}}\right](z+1)^{n}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{Ln} z}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left\{-\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)2^{n-k}}\right](z+1)^n - \frac{\pi i}{z+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+1)^n}{n+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}(z+1)^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{(k+1)}\right](z-1)^n\right\} \qquad (0<|z+1|<1)$$

□

13 **问下列各函数有哪些孤立奇点？各属于哪一种类型？**

(1) $\dfrac{z-1}{z(z^2+4)}$； (2) $\cot z$；

(3) $\dfrac{1}{\sin z - \sin\alpha}$, **其中 α 是一常数；** (4) $\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$；

(5) $\sin\dfrac{1}{z-1}$； (6) $\dfrac{\tan(z-1)}{z-1}$.

Proof.

(1) $\dfrac{z-1}{z(z^2+4)}$的孤立奇点是$0, \pm 2i, \infty$

$\because$ 0 是 $\dfrac{z(z^2+4)^2}{z-1}$ 的一阶零点，$\pm 2i$ 是 $\dfrac{z(z^2+4)^2}{z-1}$ 的二阶零点,$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z-1}{z(z^2+4)^2}=0$

$\therefore$ 0是 $\dfrac{z-1}{z(z^2+4)^2}$ 的一阶极点,$\pm 2i$ 是 $\dfrac{z-1}{z(z^2+4)^2}$ 的二阶极点,∞ 是 $\dfrac{z-1}{z(z^2+4)^2}$ 的可去奇点

(2) $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$的孤立奇点是$z = n\pi \quad (n\in Z)$

$\because$ $n\pi$是$\dfrac{\sin z}{\cos z}$的一阶零点$\therefore$ $n\pi \quad (n\in Z)$是 $\cot z$ 的一阶极点

$\because$ $\lim\limits_{z\to\infty} n\pi = \infty \qquad \therefore$ ∞ 不是 $\cot z$ 的孤立奇点

(3) $\dfrac{1}{\sin z - \sin\alpha}$ 的孤立奇点有 $2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha, \quad (k\in Z)$

当$\alpha = m\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$时

$\because$ $2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha$ 是 $\sin z - \sin\alpha$ 的二阶零点

$\therefore$ $2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha$ 是 $\dfrac{1}{\sin z - \sin\alpha}$ 的二阶极点

当$\alpha \neq m\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$时

$\because\quad 2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha$ 是 $\sin z-\sin\alpha$ 的一阶零点

$\therefore\quad 2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha$ 是 $\dfrac{1}{\sin z-\sin\alpha}$ 的一阶极点

$\because\quad \lim\limits_{n\to\infty} 2k\pi+\alpha=\infty \qquad \therefore\quad \infty$不是孤立奇点

(4) 可能的极点有 $1, 2n\pi i\ (n\in N), \infty$

$\because\quad z=0$是$e^{\frac{1}{z}}$本质奇点 $\qquad \therefore\quad z=1$是 $\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$ 本质奇点

$\because\quad 2n\pi i\ (n\in N)$是$\dfrac{e^z-1}{e^{\frac{1}{z-1}}}$1 阶零点 $\qquad \therefore\quad 2n\pi i\ (n\in N)$是$\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$1 阶极点

$\because\quad \lim\limits_{n\to+\infty} 2n\pi i=+\infty \qquad \therefore\quad z=\infty$不是孤立奇点

(5) $\sin\dfrac{1}{z-1}$的孤立奇点有$1,\infty$

$\because$ 存在无穷个负整数 n, 使得$\alpha_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_p}\frac{\sin\frac{1}{\zeta-1}}{(\zeta-1)^n}\mathrm{d}\zeta\neq 0 \qquad \therefore\quad 1$是 $\sin\dfrac{1}{z-1}$ 的本质奇点

$\because\quad \lim\limits_{z\to\infty}\sin\dfrac{1}{z-1}=0 \qquad \therefore\quad \infty$是可去奇点

(6) $\dfrac{\tan(z-1)}{z-1}=\dfrac{\sin(z-1)}{(z-1)\cos(z-1)}$的孤立奇点有$1,\ 1+\dfrac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in Z)$

$\because$ 存在无穷个负整数 n, 使得$\alpha_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_p}\frac{\frac{\tan(\zeta-1)}{\zeta-1}}{(\zeta-1)^n}\mathrm{d}\zeta\neq 0 \qquad \therefore\quad 1$是 $\dfrac{\tan(z-1)}{z-1}$ 的本质奇点

$\because\quad 1+\dfrac{\pi}{2}+k\pi$是 $\dfrac{(z-1)\cos(z-1)}{\sin(z-1)}$ 的一阶零点 $\qquad \therefore\quad 1+\dfrac{\pi}{2}+k\pi$是 $\dfrac{\tan(z-1)}{z-1}$ 的一阶极点

$\because\quad \lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=\infty \qquad \therefore\quad \infty$不是孤立奇点

□

14 **证明：在扩充平面上只有一个一阶极点的解析函数 $f(z)$ 必有下面的形式：**

$$f(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0.$$

Proof.

设 z_0 是 $f(z)$ 在扩充平面 C_∞ 上的唯一的一个一阶极点

当 $z_0=\infty$ 时:

$\because\quad z_0$是 $f(z)$ 唯一的一个一阶极点 $\qquad \therefore\quad f(z)$ 在 ∞ 的主要部分为 $a_1 z \quad (a_1\neq 0)$

$\therefore\quad f(z)-a_1 z$ 在 C 解析且以 ∞ 为可去奇点 $\qquad \therefore\quad f(z)-a_1 z=a_0$

$\therefore\quad f(z)=a_1 z+a_0=\dfrac{a_1 z+a_0}{0\cdot z+1}, \quad a_1\cdot 1-a_0\cdot 0=a_1\neq 0$

当 $z_0\neq\infty$ 时:

$\because\quad z_0$是 $f(z)$ 唯一的一个一阶极点 $\qquad \therefore\quad f(z)$ 在 z_0 的主要部分为 $\dfrac{a_1}{z-z_0} \quad (a_1\neq 0)$

$\therefore\quad f(z)-\dfrac{a_1}{z-z_0}$ 在 $C_\infty\setminus\{z_0\}$ 解析且以 z_0 为可去奇点 $\qquad \therefore\quad f(z)-\dfrac{a_1}{z-z_0}=a_0$

$\therefore \quad f(z)=\dfrac{a_1}{z-z_0}+a_0=\dfrac{a_0z+(a_1-z_0a_0)}{1\cdot z-z_0}, \quad a_0\cdot(-1)-(a_1-z_0a_0)\cdot 1=a_1\neq 0$

□

15 **设函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 解析，并且它不恒等于常数. 试证 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 阶零点的必要与充分条件是: $z=z_0$ 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点.**

Proof.

必要性

$\because \quad z_0$是 $f(z)$ 的 m 阶零点

$\therefore \quad \exists R_1>0,\ s.t.\ f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots \quad (0<|z-z_0|<R_1, a_m\neq 0)$

设 $\varphi(z)=a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots$, 则 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析，$\varphi(z_0)\neq 0$

$\therefore \quad \dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{1}{(z-z_0)^m\varphi(z)}=\dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}, \qquad$ 其中$\psi(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$在 z_0 解析，$\psi(z)\neq 0$

$\therefore \quad \exists R_2>0,\ s.t.\ \psi(z)=\psi(z_0)+\psi'(z_0)(z-z_0)+\cdots \quad (0<|z-z_0|<R_2)$

$\therefore \quad \dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{\psi(z_0)}{(z-z_0)^m}+\dfrac{\psi'(z_0)}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots \qquad (0<|z-z_0|<\min\{R_1,R_2\}, \psi(z_0)\neq 0)$

$\therefore \quad z=z_0$是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点

充分性

$\because \quad z=z_0$是 $f(z)$ 的 m 阶极点

$$\therefore \quad \exists R_1>0,\ s.t.\ f(z)=\frac{a_m}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots$$
$$=\frac{1}{(z-z_0)^m}[a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots] \quad (0<|z-z_0|<R_1, a_m\neq 0)$$

设 $\psi(z)=a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots$, 则 $\psi(z)$ 在 z_0 解析，$\psi(z_0)\neq 0$

$\therefore \quad f(z)=(z-z_0)^m\dfrac{1}{\psi(z)}=(z-z_0)^m\varphi(z) \qquad$ 其中$\varphi(z)=\dfrac{1}{\psi(z)}$在 z_0 解析,$\varphi(z_0)\neq 0$

$\therefore \quad \exists R_2>0,\ s.t.\ \varphi(z)=\varphi(z_0)+\varphi'(z_0)(z-z_0)+\cdots \quad (0<|z-z_0|<R_2)$

$\therefore \quad f(z)=\varphi(z_0)(z-z_0)^m+\varphi'(z_0)(z-z_0)^{m+1}+\cdots \quad (0<|z-z_0|<\min\{R_1,R_2\}, \varphi(z_0)\neq 0)$

$\therefore \quad z=z_0$是 $f(z)$ 的 m 阶零点

□

16 **设函数 $f(z)$ 及 $g(z)$ 满足下列条件之一:**
(1)$f(z)$ 及 $g(z)$ 在 z_0 分别有 m 阶及 n 阶零点;
(2)$f(z)$ 及 $g(z)$ 在 z_0 分别有 m 阶及 n 阶极点;
(3)$f(z)$ 在 z_0 解析或有极点，不恒等于零，$g(z)$ 在 z_0 有孤立本质奇点.
试问: $f(z)+g(z), f(z)g(z)$ 及 $\dfrac{g(z)}{f(z)}$ 在 z_0 具有什么性质?

Proof.

(1) $\because$ $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 z_0 分别有 m 阶及 n 阶零点

$\therefore$ $f(z)=(z-z_0)^m\varphi_1(z),\quad g(z)=(z-z_0)^n\varphi_2(z),\qquad \varphi_1(z),\varphi_2(z)$在 z_0 解析，且$\varphi_1(z)\neq 0,\varphi_2(z)\neq 0$

$$\therefore\quad f(z)+g(z)=\begin{cases}(z-z_0)^m[\varphi_1(z)+(z-z_0)^{n-m}\varphi_2(z)], & m<n\\ (z-z_0)^n[(z-z_0)^{m-n}\varphi_1(z)+\varphi_2(z)], & m>n\\ (z-z_0)^n[\varphi_1(z)+\varphi_2(z)], & m=n\end{cases}$$

$\therefore$ 当 $m<n$ 时,z_0 为 $f(z)+g(z)$ 的 m 阶零点

当 $m>n$ 时,z_0 为 $f(z)+g(z)$ 的 n 阶零点

当 $m=n$ 时,z_0 为 $f(z)+g(z)$ 的至少 $m=n$ 阶零点或 $f(z)+g(z)\equiv 0$

$\because$ $f(z)g(z)=(z-z_0)^{m+n}\varphi_1(z)\varphi_2(z)\qquad \varphi_1(z)\varphi_2(z)\neq 0$

$\therefore$ z_0 是 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点

$$\because\quad \frac{g(z)}{f(z)}=\begin{cases}(z-z_0)^{n-m}\dfrac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)}, & m<n\\ \dfrac{1}{(z-z_0)^{m-n}}\dfrac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)}, & m>n\\ \dfrac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)}, & m=n\end{cases}$$

$\therefore$ 当 $m<n$ 时，z_0 为 $\dfrac{g(z)}{f(z)}$ 的 $n-m$ 阶零点

当 $m>n$ 时，z_0 为 $\dfrac{g(z)}{f(z)}$ 的 $m-n$ 阶极点

当 $m=n$ 时，z_0 为 $\dfrac{g(z)}{f(z)}$ 的可去奇点

(2) $\because$ $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 z_0 分别有 m 阶及 n 阶极点

$\therefore$ $f(z)=\dfrac{\varphi_1(z)}{(z-z_0)^m},\quad g(z)=\dfrac{\varphi_2(z)}{(z-z_0)^n},\qquad \varphi_1(z),\varphi_2(z)$在 z_0 解析，且$\varphi_1(z)\neq 0,\varphi_2(z)\neq 0$

$$\therefore\quad f(z)+g(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{(z-z_0)^m}[\varphi_1(z)+(z-z_0)^{m-n}\varphi_2(z)], & m>n\\ \dfrac{1}{(z-z_0)^n}[\varphi_1(z)+(z-z_0)^{n-m}\varphi_2(z)], & m<n\\ \dfrac{1}{(z-z_0)^m}[\varphi_1(z)+\varphi_2(z)], & m=n\end{cases}$$

$\therefore$ 当 $m>n$ 时,z_0 为 $f(z)+g(z)$ 的 m 阶极点

当 $m<n$ 时,z_0 为 $f(z)+g(z)$ 的 n 阶极点

当 $m=n$ 时,z_0 为 $f(z)+g(z)$ 的不超过 $m=n$ 阶极点或可去奇点

$\because$ $f(z)g(z)=\dfrac{\varphi_1(z)\varphi_2(z)}{(z-z_0)^{m+n}}\qquad \varphi_1(z)\varphi_2(z)\neq 0\qquad\therefore\quad z_0$为 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 阶极点

$$\because \quad \frac{g(z)}{f(z)} = \begin{cases} \frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{n-m}}, & m < n \\ \frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)} \cdot (z-z_0)^{m-n}, & m > n \\ \frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)}, & m = n \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $m < n$ 时,z_0 为 $\frac{g(z)}{f(z)}$ 的 $n-m$ 阶极点

当 $m > n$ 时,z_0 为 $\frac{g(z)}{f(z)}$ 的 $m-n$ 阶零点

当 $m = n$ 时,z_0 为 $\frac{g(z)}{f(z)}$ 的可去奇点

(3) $\because$ $g(z)$在 z_0 有孤立本质奇点 $\quad \therefore$ $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$不存在有限或无穷极限

$\because$ 若 $f(z)$ 在 z_0 有极点, 则$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ $\quad \varphi(z)$在 z_0 解析且$\varphi(z_0) \neq 0$

$\therefore$ $f(z)+g(z), f(z)g(z), \frac{g(z)}{f(z)}$在 z_0 不解析

$\because$ 若$f(z)$在 z_0 解析, 则$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

$\therefore$ $f(z)+g(z), f(z)g(z), \frac{g(z)}{f(z)}$在 z_0 不存在无限或无穷极限

反证：假设z_0不是 $f(z)+g(z), f(z)g(z), \frac{g(z)}{f(z)}$ 的本质奇点, 则z_0是 $f(z)+g(z), f(z)g(z), \frac{g(z)}{f(z)}$ 的可去奇点或极点

$\therefore$ 由 (1)(2) 有 z_0 是 $g(z)$ 的可去奇点或极点

矛盾，故 z_0 是 $f(z)+g(z), f(z)g(z), \frac{g(z)}{f(z)}$ 的本质奇点

□

17 **设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析. 证明：如果对某一点 $z_0 \in D$, 有**

$$f^{(n)}(z_0) = 0,\ n = 1, 2, \cdots,$$

那么，$f(z)$ 在 D 内为常数.

Proof.

$\because$ $f(z)$在 D 内解析

$\therefore$ 存在 $z_0 \in D$ 的某领域 $U(z_0) \subset D$，在 $U(z_0)$ 有泰勒展式 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z-z_0)^n = f(z_0) \quad (z \in U(z_0))$

$\therefore$ 由解析函数唯一性定理得 $\quad f(z) \equiv f(z_0) \quad (z \in D)$

□

18 **问是否存在满足下列条件，并且在原点解析的函数** $f(z)$?

(1)$f\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)=0,\ f\left(\dfrac{1}{2n}\right)=\dfrac{1}{2n}$;

(2)$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n+1}$;

(3)$f\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)=f\left(\dfrac{1}{2n}\right)=\dfrac{1}{2n}$,

在这里 $n=1,2,\cdots$.

Proof.

(1) $\because$ $\left\{\dfrac{1}{2n-1}\right\},\left\{\dfrac{1}{2n}\right\}$的聚点均为 0

$\therefore$ 由解析函数唯一性定理有$f(z)=z$是在原点解析且满足 $f\left(\dfrac{1}{2n}\right)=\dfrac{1}{2n}$ 的唯一函数, 但 $f\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)\neq 0$

$\therefore$ 不存在满足所给条件的函数

(2) $\because$ $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$以 0 为聚点,$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}$

$\therefore$ 由解析函数唯一性定理有$f(z)=\dfrac{z}{1+z}$是在原点解析并满足所给条件的唯一函数

(3) $\because$ $\left\{\dfrac{1}{2n-1}\right\},\left\{\dfrac{1}{2n}\right\}$的聚点均为 0

$\therefore$ 由解析函数唯一性定理有$f(z)=z$是在原点解析且满足 $f\left(\dfrac{1}{2n}\right)=\dfrac{1}{2n}$ 的唯一函数, 但 $f\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)\neq\dfrac{1}{2n}$

$\therefore$ 不存在满足所给条件的函数

□

19 **函数** $\sin\dfrac{1}{1-z}$ **的零点** $1-\dfrac{1}{n\pi}(n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$ **所组成的集有聚点** 1**，但这函数不恒等于** 0. **问这与解析函数的唯一性是否相矛盾?**

Proof.

$\because$ $f(z)=\sin\dfrac{1}{1-z}$在 $z=1$ 处不解析 $\therefore$ 不满足解析函数唯一性定理的条件

$\therefore$ 无法确定 $f(z)\equiv 0$ $\therefore$ 不矛盾

□

20 **设区域** D **内含有一段实轴，又设函数** $u(x,y)+iv(x,y)$ **及**

$$u(z,0)+iv(z,0)$$

都在 D **内解析. 求证：在** D **内，**

$$u(x,y)+iv(x,y)=u(z,0)+iv(z,0).$$

Proof.

令 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y), g(z)=u(z,0)+iv(z,0)$

$\because$ $f(z),g(z)$在 D 内解析,$f(x)=g(x) \quad (\forall x\in R)$,$x$在 R 上稠密

$\therefore$ 由解析函数唯一性定理有$f(z)\equiv g(z) \quad (z\in D)$

□

21 按照下列步骤，证明整函数 $f(z)$ 可以写成下列形式：

$$f(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z(z-1)+\alpha_3 z^2(z-1)+\cdots+\alpha_{2k}z^k(z-1)^k+\alpha_{2k+1}z^{k+1}(z-1)^k+\cdots, \qquad (*)$$

其中 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 是复常数.

(1) 用 $r(\rho)$ 表示圆 $|z|=\rho$, 其中 $\rho>1$.

a）证明：对于 $k=1,2,\cdots$, 积分

$$\int_{r(\rho)}\frac{f(w)\mathrm{d}w}{w^k(w-1)^k}$$

的值与 ρ 无关；取极限求出它的值. 同样计算

$$\int_{r(\rho)}\frac{f(w)\mathrm{d}w}{w^{k+1}(w-1)^k}\text{及}\int_{r(\rho)}\frac{\mathrm{d}w}{w^k(w-1)^{k+1}}.$$

b）设整函数 $f(z)$ 的展式（*）在 C 中任何紧集上一致收敛. 证明：对于 $k\in N$,（*）的系数可由下列积分给出：

$$\alpha_{2k}=\frac{1}{2\pi i}\int_{r(\rho)}\frac{\mathrm{d}w}{w^{k+1}(w-1)^k},$$

$$\alpha_{2k+1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{r(\rho)}\frac{\mathrm{d}w}{w^k(w-1)^{k+1}}.$$

(2) a）如果 α_{2k} 及 α_{2k+1} 由（1）b) 中公式给出，那么对于 $|z|<\rho$,

$$f(z)-\alpha_0-\alpha_1 z-\cdots-\alpha_{2k}z^k(z-1)^k-\alpha_{2k+1}z^{k+1}(z-1)^k=\frac{1}{2\pi i}z^{k+1}(z-1)^{k+1}\int_{r(\rho)}\frac{\mathrm{d}w}{w^{k+1}(w-1)^{k+1}}.$$

把上式右边记作 $R_k(z)$.

b）设 D_r 表示圆心在 O、半径为 r 的圆盘. 证明：对任意整数 r，当 $k\to+\infty$ 时，$R_k(z)$ 在 D_r 上一致趋于零.

(3) 最后证：整函数 $f(z)$ 有（*）形的展式，这一展式是唯一的，并且在 C 中任何紧集上一致收敛.

Proof.

(1) $a)$ $\because$ $\dfrac{1}{w_k(w-1)^k}$在 $|w|>1$ 解析 $\quad\therefore\quad \forall\rho_0>\rho>1,\displaystyle\int_{r(\rho)}\frac{\mathrm{d}w}{w^k(w-1)^k}=\int_{r(\rho_0)}\frac{\mathrm{d}w}{w^k(w-1)^k}$

$\because$ $\displaystyle\lim_{w\to\infty}w\cdot\frac{1}{w^k(w-1)^k}=0 \quad (k\in N_+)$ $\quad\therefore\quad$ 由第 3 章 16 题，令 $\rho_0\to+\infty$, 有 $\displaystyle\lim_{\rho_0\to+\infty}\int_{r(\rho_0)}\frac{\mathrm{d}w}{w^k(w-1)^k}=0$

$\therefore$ $\displaystyle\int_{r(\rho)}\frac{\mathrm{d}w}{w^k(w-1)^k}=0$

同理可得 $\displaystyle\int_{r(\rho)}\frac{\mathrm{d}w}{w^{k+1}(w-1)^k}=\int_{r(\rho)}\frac{\mathrm{d}w}{w^k(w-1)^{k+1}}=0$

$b)$ $\because$ 整函数 $f(z)$ 的展式（*）在 C 中任何紧集上一致收敛 $\therefore$ $(*)$在 $r(\rho)$ 上一致收敛

$$\because \quad \left|\frac{1}{w^{k+1}(w-1)^k}\right| \leqslant \frac{1}{\rho_{k+1}(\rho-1)^k}, \quad \left|\frac{1}{w^{k+1}(w-1)^{k+1}}\right| \leqslant \frac{1}{\rho_{k+1}(\rho-1)^{k+1}}$$

$$\therefore \quad \frac{f(w)}{w^{k+1}(w-1)^k} = \alpha_0\frac{1}{w^{k+1}(w-1)^k} + \alpha_1\frac{1}{w^k(w-1)^k} + \cdots + \alpha_{2k}\frac{1}{w} + \alpha_{2k+1} + \cdots$$

$$\frac{f(w)}{w^{k+1}(w-1)^{k+1}} = \alpha_0\frac{1}{w^{k+1}(w-1)^{k+1}} + \alpha_1\frac{1}{w^k(w-1)^{k+1}} + \cdots + \alpha_{2k}\frac{1}{w(w-1)} + \alpha_{2k+1}\frac{1}{w} + \cdots$$

$\therefore$ 逐项积分，并由 (1) 有 $\alpha_{2k} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{r(\rho)} \frac{f(w)\mathrm{d}w}{w^{k+1}(w-1)^k}$， $\alpha_{2k+1} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{r(\rho)} \frac{f(w)\mathrm{d}w}{w^k(w-1)^{k+1}}$

(2) $a)$ 当$k=0$时 $f(z)-\alpha_0-\alpha_1 z = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{r(\rho)}\frac{f(w)d\mathrm{d}w}{w-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{r(\rho)}\frac{f(w)d\mathrm{d}w}{w} - \frac{z}{2\pi i}\int_{r(\rho)}\frac{f(w)d\mathrm{d}w}{w(w-1)}$

$$= \frac{z(z-1)}{2\pi i}\int_{r(\rho)}\frac{f(w)d\mathrm{d}w}{(w-z)w(w-1)}$$

假设对 $k\in N$, 成立

$$f(z)-\alpha_0-\alpha_1 z-\cdots-\alpha_{2k}z^k(z-1)^k-\alpha_{2k+1}z^{k+1}(z-1)^k = \frac{1}{2\pi i}z^{k+1}(z-1)^{k+1}\int_{r(\rho)}\frac{f(w)\mathrm{d}w}{w^{k+1}(w-1)^{k+1}}$$

则对 $k+1$, 有 $f(z)-\alpha_0-\alpha_1 z-\cdots-\alpha_{2k+2}z^{k+1}(z-1)^{k+1}-\alpha_{2k+3}z^{k+2}(z-1)^{k+1}$

$$= \frac{1}{2\pi i}z^{k+1}(z-1)^{k+1}\int_{r(\rho)}\frac{f(w)\mathrm{d}w}{w^{k+1}(w-1)^{k+1}} - \frac{1}{2\pi i}\int_{r(\rho)} z^{k+1}(z-1)^{k+1}\frac{f(w)\mathrm{d}w}{w^{k+2}(w-1)^{k+1}} -$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{r(\rho)} z^{k+2}(z-1)^{k+1}\frac{f(w)\mathrm{d}w}{w^{k+2}(w-1)^{k+2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{r(\rho)} z^{k+2}(z-1)^{k+2}\frac{f(w)\mathrm{d}w}{(w-z)w^{k+2}(w-1)^{k+2}}$$

$\therefore$ 由数学归纳法，结论成立

$b)$ $\forall r>0, \exists \rho > r+1, D_r \subset \{z : |z| \leqslant \rho\}$

$\because$ $f(z)$是整函数 $\therefore$ $|f(z)| \leqslant M(\rho)$ $(z\in\{z:|z|\leqslant\rho\})$

$\because$ $\forall z\in D_r$, $|z|^{k+1}|z-1|^{k+1} \leqslant r^{k+1}(r+1)^{k+1}$

$$\forall w\in r(\rho), \ \left|\frac{1}{w^{k+1}(w-1)^{k+1}}\right| \leqslant \frac{1}{|w|^{k+1}(|w|-1)^{k+1}} \leqslant \frac{1}{\rho^{k+1}(\rho-1)^{k+1}}$$

$$\therefore \quad |R_k(z)| = \frac{1}{2\pi}|z|^{k+1}|z-1|^{k+1}\left|\int_{r(\rho)}\frac{f(w)\mathrm{d}w}{w^{k+1}(w-1)^{k+1}}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}r^{k+1}(r+1)^{k+1}\frac{M(\rho)}{\rho^{k+1}(\rho-1)^{k+1}}2\pi\rho$$

$$= \rho M(\rho)\left(\frac{r}{\rho-1}\right)^{k+1}\left(\frac{r+1}{\rho}\right)^{k+1} \to 0 \qquad (k\to+\infty)$$

(3) $\because$ C中任意紧集是有界闭集 $\therefore$ 存在 $D_r \supset E$

$\therefore$ 由 (1)(2) 有整函数 $f(z)$ 在 D_r 上有 (*) 形的展式且内闭一致收敛, 且系数由 (1)b) 确定

□

22 **设** $\{\alpha_n\}(n\in N)$ **是一复数序列**.

(1) 设 $\alpha_1=1$, 并且 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n|\alpha_n|\leqslant 1$. 证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n$ 的收敛半径 $\geqslant 1$, 并且它的和 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n$ 是在单位圆盘内确定的单射.
(2) 设 $\alpha_1\neq 0$. 证明：如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n$ 的收敛半径不是零，那么 $\exists r>0$, 使得级数和是在 $|z|<r$ 内确定的单射.
(3) 设函数 $g(z)$ 在一点 z_0 的领域内解析，并且 $g'(z_0)\neq 0$, 那么 $g(z)$ 是在 z_0 的一个领域内确定的单射.

Proof.

(1) $\because\quad \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n|\alpha_n|=|\alpha_1|+\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n|\alpha_n|\leqslant 2 \qquad \therefore\quad \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n z^{n-1}$在 $z=1$ 绝对收敛

$\therefore\quad \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n z^{n-1}$在 $|z|<1$ 内闭一致收敛 $\qquad\therefore\quad$ 逐项积分, 得 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n$在 $|z|<1$ 内闭一致收敛

$\therefore\quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n$收敛半径大于等于 1 $\qquad\therefore\quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n$在 $|z|<1$ 绝对收敛

$\because\quad \forall z_1,z_2\in\{z:|z|<1\}, z_1\neq z_2,\ |f(z_1)-f(z_2)|\geqslant |z_1-z_2|\left[1-\sum\limits_{n=2}^{+\infty}|\alpha_n||z_1^{n-1}+z_1^{n-2}z_2+\cdots+z_2^{n+1}|\right]$

$$>|z_1-z_2|\left(1-\sum_{n=2}^{+\infty} n|\alpha_n|\right)\geqslant 0$$

$\therefore\quad f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n$ 在 $|z|<1$ 是单射

(2) $\because\quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n$的收敛半径 $\rho>0$, 在 $|z|<\rho$ 内 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n$ 及 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n\alpha_n z^{n-1}$ 绝对收敛

$\therefore\quad$ 当 r 充分小时， $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n|\alpha_n|r^{n-1}\leqslant|\alpha_1|$

令$\beta_n=\dfrac{\alpha_n r^n}{\alpha_1 r},\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\beta_n w^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\alpha_n r^n}{\alpha_1 r}w^n$,则$\beta_1=1,\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n\left|\dfrac{\alpha_n r^n}{\alpha_1 r}\right|=\dfrac{\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n|\alpha_n|r^{n-1}}{|\alpha_1|}\leqslant 1$

$\therefore\quad$ 由 (1) 有$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\beta_n w^n$在 $|w|<1$ 内一致收敛且是单射

$\therefore\quad$ 令 $z=rw$ 有 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n$在 $|z|<r$ 内是单射

(3) $\because\quad g(z)$在 z_0 解析 $\qquad\therefore\quad \exists\rho_0>0,\ s.t.\ g(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\quad (|z-z_0|<\rho_0)$

$\therefore\quad$ 令 $w=z-z_0$, 有 $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{g^{(n)}(z_0)}{n!}w^n=h(w)\quad(|w|<\rho_0)$. 令 $\alpha_n=\dfrac{g^{(n)}(z_0)}{n!}$.

$\because\quad \alpha_1=g'(z_0)\neq 0, h(w)$收敛半径不为 0 $\qquad\therefore\quad$ 由 (2) 有，$\exists r_0\in(0,\rho_0), h(w)$ 在 $|w|<r_0$ 内为单射

$\therefore\quad g(z)$ 在 $|z-z_0|<r_0$ 内为单射

□

5 留数

小结

留数的计算

1). z_0

$f(z)$ 在 $r_1 < |z| < r_2$ 内有洛朗展开.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z-z_0)^n \qquad \mathrm{Res}(f, z_0) = \alpha_{-1}$$

$$= \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k} \qquad \mathrm{Res}(f, z_0) = \beta_{k-1}$$

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n (z-z_0)^n \qquad \mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}[(z-z_0)^k f(z)]}{\mathrm{d}z^{k-1}}$$

2). ∞

$f(z)$ 在 $r_1 < |z| < +\infty$ 内有洛朗展开.

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f, \infty) &= -\alpha_{-1} \\ &= -\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}, 0\right]\end{aligned}$$

留数基本定理

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_k) \qquad (z_i \in D)$$

$$\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \left[\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_k) + \mathrm{Res}(f, \infty)\right] \qquad (z_i \in D)$$

若 $f(z)$ 在 $\overline{C}$ 上只有有限个奇点，则

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0 \qquad (z_i \in C)$$

习题五

1 试求下列各解析函数或多值函数的解析分支在指定各点的留数:

(1) $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$, 在 $z = \pm i$;　(2) $\dfrac{1}{1-e^z}$, 在 $z = 2n\pi i, n$ 为整数;

(3) $\dfrac{\sqrt{z}}{1-z}$, 在 $z = 1$;　(4) $\sin\dfrac{1}{z-1}$, 在 $z = 1$.

Proof.

(1) $\because$ $z = \pm i$是 $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$ 的二阶极点

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \mathrm{Res}(f,i) &= \lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-i)^2 f(z)\right]\\
&= \lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2}{(z+i)^2}\right]\\
&= \lim_{z\to i}\frac{2iz}{(z+i)^3}\\
&= -\frac{i}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,-i) &= \lim_{z\to -i}\frac{\mathrm{d}}{dz}\left[(z+i)^2 f(z)\right]\\
&= \lim_{z\to -i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2}{(z-i)^2}\right]\\
&= \lim_{z\to -i}\frac{-2iz}{(z-i)^3}\\
&= \frac{i}{4}
\end{aligned}$$

(2) $\because$ $z=2n\pi i(n\in Z)$是 $f(z)=\dfrac{1}{1-e^z}$ 的一阶极点

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \mathrm{Res}(f,2n\pi i) &= \lim_{z\to 2n\pi i}\frac{1}{(1-e^z)'}\\
&= \lim_{z\to 2n\pi i}\frac{1}{-e^z}\\
&= -1
\end{aligned}$$

(3) $\because$ $z=1$是$f(z)=\dfrac{\sqrt{z}}{1-z}$的一阶极点

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \mathrm{Res}(f,1) &= \lim_{z\to 1}\frac{\sqrt{z}}{(1-z)'}\\
&= \lim_{z\to 1}\frac{\sqrt{z}}{-1}\\
&= \mp 1
\end{aligned}$$

取 $\sqrt{1}=1$ 分支时，$\mathrm{Res}(f,1)=-1$; 取 $\sqrt{1}=-1$ 分支时，$\mathrm{Res}(f,1)=1$.

(4) $\because$ $z=1$是 $f(z)=\sin\dfrac{1}{z-1}$ 的本性奇点,$\sin\dfrac{1}{z-1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}\quad(0<|z-1|<+\infty)$

$\therefore$ $\mathrm{Res}(f,1)=\alpha_{-1}=1$

□

2 函数 $\dfrac{\mathrm{Ln}\,z}{z^2-1}$ 的各解析分支在 $z=\pm1$ 各有怎样的孤立奇点？求它们在这些点的留数.

Proof.

(1) $\because$ $(\mathrm{Ln}z)_k=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)\quad k\in Z,\arg 1=0,|z-1|<1$

当 $k=0$ 时,$z=1$ 是 $\dfrac{(\mathrm{Ln}z)_0}{z^2-1}$ 的可去奇点,$\mathrm{Res}(f,1)=\alpha_{-1}=0$

当 $k\neq 0$ 时,$z=1$ 是 $\dfrac{(\mathrm{Ln}z)_k}{z^2-1}$ 的一阶极点

$$\therefore\quad \mathrm{Res}(f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)}{z^2-1}=\lim_{z\to 1}\frac{\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)}{z+1}=k\pi i$$

(2) $\because\quad (\mathrm{Ln}z)_k=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)\quad k\in Z,\arg(-1)=\pi,|z+1|<1,\quad z=-1$是各解析分支的一阶极点

$$\therefore\quad \mathrm{Res}(f,-1)=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)}{z^2-1}=\lim_{z\to -1}\frac{\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)}{z-1}=-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i$$

□

3 **计算下列积分：**

(1) $\int_C\frac{z\mathrm{d}z}{(z-1)(z-2)^2}$, **其中** C **是** $|z-2|=\frac{1}{2}$;

(2) $\int_C\frac{e^z\mathrm{d}z}{z^2(z^2-9)}$, **其中** C **是** $|z|=1$;

(3) $\int_C\tan(\pi z)\mathrm{d}z$, **其中** C **是** $|z|=n(n=1,2,3,\cdots)$.

Proof.

(1) $\because\quad f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$在 $C:|z-2|=\dfrac{1}{2}$ 围成区域内只有二阶极点 $z=2$

$$\mathrm{Res}(f,2)=\lim_{z\to 2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-2)^2f(z)\right]=\lim_{z\to 2}\frac{-1}{(z-1)^2}=-1$$

$$\therefore\quad \int_C\frac{z\mathrm{d}z}{(z-1)(z-2)^2}=2\pi i\mathrm{Res}(f,2)=-2\pi i$$

(2) $\because\quad f(z)=\dfrac{e^z\mathrm{d}z}{z^2(z^2-9)}$在 $C:|z|=1$ 围成区域内只有二阶极点 $z=0$

$$\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-2)^2f(z)\right]=\lim_{z\to 0}\frac{e^z(z^2-2z-9)}{(z^2-9)^2}=-\frac{1}{9}$$

$$\therefore\quad \int_C\frac{e^z\mathrm{d}z}{z^2(z^2-9)}=2\pi i\mathrm{Res}(f,0)=-\frac{2}{9}\pi i$$

(3) $\because\quad f(z)=\tan(\pi z)$在 $|z|=n$ 围成区域内只有 $2n$ 个一阶极点:$\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{3}{2},\cdots,\pm\dfrac{2n-1}{2}$

$$\mathrm{Res}\left(f,\frac{k}{n}\right)=\lim_{z\to\frac{k}{n}}\frac{\sin(\pi z)}{[\cos(\pi z)]'}=-\frac{1}{\pi}\quad k=\pm1,\pm2,\cdots,\pm2n-1$$

$$\therefore\quad \int_C\tan(\pi z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\left[\mathrm{Res}\left(f,\frac{2k-1}{n}\right)+\mathrm{Res}\left(f,-\frac{2k-1}{n}\right)\right]=-4ni$$

□

4 **设函数** $f(z)$ **在区域** $r_0<|z|<\infty$ **内解析，**C **表示圆**

$$|z|=r(0<r_0<r).$$

我们把积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C^-}f(z)\mathrm{d}z$$

定义为函数 $f(z)$ **在无穷远点的留数，记作** $\mathrm{Res}(f,\infty)$, **在这里积分中的** C^- **表示积分是沿着** C **按顺时针方向取的. 试证明：如果** α_{-1} **表示** $f(z)$ **在**

$$r_0<|z|<+\infty$$

内的洛朗展式中 $\frac{1}{z}$ 的系数，那么

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\alpha_{-1}.$$

Proof.

$\because \quad f(z)$在 $r_0<|z|<\infty$ 内解析 $\qquad \therefore \quad z=\infty$是 $f(z)$ 的孤立奇点

$\because \quad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \quad (r<|z|<\infty)$在 C 上一致收敛

$\therefore \quad$ 沿 C^- 逐项积分得 $\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z=\alpha_{-1}\int_{C^-}\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\alpha_{-1}2\pi i$

$\therefore \quad \mathrm{Res}(f,\infty)=-\alpha_{-1}$

□

5 **试求下列函数在无穷远点的留数：**

(1) $\frac{1}{z}$; $\qquad$ (2) $e^{\frac{1}{z}}$; $\qquad$ (3) $\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}$.

Proof.

(1) $\quad \mathrm{Res}(f,\infty)=-\alpha_{-1}=-1$

(2) $\quad \because \quad e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!z^n} \quad (0<|z|<\infty)$

$\therefore \quad \mathrm{Res}(f,\infty)=-\alpha_{-1}=-1$

(3) $\quad \because \quad \frac{1}{(z^5-1)(z-3)}=\frac{1}{z^6\left(1-\frac{1}{z^5}\right)\left(1-\frac{3}{z}\right)}=\frac{1}{z^6}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^{5n}}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{z^n}\right) \qquad \therefore \quad \alpha_{-1}=0$

$\therefore \quad \mathrm{Res}(f,\infty)=-\alpha_{-1}=0$

□

6 **试把关于留数的基本定理** 1.1 **转移到** D **是扩充复平面上含无穷远点的区域情形.**

Proof.

设 D 是扩充复平面上含无穷远点的区域，其边界 C 是由有限条互不包含也互不相交的简单闭曲线 C_1, $\cdots,C_m$ 组成，$C=C_1+\cdots+C_m$

又设 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上除去孤立奇点 $z_1,\cdots,z_n$ 及无穷远点外解析. 则 $\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\left[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_i)+\mathrm{Res}(f,\infty)\right]$

设 C_0 是一个以原点为心的充分大的圆，使得 $f(z)$ 的所有有限奇点 $z_1,\cdots,z_n$ 以及边界 C 都在 C_0 的内区域内.

$\therefore \quad$ 由留数基本定理有 $\int_{C_0+C^-} f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_i)$

$$\therefore \quad \int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_i)$$

$$\because \quad \mathrm{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0^-} f(z)\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z$$

$$\therefore \quad \int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_i) + \mathrm{Res}(f, \infty) \right]$$

□

7 证明：如果 $f(z)$ 在扩充复平面上除了有限个奇点外，在每一点解析，那么这函数在所有奇点上的留数（包括在无穷远点的留数）之和是零.
用此结果计算积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^5-1)(z-3)}.$$

Proof.

(1) 以原点为圆心作任意圆 C, 使得 $f(z)$ 所有有限奇点 $z_1, \cdots, z_n$ 均在 C 围成区域内，则由留数基本定理有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_i)$$

$$\because \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Res}(f, \infty), \quad \int_C f(z)\mathrm{d}z + \int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_i) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0$$

(2) 记$I = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^5-1)(z-3)}$,则 I 等于 $\dfrac{1}{(z^5-1)(z-3)}$ 在 $|z| = 2$ 内的所有留数之和

$\because \quad I + \mathrm{Res}(f, 3) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0, \quad \mathrm{Res}(f, 3) = \dfrac{1}{3^5-1}, \quad$ 由第 5 题有$\mathrm{Res}(f, \infty) = 0$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{1-3^5} = -\frac{1}{242}$$

□

8 求下列各积分：

(1) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$;

(2) $\int_0^{2\pi} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$，**其中** $0 < a < 1$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x}$，**其中** $a > 0$;

(4) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x$

(5) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$;

(6) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{1-a}}{1+x^2}\mathrm{d}x$，**其中** $0 < a < 2$;

(8) $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\mathrm{d}x$，**其中** $-\pi < a < \pi$;

(9) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\mathrm{d}x$；

(10) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$；

(11) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos x - e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$；

(12) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$，其中整数 $n \geqslant 2$；

(13) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x$；

(14) $\int_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}$；

(15) $\int_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}$；

(16) $\int_C \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+z+z^2}}$，其中被积函数是有关多值函数的任一解析分支，并且积分是沿圆 $|z|=2$ 按反时针方向取的.

Proof.

(1) 设 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$, 则 $f(z)$ 有二阶极点 $\pm i$

$\because$ $\forall r>1, \Gamma_r=\{z:|z|=r, \mathrm{Re}\, z \geqslant 0\}$, i包含在Γ_r和$\{z=x+iy: x\in(-r,r)\}$围成区域中 (Γ_r 取逆时针方向)

$$\therefore \int_{-r}^{r}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}+\int_{\Gamma_r}\frac{z^2\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}=2\pi i\mathrm{Res}(f,i)$$

$$=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-i)^2 f(z)\right]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2}{(z+i)^2}\right]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{2zi}{(z+i)^3}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{-2i\cdot i}{(2i)^3}$$

$$=\frac{1}{2}\pi$$

$$\because \left|\int_{\Gamma_r}\frac{z^2\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}\right|\leqslant \pi r\frac{r^2}{(r^2-1)^2} \qquad \therefore \lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{z^2\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}=0$$

$$\therefore \text{令 } r\to+\infty, \quad \int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{4}\pi$$

(2) 令 $e^{i\theta}=z$, 则 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, $\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$

$$\therefore \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{i(1+a^2)z-ai(z^2+1)}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{i\mathrm{d}z}{az^2-(1+a^2)z+a}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{i\mathrm{d}z}{(az-1)(z-a)}$$

$$=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{i}{(az-1)(z-a)},a\right]$$

$$= 2\pi i \cdot \lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{i}{(az-1)(z-a)}\right]$$
$$= 2\pi i \cdot \lim_{z\to a}\frac{i}{az-1}$$
$$= \frac{2\pi}{1-a^2} \qquad (0<a<1)$$

(3) 令$e^{i\theta}=z$,则$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$,$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x}=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\mathrm{d}x}{2a+1-\cos(2x)}$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2a+1-\cos\theta}$$
$$=2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{-i\mathrm{d}z}{2(2a+1)z-(z^2+1)}$$
$$=2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{i\mathrm{d}z}{[z-(2a+1)+2\sqrt{a^2+a}][z-(2a+1)-2\sqrt{a^2+a}]}$$
$$=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left\{\frac{i}{[z-(2a+1)+2\sqrt{a^2+a}][z-(2a+1)-2\sqrt{a^2+a}]},(2a+1)-2\sqrt{a^2+a}\right\}$$
$$=2\pi i\cdot\lim_{z\to(2a+1)-2\sqrt{a^2+a}}\frac{i}{z-(2a+1)-2\sqrt{a^2+a}}$$
$$=\frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}$$

(4) $\because \quad \forall r>0,\int_0^r\frac{x\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^r\frac{x(e^{ix}-e^{-ix})}{2i(x^2+1)}\mathrm{d}x$
$$=\frac{1}{2i}\int_{-r}^{r}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^2+1}$在 $y\geqslant 0$ 上除一阶极点 $z=i$ 外解析,$\mathrm{Res}(f,i)=\lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{ze^{iz}}{z^2+1}\right]=\lim_{z\to i}\frac{ze^{iz}}{z+i}=\frac{1}{2e}$

取$r>1,\Gamma_r=\{z:|z|=r,\mathrm{Re}\ z\geqslant 0\}$($\Gamma_r$ 取逆时针方向)

$\therefore$ 由留数定理有 $\int_{-r}^{r}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_r}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}\mathrm{d}x=2\pi i\mathrm{Res}(f,i)=\frac{\pi i}{e}$

$\because$ $g(z)=\frac{z}{z^2+1}$在闭区域$0\leqslant \mathrm{Arg}z\leqslant\pi,2\leqslant|z|<+\infty$上连续,$\lim_{z\to+\infty}g(z)=0$

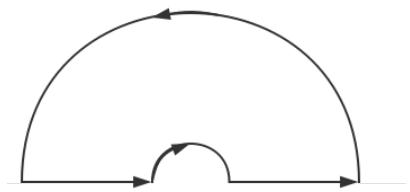
$\therefore$ 由引理 3.1 $\lim_{r\to+\infty}\frac{ze^{iz}}{z^2+1}\mathrm{d}z=0$

$\therefore$ $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2i}\cdot\frac{\pi i}{e}=\frac{\pi}{2e}$

(5) **解法一**

$\because \quad \forall r>0,\int_0^r\frac{\sin x}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x=\int_0^r\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix(x^2+1)}\mathrm{d}x$
$$=\frac{1}{2i}\int_{-r}^{r}\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$$

取$r>1,0<\varepsilon<1,\Gamma_r=\{z:|z|=r,\mathrm{Im}\ z\geqslant 0\}$,则$f(z)=\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$在 $\Gamma_r,\Gamma_\varepsilon,\{z\in R:\varepsilon<|z|<r\}$ 围成区域内只有一阶极点 $z=i$.(Γ_r 取逆时针方向、Γ_ε 取顺时针方向)



$\therefore$ 由留数定理, $\int_{-r}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_r}\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z+\int_{\varepsilon}^{r}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{Res}(f,i)$

$$=2\pi i\cdot\lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\right]$$
$$=2\pi i\cdot\lim_{z\to i}$$
$$=2\pi i\cdot\lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z(z+i)}$$
$$=-\frac{\pi i}{e}$$

$\because$ 由洛朗展开, $\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}+h(z)\qquad(z\neq 0)$, 其中 $h(z)$ 在 $z=0$ 的解析

$\therefore$ $\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z=\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\int_{\Gamma_\varepsilon}h(z)\mathrm{d}z=-\pi i+\int_{\Gamma_\varepsilon}h(z)\mathrm{d}z$

$\because$ $h(z)$在 $z=0$ 解析, 在 $z=0$ 的某邻域 $U(0,\delta)$ 内 $|h(z)|$ 有上界 $M<+\infty$

$\therefore$ 当$\varepsilon<\delta$时, $\left|\int_{\Gamma_\varepsilon}h(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant M\cdot 2\pi\varepsilon$

$\therefore$ $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z=-\pi i$

$\because$ 在 $0\leqslant\mathrm{Arg}\,z\leqslant\pi, r\leqslant|z|<+\infty$ 上, $\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z(z^2+1)}=0$

$\therefore$ 由引理 3.1 $\lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z=0$

$\therefore$ 令 $\varepsilon\to 0, r\to+\infty$, 有 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2i}\int_{-r}^{r}\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2i}\left[-\frac{\pi i}{e}-(-\pi i)-0\right]=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

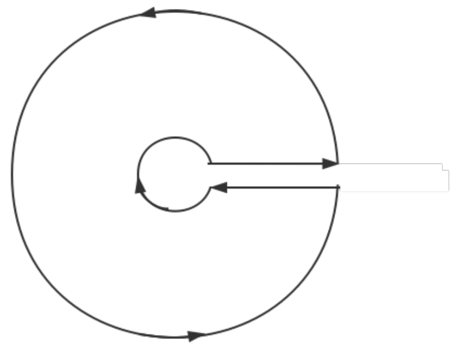
解法二

$\because$ $\frac{\sin x}{x(x^2+1)}=\frac{\sin x}{x}-\frac{x\sin x}{x^2+1}$

$\therefore$ $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2e}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

(6) 在复平面上取正实轴作割线, 在剩余区域内除 $\pm i$ 处, 可把 $\frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{(x^2+1)^2}$ 分成解析函数分支, 取在割线上沿取实值的一分支 $f(z)=\frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}.f(z)$ 在 $\pm i$ 有二阶极点.

作闭曲线 $C(r,\varepsilon)(0<\varepsilon<1<r)$: 从正实轴上沿沿正实轴方向从 ε 到 r, 再从 $z=r$ 出发绕 $\Gamma_r:|z|=r$ 沿逆时针方向转动一周，沿正实轴下沿沿负实轴方向从 r 到 ε, 从 $z=\varepsilon$ 出发绕 $\Gamma_\varepsilon:|z|=\varepsilon$ 沿顺时针方向转动一圈回到原处



$\therefore \quad \int_{C(r,\varepsilon)} \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}, i\right] + 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}, -i\right]$

$\because$ 在正实轴下沿 $(\ln z)^2 = (\ln x + 2\pi i)^2$

$$\therefore \quad \int_{C(r,\varepsilon)} \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \int_{\varepsilon}^{r} \frac{(\ln x)^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_r} \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z + \int_{r}^{\varepsilon} \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z$$

$$= -4\pi i \int_{\varepsilon}^{r} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x + 4\pi^2 \int_{\varepsilon}^{r} \frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_r} \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z$$

$\because \quad \left|\int_{\Gamma_r} \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi r \cdot \frac{(\ln r)^2}{(r^2+1)^2} \to 0 \qquad (r \to +\infty), \qquad \left|\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi\varepsilon \frac{(\ln \varepsilon)^2}{(\varepsilon^2+1)^2} \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0)$

$\therefore \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = 0$

$\therefore$ 令 $\varepsilon \to 0, r \to +\infty$, 有

$$-4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x + 4\pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}, i\right] + 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}, -i\right]$$

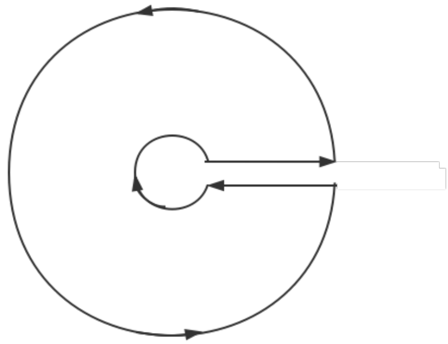
$\because \quad \mathrm{Res}\left[\frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}, i\right] = \lim_{z\to i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-i)^2 \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}\right] = \frac{\pi^2 i - 4\pi}{16}$

$\mathrm{Res}\left[\frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}, -i\right] = \lim_{z\to -i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z+i)^2 \frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}\right] = \frac{12\pi - 9\pi^2 i}{16}$

$\therefore$ 比较实部虚部有 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}$

(7) 在复平面上取正实轴作割线，在剩余区域内处 $z = \pm i$ 处，可把 $\frac{z^{1-a}}{1+z^2}$ 分成解析分支. 取在正实轴上沿取正实值的一分支 $f(z) = \frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}, f(z)$ 在 $\pm i$ 有一阶极点

作闭曲线 $C(r,\varepsilon)(0 < \varepsilon < 1 < r)$: 从正实轴上沿沿正实轴方向从 ε 到 r, 再从 $z = r$ 出发绕 $\Gamma_r : |z| = r$ 沿逆时针方向转动一周，沿正实轴下沿沿负实轴方向从 r 到 ε, 从 $z = \varepsilon$ 出发绕 $\Gamma_\varepsilon : |z| = \varepsilon$ 沿顺时针方向转动一圈回到原处



$\therefore\quad \displaystyle\int_{C(r,\varepsilon)} \frac{x^{1-a}}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\pi i\mathrm{Res}\,(f,i) + 2\pi i\mathrm{Res}\,(f,-i)$

$\because$ 在正实轴下沿 $(z^{1-a})_0 = e^{2(1-a)\pi i}x^{1-a}$

$$\therefore\quad \int_{C(r,\varepsilon)} \frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}\mathrm{d}z = \int_\varepsilon^r \frac{x^{1-a}}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_r}\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}\mathrm{d}z + e^{2(1-a)\pi i}\int_r^\varepsilon \frac{x^{1-a}}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}\mathrm{d}z$$

$$= [1-e^{2(1-a)\pi i}]\int_\varepsilon^r \frac{x^{1-a}}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_r}\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}\mathrm{d}z$$

$$\because\quad \left|\int_{\Gamma_r}\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi r\cdot\frac{r^{1-a}}{(r^2+1)} \to 0 \qquad (r\to+\infty), \qquad \left|\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon^{1-a}}{(\varepsilon^2+1)} \to 0 \qquad (\varepsilon\to 0)$$

$$\therefore\quad \lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}\mathrm{d}z = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}\mathrm{d}z = 0$$

$\therefore$ 令 $\varepsilon\to 0, r\to+\infty$, 有 $\quad [1-e^{2(1-a)\pi i}]\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{1-a}}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\pi i\mathrm{Res}\,(f,i) + 2\pi i\mathrm{Res}\,(f,-i)$

$$\because\quad \mathrm{Res}\,(f,i) = \lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}\right] = -\frac{ie^{\frac{(1-a)\pi}{2}i}}{2}, \qquad \mathrm{Res}\,(f,-i) = \lim_{z\to -i}\left[(z+i)\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}\right] = \frac{ie^{-\frac{3(1-a)\pi}{2}i}}{2}$$

$$\therefore\quad \int_0^{+\infty}\frac{x^{1-a}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-e^{2(1-a)\pi i}}\cdot 2\pi i\cdot\left(-\frac{ie^{\frac{(1-a)\pi}{2}i}}{2} + \frac{ie^{\frac{3(1-a)\pi}{2}i}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{2(1-a)\pi i}}[1-e^{(1-a)\pi i}]\cdot\pi e^{\frac{(1-a)\pi}{2}i}$$

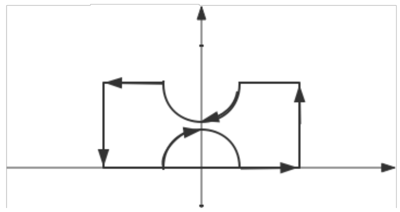
$$= \frac{1}{1+e^{(1-a)\pi i}}\cdot\pi e^{\frac{(1-a)\pi}{2}i}$$

$$= \frac{\pi}{2\cos\dfrac{(1-a)\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2\sin\dfrac{a\pi}{2}}$$

(8) $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\mathrm{d}x \qquad (-\pi<a<\pi)$

从顶点为 $-r, r, -r+i, r+i (r\in R_+)$ 的矩形中挖去 $|z|<\varepsilon_1, |z-i|<\varepsilon_2 (\varepsilon_1+\varepsilon_2<1)$ 得到区域 D, 记边界曲线为 C, 取逆时针方向. 设 $\Gamma_{\varepsilon_1} = \{z : |z| = \varepsilon_1, \mathrm{Im}\ z>0\}, \Gamma_{\varepsilon_2} = \{z : |z| = \varepsilon_2, \mathrm{Im}\ z<1\}$($\Gamma_{\varepsilon_1}$、$\Gamma_{\varepsilon_2}$ 取顺时针方向)



$\because \quad f(z)=\dfrac{e^{az}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}$在 D 中解析

$\therefore \quad$ 由柯西定理有

$$\int_{-r}^{-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon_1}^{r} f(x)\mathrm{d}x+i\int_0^1 f(r+iy)\mathrm{d}y+i\int_1^0 f(-r+iy)\mathrm{d}y+\int_r^{-r} f(x+i)\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_{\varepsilon_1}} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\Gamma_{\varepsilon_2}} f(z)\mathrm{d}z=0$$

$\because \quad \left|i\int_0^1 f(r+iy)\mathrm{d}y\right| \leqslant \dfrac{e^{ar}}{e^{\pi r}-e^{-\pi r}}=\dfrac{1}{e^{(\pi-a)r}-e^{-(\pi+a)r}}\to 0 \qquad (r\to+\infty)$

$\quad\ \ \left|i\int_1^0 f(-r+iy)\mathrm{d}y\right| \leqslant \dfrac{e^{-ar}}{e^{\pi r}-e^{-\pi r}}=\dfrac{1}{e^{(\pi+a)r}-e^{-(\pi-a)r}}\to 0 \qquad (r\to+\infty)$

$\therefore \quad \lim\limits_{r\to+\infty} i\int_0^1 f(r+iy)\mathrm{d}y=\lim\limits_{r\to+\infty} i\int_1^0 f(-r+iy)\mathrm{d}y=0$

$\because \quad f(z)=e^{(\pi+a)z}\dfrac{1}{e^{2\pi z}-1} \qquad \therefore \quad z=0$是 $f(z)$ 的一阶极点,$z=i$ 是 $f(z)$ 的一阶极点

$\therefore \quad \mathrm{Res}(f,0)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{ze^{az}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}=\dfrac{1}{2\pi}, \qquad \mathrm{Res}(f,i)=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{(z-i)e^{az}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}b=-\dfrac{e^{ai}}{2\pi}$

$\therefore \quad$ 当 ε_1 足够小时,$f(z)=\dfrac{1}{2\pi z}+h_1(z) \quad (|z|\leqslant\varepsilon_1)$;当 ε_2 足够小时,$f(z)=-\dfrac{e^{ai}}{2\pi(z-i)}+h_2(z) \quad (|z-i|\leqslant\varepsilon_2)$

其中$h_1(z)$在 $|z|\leqslant\varepsilon_1$ 解析;$h_2(z)$ 在 $|z-i|\leqslant\varepsilon_2$ 解析

$$\int_{C_{\varepsilon_1}} f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_{\varepsilon_1}}\left[\frac{1}{2\pi z}+h_1(z)\right]\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}i+\int_{C_{\varepsilon_1}} h_1(z)\mathrm{d}z$$

$$\int_{C_{\varepsilon_2}} f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_{\varepsilon_2}}\left[-\frac{e^{ai}}{2\pi(z-i)}+h_2(z)\right]\mathrm{d}z=\frac{1}{2}ie^{ai}+\int_{C_{\varepsilon_2}} h_2(z)\mathrm{d}z$$

$\because \quad h_1(z)$在 $|z|\leqslant\varepsilon_1$ 解析,$h_2(z)$ 在 $|z-i|\leqslant\varepsilon_2$ 解析

$\therefore \quad \exists M_1,M_2>0,\ s.t.\ |h_1(z)|<M_1<+\infty\ (|z|<\varepsilon_1), |h_2(z)|<M_2<+\infty\ (|z-i|\leqslant\varepsilon_2)$

$\therefore \quad$ 由引理 3.1, $\quad \left|\int_{C_{\varepsilon_1}} h_1(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant 2\pi\varepsilon_1\cdot M_1\to 0 \quad (\varepsilon_1\to 0), \qquad \left|\int_{C_{\varepsilon_2}} h_2(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant 2\pi\varepsilon_2\cdot M_2\to 0 \quad (\varepsilon_2\to 0)$

$\therefore \quad \lim\limits_{\varepsilon_1\to 0}\int_{C_{\varepsilon_1}} f(z)\mathrm{d}z=-\dfrac{1}{2}i, \qquad \lim\limits_{\varepsilon_2\to 0}\int_{C_{\varepsilon_2}} f(z)\mathrm{d}z=\dfrac{1}{2}ie^{ai}$

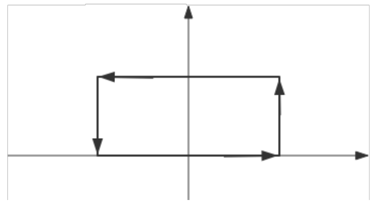
$\therefore \quad$ 令 $\varepsilon_1\to 0,\varepsilon_1\to 0,r\to+\infty$ 有 $\quad [1+\cos a+i\sin a]\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}i+\dfrac{1}{2}ie^{ai}=0$

$\therefore \quad [1+\cos a+i\sin a]\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\sin a+i\dfrac{1}{2}(1-\cos a)$

$\therefore \quad$ 比较虚部得 $\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\dfrac{1-\cos a}{\sin a}=\dfrac{1}{2}\cdot\tan\dfrac{a}{2}$

(9) $\qquad \int_0^{+\infty}\dfrac{x}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\mathrm{d}x$

记顶点为 $-r,r,-r+\dfrac{i}{2},r+\dfrac{i}{2}(r\in R_+)$ 的矩形区域为 D, 记边界曲线为 C, 取逆时针方向.



记 $f(z)=\dfrac{z}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}$.

$\because \quad \lim\limits_{z\to0}f(z)=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\pi z}{e^{\pi z}-1}\cdot\dfrac{e^{\pi z}}{\pi(e^{\pi z}+1)}=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{e^{\pi z}}{\pi(e^{\pi z}+1)}=\dfrac{1}{2\pi} \qquad \therefore \quad z=0$是 $f(z)$ 可去奇点

$\therefore$ 若补充定义 $f(0)=\dfrac{1}{2\pi}$, 则$f(z)=\dfrac{z}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}$在 D 内解析

$\therefore$ 由柯西定理有 $\displaystyle\int_{-r}^{r}f(x)\mathrm{d}x+i\int_0^{\frac12}f(r+iy)\mathrm{d}y+i\int_{\frac12}^{0}f(-r+iy)\mathrm{d}y+\int_r^{-r}f\left(x+\frac12 i\right)\mathrm{d}x=0$

$$\because \quad \left|i\int_0^{\frac12}f(r+iy)\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{1}{2(e^{\pi r}-e^{-\pi r})}\to0 \qquad (r\to+\infty)$$

$$\left|i\int_{\frac12}^{0}f(-r+iy)\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{1}{2(e^{\pi r}-e^{-\pi r})}\to0 \qquad (r\to+\infty)$$

$$\therefore \quad \lim_{r\to+\infty}i\int_0^{\frac12}f(r+iy)\mathrm{d}y=\lim_{r\to+\infty}i\int_{\frac12}^{0}f(-r+iy)\mathrm{d}y=0$$

$$\begin{aligned}\because \quad \int_r^{-r}f\left(x+\frac12 i\right)\mathrm{d}x&=-\int_{-r}^{r}\frac{x+\frac{i}{2}}{e^{\pi\left(x+\frac12\right)}-e^{-\pi\left(x+\frac12\right)}}\mathrm{d}x\\&=-\frac1i\int_{-r}^{r}\frac{x+\dfrac{i}{2}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\mathrm{d}x\\&=\frac1i\int_{-r}^{r}\frac{x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\mathrm{d}x+\frac12\int_{-r}^{r}\frac{1}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\mathrm{d}x\\&=-0-\frac12\int_{-r}^{r}\frac{e^{\pi x}}{1+e^{2\pi x}}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{4\pi}\int_{-2\pi r}^{2\pi r}\frac{e^{\frac u2}}{1+e^u}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

考虑在 $w=u+iv$ 平面上的解析函数$g(z)=\dfrac{e^{\frac12 w}}{1+e^w}$,$g(z)$ 在闭带形区域 $0\leqslant \mathrm{Im}\ w\leqslant 2\pi$ 中有唯一的一阶极点 $w=\pi i$. 作以 $-U_1,U_2,U_2+2\pi i,-U_1+2\pi i$ 为顶点的矩形 $(0<U_1,U_2<+\infty)$.

$\therefore$ 由柯西定理有 $\displaystyle\int_{-U_1}^{U_2}\frac{e^{\frac12 u}}{1+e^u}\mathrm{d}u+i\int_0^{2\pi}\frac{e^{\frac12(U_2+iv)}}{1+e^{U_2+iv}}\mathrm{d}v+\int_{U_2}^{-U_2}\frac{e^{\frac12(u+2\pi i)}}{1+e^u}\mathrm{d}u+i\int_{2\pi}^{0}\frac{e^{\frac12(-U_1+iv)}}{1+e^{-U_1+iv}}\mathrm{d}v=0$

$$\because \quad \left|i\int_0^{2\pi}\frac{e^{\frac12(U_2+iv)}}{1+e^{U_2+iv}}\mathrm{d}v\right|\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{e^{\frac12 U_2}}{e^{U_2}-1}\mathrm{d}v=\frac{2\pi e^{\frac12 U_2}}{e^{U_1}-1}$$

$$\left|i\int_{2\pi}^{0}\frac{e^{\frac12(-U_1+iv)}}{1+e^{-U_1+iv}}\mathrm{d}v\right|\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{e^{-\frac12 U_1}}{1-e^{-U_1}}\mathrm{d}v=\frac{2\pi e^{-\frac12 U_1}}{1-e^{-U_1}}$$

$$\therefore \quad \lim_{U_2\to+\infty}i\int_0^{2\pi}\frac{e^{\frac12(U_2+iv)}}{1+e^{U_2+iv}}\mathrm{d}v=\lim_{U_1\to+\infty}i\int_{2\pi}^{0}\frac{e^{\frac12(-U_1+iv)}}{1+e^{-U_1+iv}}\mathrm{d}v=0$$

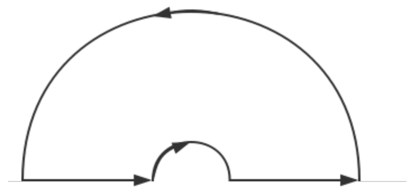
$\therefore$ 令 $U_1\to+\infty,U_2\to+\infty$, 有$\displaystyle(1-e^{2\pi\cdot\frac12 i})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac u2}}{1+e^u}\mathrm{d}u=-2\pi ie^{\frac12\pi i}=2\pi$

$\therefore \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x+\frac{1}{2}i\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$

$\therefore$ 令 $r \to +\infty$ 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$ $\quad \therefore \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{8}$

(10) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$

取$r>0, 0<\varepsilon<1, \Gamma_r = \{z : |z| = r, \mathrm{Im}\ z \geqslant 0\}$,则$f(z) = \dfrac{1-e^{iz}}{z^2}$在 $\Gamma_r, \Gamma_\varepsilon, \{z \in R : \varepsilon < |z| < r\}$ 围成区域内解析.(Γ_r 取逆时针方向、Γ_ε 取顺时针方向)



$\therefore$ 由柯西定理$\int_\varepsilon^r f(x)\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_r} f(z)\mathrm{d}z + \int_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = 0$

$\because \quad \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^r \frac{1-e^{-ix}}{x^2}\mathrm{d}x$

$$\therefore \quad \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^r \frac{1-e^{ix}}{x^2}\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^r \frac{2-(e^{ix}+e^{-ix})}{x^2}\mathrm{d}x = 2\int_\varepsilon^r \frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$\because \quad \left|\int_{\Gamma_r} \frac{\mathrm{d}z}{z^2}\right| \leqslant \frac{\pi r}{r^2} = \frac{\pi}{r} \to 0 \quad (r \to +\infty)$ $\quad \therefore \quad \lim_{r\to+\infty} \int_{\Gamma_r} \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = 0$

$\therefore$ 由引理 3.1 $\lim_{r\to+\infty} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z^2}\mathrm{d}z = 0$ $\quad \therefore \quad \lim_{r\to+\infty} \int_{\Gamma_r} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\mathrm{d}z$

$\because \quad \frac{1-e^{iz}}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-(iz)^n}{n!} = -\frac{i}{z} + h(z) \quad (0<|z|<+\infty)$ 其中 $h(z)$ 在 $z=0$ 解析

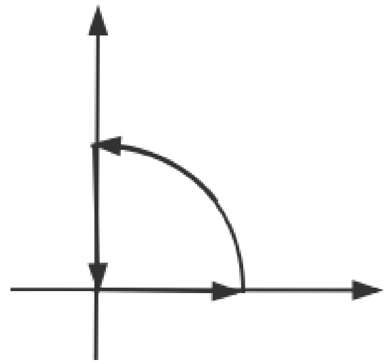
$\therefore \quad \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(-\frac{i}{z}\right)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_\varepsilon} h(z)\mathrm{d}z = -\pi + \int_{\Gamma_\varepsilon} h(z)\mathrm{d}z$

$\because$ $h(z)$在 $z=0$ 解析 $\quad \therefore \quad \exists \delta, M>0,\ s.t.\ |h(z)| \leqslant M \ (|z|<\delta)$

$\therefore$ 当 $\varepsilon < \delta$ 时,$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon} h(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant M\pi\varepsilon$ $\quad \therefore \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} h(z)\mathrm{d}z = 0$

$\therefore$ 令 $\varepsilon \to 0, e \to +\infty$, 有 $2\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x}\mathrm{d}x - \pi = 0$ $\quad \therefore \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

(11) 考虑函数 $f(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-z}}{z}$,$\forall r>0$, 设 $\Gamma_r = \{z : |z| = r, \mathrm{Re}\ z \geqslant 0, \mathrm{Im}\ z \geqslant 0\}$. 设 $\Gamma_r, \{z = x : 0 < x < r\}$, $\{z = iy : 0 < y < r\}$ 围成区域为 D.



$\because\quad \lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\dfrac{ie^{iz}+e^{-z}}{1}=i+1<\infty \qquad \therefore\quad z=0$是 $f(z)$ 的可去奇点

$\therefore$　若补充定义 $f(z)=i+1$,则 $f(z)$ 在 D 内解析,D 边界曲线取逆时针方向

$\therefore$　由柯西定理　$\displaystyle\int_0^r \frac{e^{ix}-e^{-x}}{x}dx+\int_{\Gamma_r} f(z)dz+\int_r^0 \frac{e^{-y}-e^{-iy}}{iy}d(iy)=0$

$$\int_0^r \frac{e^{ix}-e^{-x}}{x}dx+\int_{\Gamma_r} f(z)dz+\int_r^0 \frac{e^{-y}-e^{-iy}}{y}dy=0$$

$$\int_0^r \frac{e^{ix}-e^{-x}}{x}dx+\int_r^0 \frac{e^{-y}-e^{-iy}}{y}dy=\int_0^r \frac{\cos x+i\sin x-e^{-x}}{x}dx-\int_0^r \frac{e^{-x}-\cos x+i\sin x}{x}dx$$

$$=2\int_0^r \frac{\cos x-e^{-x}}{x}dx$$

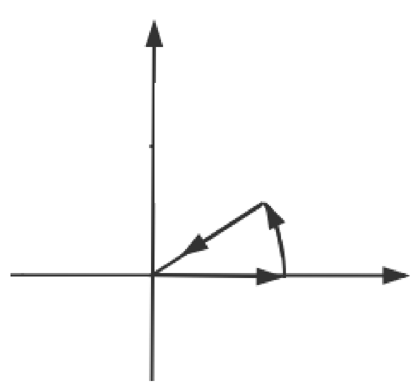
$\because\quad \lim_{z\to\infty}\dfrac{1}{z}=0 \qquad \therefore$　由引理 3.1　$\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$

$\therefore\quad \displaystyle\lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{e^{-z}}{z}dz=\lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r'}\frac{e^{it}}{it}d(it)=\lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r'}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$　　其中 Γ_r,Γ_r' 关于虚轴对称

$\therefore\quad \displaystyle\lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r} f(z)dz=0$

$\therefore$　令 $r\to+\infty$, 有 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x-e^{-x}}{x}dx=0$

(12)　考虑函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^n}$ $(n\geqslant 2),\forall r>1$, 设 $\Gamma_r=\left\{z:|z|=r,0\leqslant \arg z\leqslant \dfrac{2\pi}{n}\right\}, C_r=\{z:0\leqslant |z|\leqslant r,$ $\arg z=\dfrac{2\pi}{n}\}$. 设 $\Gamma_r,\{z=x:0<x<r\},C_r$ 围成区域为 D, 边界曲线取逆时针方向.$f(z)$ 在 D 内有一阶极点 $z=e^{\frac{\pi}{n}i}$



$$\text{Res}(f,e^{\frac{\pi}{n}i})=\lim_{z\to e^{\frac{\pi}{n}i}}\frac{(z-e^{\frac{\pi}{n}i})}{1+z^n}=\frac{1}{(1+z^n)'}\Big|_{z=e^{\frac{\pi}{n}i}}=-\frac{e^{\frac{\pi}{n}i}}{n}$$

当 $\arg z=0$ 时,$z=x(0\leqslant x<r)$; 当 $\arg z=\dfrac{2\pi}{n}$ 时, 令 $|z|=x$, 则 $z=xe^{\frac{2\pi}{n}i}$

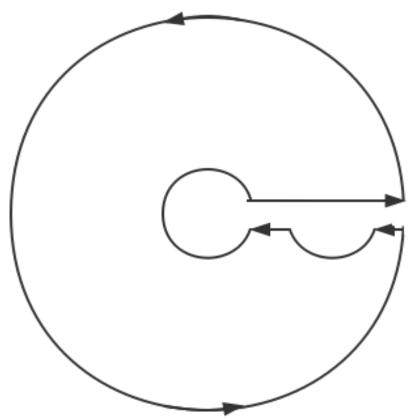
$\therefore$ 由留数定理有 $\displaystyle\int_0^r\frac{dx}{1+x^n}+\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{1+z^n}+\int_r^0\frac{e^{\frac{2\pi}{n}i}}{1+x^ne^{2\pi i}}dx=2\pi i\text{Res}(f,e^{\frac{\pi}{n}i})$

$\because$ $\displaystyle\left|\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{1+z^n}\right|\leqslant\frac{2\pi}{n}r\cdot\frac{1}{r^n-1}\to 0\qquad(r\to+\infty)$

$\therefore$ 令 $r\to+\infty$, 有 $\displaystyle(1-e^{\frac{2\pi}{n}i})\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n}=-\frac{2\pi ie^{\frac{\pi}{n}i}}{n}$

$\therefore$ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}dx=-\frac{\frac{2\pi ie^{\frac{\pi}{n}i}}{n}}{1-e^{\frac{2\pi}{n}i}}=\frac{\pi}{n}\cdot\frac{2i}{e^{\frac{\pi}{n}i}-e^{-\frac{\pi}{n}i}}=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$

(13) 考虑多值函数 $\dfrac{(\text{Ln }z)^2}{z^2-1}$, 取正实轴作割线, 记在割线上沿取正实值的分支为 $f(z)=\dfrac{\ln z}{z^2-1}$. 取积分曲线 $C(r,\varepsilon,\varepsilon')$ $(0<\varepsilon,\varepsilon'<\frac{1}{2},r>\varepsilon'+1)$: 从正实轴上沿沿正实轴方向从 ε 到 r, 再从 $z=r$ 出发绕 $\Gamma_r:|z|=r$ 沿逆时针方向转动一周，沿正实轴下沿沿负实轴方向从 r 到 $1-\varepsilon'$, 从 $z=1+\varepsilon$ 出发绕 $\Gamma_{\varepsilon'}:|z-1|=\varepsilon'$ 沿顺时针方向绕半圈到 $1-\varepsilon'$; 从 $1-\varepsilon'$ 到 ε, 绕 $\Gamma_{\varepsilon'}:|z|=\varepsilon$ 沿顺时针方向转动一圈回到原处



$f(z)$ 在 $C(r,\varepsilon,\varepsilon')$ 内区域有极点 $z=-1$,$\text{Res}(f,-1)=\lim\limits_{z\to-1}[(z+1)f(z)]=\lim\limits_{z\to-1}\dfrac{(\ln z)^2}{(z-1)}=\dfrac{\pi^2}{2}$

$\because$ 在实轴上沿,$\lim\limits_{z\to1}f(z)=0$ $\qquad\therefore$ 在实轴上沿,$z=1$是 $f(z)$ 可去奇点

$\therefore$ 由留数定理

$$\int_\varepsilon^r f(x)dx+\int_{\Gamma_r}f(z)dz+\int_r^{1+\varepsilon'}\frac{(\ln x+2\pi i)^2}{z^2-1}dx+\int_{\Gamma_{\varepsilon'}}f(z)dz+\int_{1-\varepsilon'}^{\varepsilon}\frac{(\ln x+2\pi i)^2}{z^2-1}dx+\int_{C_\varepsilon}f(z)dz=2\pi i\text{Res}(f,-1)$$
$=\pi^3 i$

$\because$ $\ln z$在解析分支内连续 $\qquad\therefore$ 当$z\in\Gamma_{\varepsilon'}$时, $\lim\limits_{\varepsilon'\to0}\ln z=2\pi i$

$\therefore$ $\ln z=2\pi i+\lambda(\varepsilon')$ $\qquad$ 其中当 $\varepsilon\to0$ 时,$\lambda\to0$

$\because$ 当 $z\in\Gamma_{\varepsilon'}$ 时,$z=\varepsilon'e^{i\theta}+1$

→实轴下沿

$$\therefore \quad \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{\Gamma_{\varepsilon'}} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{\Gamma_{\varepsilon'}} \frac{(\ln z)^2}{(z-1)(z+1)}\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{2\pi}^{\pi} \frac{[2\pi i+\lambda(\varepsilon)]^2 i}{2+\varepsilon' e^{i\theta}}\mathrm{d}\theta = 2\pi^3 i$$

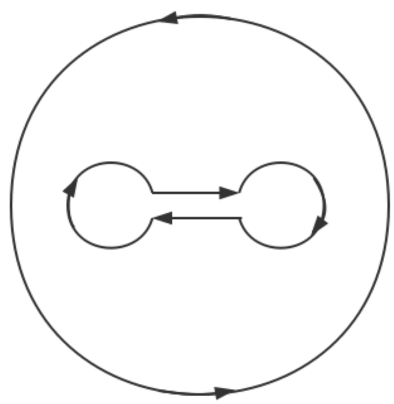
$$\because \quad \left|\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi\varepsilon\cdot\frac{|\ln\varepsilon+2\pi i|^2}{1-\varepsilon^2}\to 0 \quad (\varepsilon\to 0), \quad \left|\int_{\Gamma_r} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi r\cdot\frac{|\ln r+2\pi i|^2}{r^2-1}\to 0 \quad (r\to+\infty)$$

$$\therefore \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

$\therefore$ 令 $\varepsilon\to 0,\varepsilon'\to 0, r\to+\infty$, 有 $-4\pi i\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x + 4\pi^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = -\pi^3 i$

$\therefore$ 比较虚部有 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$

(14) 考虑多值函数 $g(z)=\sqrt[3]{(1-z)(z+1)^2}$, 有支点 $z=\pm1$, 而 $z=\infty$ 不是支点, 故取实轴上 $[-1,1]$ 为割线, 在剩余区域内 $g(z)$ 分为解析分支. 取在割线上沿取正实值的那一支, 规定在割线上沿 $\arg(1+x)=0$ $\arg(1-x)=0.\forall r>2>1>\varepsilon>0$, 作闭曲线 $\Gamma_r:|z|=r,\Gamma_\varepsilon:|z-1|=\varepsilon,\Gamma'_\varepsilon:|z+1|=\varepsilon$ 以及实轴上、下沿 $[-\varepsilon,\varepsilon](\Gamma_r$ 取逆时针方向, 其余取顺时针方向$), f(z)=\frac{1}{\sqrt[3]{(1-z)(z+1)^2}}$在它们所围成区域内解析



$$\therefore \quad \text{由柯西定理} \quad \int_{\Gamma_r} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\Gamma'_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} f(x+2\pi i)\mathrm{d}x = 0$$

$$\because \quad \left|\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} = 2\pi\varepsilon^{\frac{2}{3}}\to 0, \quad \left|\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} = 2\pi\varepsilon^{\frac{1}{3}}\to 0 \quad (\varepsilon\to 0)$$

$$\therefore \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma'_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

$\because$ 在割线上沿 $\arg(1-z)=\arg(1+z)=0$, 当 $x>2$ 时,z 从割线上沿连续变化到 x 时,z 绕 $z=1$ 顺时针绕行角度为 π、绕 $z=-1$ 绕行角度为 0, 即 $\arg(1-z)$ 减少了 $\pi,\arg(1+z)$ 不变

$$\therefore \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}e^{\frac{i}{3}(-\pi+2\cdot 0)}} = \frac{e^{-\frac{\pi}{3}i}}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}$$

$$\because \quad \lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\mathrm{Res}(f,\infty) = -2\pi i\lim_{z\to\infty} zf(z) = -2\pi i\lim_{x\to+\infty} xf(x)$$

$$\therefore \quad \lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = -2\pi i\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{\pi}{3}i}}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}} = 2\pi i e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$\because$ 在割线上沿 $\arg(1-z)=\arg(1+z)=0$, 当 z 从正实轴上沿 $z=1$ 处绕 Γ_ε 顺时针绕行一周到达下沿,$\arg(1-z)$ 减少 2π,$\arg(1+z)$ 不变

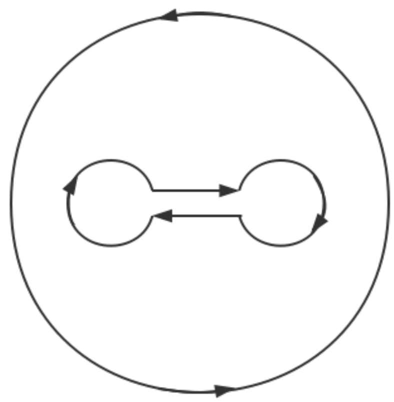
$\therefore \quad \int_1^{-1} f(x+2\pi i)\mathrm{d}x = -\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}e^{\frac{i}{3}(-2\pi+2\cdot 0)}}\mathrm{d}x = -e^{\frac{2\pi}{3}i}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}\mathrm{d}x$

$\therefore$ 令 $r\to+\infty, \varepsilon\to 0$, 有 $(1-e^{\frac{2\pi}{3}i})\int_1^{-1} f(x)\mathrm{d}x = -2\pi i e^{\frac{\pi}{3}i}$

$\therefore \quad \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}} = \frac{-2\pi i e^{\frac{\pi}{3}i}}{1-e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

(15) 考虑多值函数 $g(z)=(z-2)\sqrt{1-z^2}$, 在复平面上取线段 $[-1,1]$ 作为割线, 在剩余区域内可把 $g(z)$ 分成解析分支, 取在割线上沿 $\sqrt{1-z^2}$ 取正值的那支, 规定 $\arg(1-x)=0,\arg(1+x)=0$.

$\forall r>2>1>\varepsilon>0$, 作闭曲线 $\Gamma_r:|z|=r, \Gamma_\varepsilon:|z-1|=\varepsilon, \Gamma'_\varepsilon:|z+1|=\varepsilon$ 以及实轴上、下沿 $[-\varepsilon,\varepsilon]$($\Gamma_r$取逆时针方向, 其余取顺时针方向), $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)\sqrt{1-z^2}}$在它们所围成区域内解析



$\therefore$ 由留数定理 $\int_{\Gamma_r} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\Gamma'_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} f(x+2\pi i)\mathrm{d}x = 2\pi i\mathrm{Res}(f,2)$

$\because \quad \left|\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi\varepsilon\frac{1}{(2-\varepsilon)(1-\varepsilon)\varepsilon}\to 0, \qquad \left|\int_{\Gamma'_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi\varepsilon\frac{1}{(2-\varepsilon)\varepsilon}\to 0 \qquad (\varepsilon\to 0)$

$\therefore \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma'_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = 0$

$\because \quad \lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\mathrm{Res}(f,\infty) = -2\pi i\lim_{z\to+\infty} zf(z) = -2\pi i\lim_{x\to+\infty} xf(x)$

当 $r>2$ 时, 在正实轴上 $f(x) = \dfrac{1}{(z-2)\sqrt{1-x^2}e^{\frac{i}{2}(0-\pi)}} = \dfrac{e^{\frac{\pi i}{2}}}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \quad \lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = -2\pi i\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{\pi i}{2}}}{(x-2)\sqrt{1-x^2}} = 0$

$\because \quad \int_1^{-1} f(x+2\pi i)\mathrm{d}x = -\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(z-2)\sqrt{1-z^2}e^{\frac{i}{2}(0-2\pi)}} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}$

$\mathrm{Res}(f,2) = \lim_{z\to 2}[(z-2)f(z)] = \lim_{z\to 2}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}e^{\frac{i}{2}(0-\pi)}} = \frac{i}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ 令 $\varepsilon\to 0, r\to+\infty$, 有 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

(16) 令 $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{1+z+z^2}}$, $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内有两个支点 $z_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. 作割线连接 z_1,z_2, 在剩余区域可把 $f(z)$ 分成解析分支.

若取在 $x>2$ 上 $\arg(1+z+z^2)=0$ 的一分支

$$\therefore\quad \mathrm{Res}(f,\infty)=-\mathrm{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right)=-\lim_{z\to+\infty}z\frac{1}{z\sqrt{z^2+z+1}}=-\frac{1}{\sqrt{1}}=-\frac{1}{e^{0\pi i}}=-1$$

$$\therefore\quad \text{由留数定理有}\quad \int_C\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z+z^2}}=2\pi i\mathrm{Res}(f,z_1)+2\pi i\mathrm{Res}(f,z_2)=-2\pi i\mathrm{Res}(f,\infty)=2\pi i$$

若取在 $x>2$ 上 $\arg(1+z+z^2)=2\pi$ 的一分支

$$\therefore\quad \mathrm{Res}(f,\infty)=-\mathrm{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right)=-\lim_{z\to+\infty}z\frac{1}{z\sqrt{z^2+z+1}}=-\frac{1}{\sqrt{1}}=-\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\cdot 2\pi i}}=1$$

$$\therefore\quad \text{由留数定理有}\quad \int_C\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z+z^2}}=2\pi i\mathrm{Res}(f,z_1)+2\pi i\mathrm{Res}(f,z_2)=-2\pi i\mathrm{Res}(f,\infty)=-2\pi i$$

□

9 **试由**

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

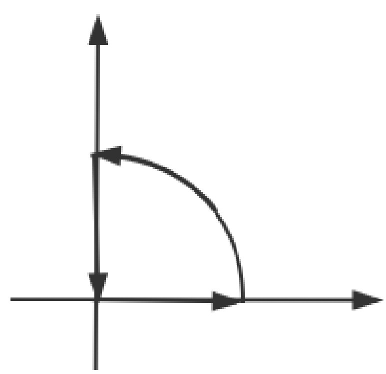
证明:

(1) $\int_0^{+\infty}\cos r^2\mathrm{d}r=\int_0^{+\infty}\sin r^2\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2\pi}4}{;}$

(2) $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2hx)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-h^2}$, **其中** $h>0$.

Proof.

(1) 考虑第一象限内以半射线 $\arg z=0$ 及 $\arg z=\frac{\pi}{4},\Gamma_{r_0}=\{z:|z|=r_0>0,0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{4}\}$ 为边界的扇形区域 $D,f(z)=e^{-z^2}$在 D 内解析 (边界曲线取逆时针方向)



$$\because\quad \text{在 }\arg z=\frac{\pi}{4}\text{ 上},z=|z|e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\therefore\quad \text{由柯西定理有}\qquad \int_0^{r_0}e^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_{r_0}}e^{-z^2}\mathrm{d}z+\int_{r_0}^0e^{-\left(re^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2}e^{i\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}r=0$$

$$\because\quad \left|\int_{\Gamma_{r_0}}e^{-z^2}\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{\pi}{4}r_0e^{-r_0^2}\to 0\qquad(r_0\to+\infty)\qquad\qquad \therefore\quad \int_{\Gamma_{r_0}}e^{-z^2}\mathrm{d}z=0$$

$$\because\quad \int_{r_0}^0e^{-\left(re^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2}e^{i\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}r=-\int_0^{r_0}e^{-r^2e^{i\frac{\pi}{2}}}(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}r$$

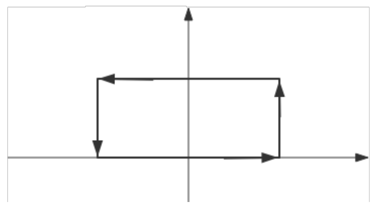
$$=-\int_0^{r_0}e^{-ir^2}(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}r$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_0^{r_0}(\cos r^2 - i\sin r^2)\mathrm{d}r$$

$\therefore$ 令 $r_0 \to +\infty$, 有 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos r^2\mathrm{d}r - i\int_0^{+\infty}\sin r^2\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1-i)$

$\therefore$ 比较实部、虚部有, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos r^2\mathrm{d}r = \int_0^{+\infty}\sin r^2\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$

(2) 考虑以 $-X_1, X_2, X_2+ih, -X_1+ih(X_1, X_2, h > 0)$ 为顶点的矩形区域 $D, f(z) = e^{-z^2}$ 在 D 内解析 (边界曲线取逆时针方向)



$\therefore$ 由柯西定理有 $\displaystyle\int_{-X_1}^{X_2}e^{-x^2}\mathrm{d}x + i\int_0^h e^{-(X_2+iy)^2}\mathrm{d}y + \int_{X_2}^{-X_1}e^{-(x+ih)^2}\mathrm{d}x + i\int_h^0 e^{-(-X_1+iy)^2}\mathrm{d}y = 0$

$\because$ $\displaystyle\left|i\int_0^h e^{-(X_2+iy)^2}\mathrm{d}y\right| \leqslant he^{-X_2^2+h^2} \to 0 \qquad (X_2 \to +\infty)$

$\displaystyle\left|i\int_0^h e^{-(-X_1+iy)^2}\mathrm{d}y\right| \leqslant he^{-X_1^2+h^2} \to 0 \qquad (X_1 \to +\infty)$

$\therefore$ $\displaystyle\lim_{X_1\to+\infty} i\int_0^h e^{-(-X_1+iy)^2}\mathrm{d}y = \lim_{X_2\to+\infty} i\int_0^h e^{-(X_2+iy)^2}\mathrm{d}y = 0$

$\because$ $\displaystyle\int_{X_2}^{-X_1}e^{-(x+ih)^2}\mathrm{d}x = -\int_{-X_1}^{X_2}e^{h^2}e^{-x^2}e^{2xh\cdot i}\mathrm{d}x$

$$= -e^{h^2}\int_{-X_1}^{X_2}e^{-x^2}[\cos(2hx) + i\sin(2hx)]\mathrm{d}x$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$

$\therefore$ 令 $X_1 \to +\infty, X_2 \to +\infty$, 有 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}[\cos(2hx) + i\sin(2hx)]\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}e^{-h^2}$

$\therefore$ 比较实部有 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos(2hx)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-h^2}$

□

10 试证: 在定理 5.1 的条件下, 如果 $\varphi(z)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 上解析, 并且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 及 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 分别是 $f(z)$ 在 D 内的零点和极点, 而其阶数分别是 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 及 $l_1, l_2, \cdots, l_n$, 那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \sum_{p=1}^{m}k_p\varphi(\alpha_p) - \sum_{q=1}^{n}l_1\varphi(\beta_q).$$

Proof.

$\because$ $\forall z_0 \in D, z_0$是 $f(z)$ 的 k 阶零点或极点, 则在 z_0 某领域内 $f(z) = (z-z_0)^k\varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 在 D 内解析且 $\varphi(z_0) \neq 0$

$\therefore\quad \varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\varphi(z)\dfrac{[(z-z_0)^k\varphi(z)]'}{(z-z_0)^k\varphi(z)}=\dfrac{k}{z-z_0}\varphi(z)+\varphi'(z),\qquad$ 当 z_0 为 n 阶零点时,$k=n$; 为 n 阶极点时,$k=-n$.

$\because\quad z_0$不是 $\varphi(z)$ 的零点、极点 $\qquad\therefore\quad z_0$不是 $\varphi'(z)$ 的零点、极点 $\qquad\therefore\quad \operatorname{Res}\left(\varphi\dfrac{f'}{f},z_0\right)=k\varphi(z_0)$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{1}{2\pi i}\int_C\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z&=\sum_{p=1}^{m}\operatorname{Res}\left(\varphi\frac{f'}{f},\alpha_p\right)+\sum_{q=1}^{n}\operatorname{Res}\left(\varphi\frac{f'}{f},\beta_q\right)\\&=\sum_{p=1}^{m}k_p\varphi(\alpha_p)+\sum_{q=1}^{n}l_q\varphi(\beta_q)\end{aligned}$$

□

11 **应用鲁歇定理，求下列方程在 $|z|<1$ 内根的个数:**

(1) $z^8-4z^5+z^2-1=0$;

(2) $z^4-5z+1=0$;

(3) $z=\varphi(z)$, **其中** $\varphi(z)$ **在** $|z|\leqslant 1$ **上解析, 并且** $|\varphi(z)|<1$.

Proof.

(1) 令 $f(z)=-4z^5-1,g(z)=z^8+z^2$

$\because$ 当 $|z|=1$ 时,$|f(z)|\geqslant|4z^5|-1=3,\qquad |g(z)|\leqslant|z^8|+|z^2|=2$

$\therefore$ 由鲁歇定理, 在 $|z|<1$ 内 $f(z)+g(z)$ 零点个数与 $f(z)$ 零点个数相同, 即 5 个

$\therefore$ 方程在 $|z|<1$ 内有 5 个根

(2) 令 $f(z)=-5z,g(z)=z^4+1$

$\because$ 当 $|z|=1$ 时,$|f(z)|=|5z|=5,\qquad |g(z)|\leqslant|z^4|+1=2$

$\therefore$ 由鲁歇定理, 在 $|z|<1$ 内 $f(z)+g(z)$ 零点个数与 $f(z)$ 零点个数相同, 即 1 个

$\therefore$ 方程在 $|z|<1$ 内有 1 个根

(3) 令 $f(z)=z,g(z)=\varphi(z)$

$\because$ 当 $|z|=1$ 时,$|f(z)|=|z|=1,\qquad |g(z)|=|\varphi(z)|<1$

$\therefore$ 由鲁歇定理, 在 $|z|<1$ 内 $f(z)+g(z)$ 零点个数与 $f(z)$ 零点个数相同, 即 1 个

$\therefore$ 方程在 $|z|<1$ 内有 1 个根

□

12 **试用鲁歇定理证明代数基本定理.**

Proof.

设有多项式$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n\qquad(a_n\neq 0)$

令 $f(z)=a_nz^n,g(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}$

$$\begin{aligned}\because\quad |f(z)|-|g(z)|&\geqslant|a_n||z^n|-(|a_0|+|a_1||z|+\cdots+|a_{n-1}||z^{n-1}|)\\&=-|a_0|-|a_1||z|-\cdots-|a_{n-1}||z|^{n-1}+|a_n||z|^n\to+\infty\qquad(z\to\infty)\end{aligned}$$

$\therefore$ $\exists r_0>0,\ s.t.$ 当 $|z|=r_0$ 时,$|f(z)|-|g(z)|>0$ $\therefore$ $|f(z)|>|g(z)|$ $(|z|=r_0)$

$\therefore$ 由鲁歇定理, 在 $|z|<r_0$ 内 $P(z)=f(z)+g(z)$ 零点个数与 $f(z)$ 零点个数相同, 即 n 个

□

13 （1）**计算积分**

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3\mathrm{d}x}{x^6+1}.$$

（2）**设** $P(z)$ **及** $Q(z)$ **是两个多项式，而且** $P(z)$ **的次数小于** $Q(z)$ **的次数；设** $Q(z)$ **在原点及正实轴上没有零点. 证明：当整数** $n\geqslant 2$ **时, 积分**

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{P(x^n)}{Q(x^n)}\mathrm{d}x$$

的值可以用 $\dfrac{P(z^n)}{Q(z^n)}$ **在角形** $A=\left\{z:0<\arg z<\dfrac{2\pi}{n}\right\}$ **中的留数表示出来：**

$$I=\frac{2\pi i}{1-e^{\frac{2\pi i}{n}}}\cdot\sum_{z_0\in Z}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z^n)}{Q(z^n)},z_0\right),$$

其中 Z **是** $Q(z^n)$ **在** A **内的所有零点构成的集.**

Proof.

(1) $\because$ $z^6+1=0$在 C 上有 6 个根:$e^{\frac{i}{6}(-\pi+2n\pi)}=e^{i\frac{(2n-1)\pi}{6}}$ $(n=0,1,\cdots,5)$

$\therefore$ 考虑函数 $f(z)=\dfrac{z^3}{1+z^6}.\forall r>1$, 设 $\Gamma_r=\{z:|z|=r,\mathrm{Re}\ z\geqslant 0,\mathrm{Im}\ z\geqslant 0\},C_r=\{z:0\leqslant|z|\leqslant r,\arg\ z=\dfrac{\pi}{3}\}$.

设 $\Gamma_r,\{z=x:0<x<r\},C_r$ 围成区域为 D, 边界曲线取逆时针方向.$f(z)$ 在 D 内只有一阶极点 $z=e^{\frac{\pi}{6}i}$

$$\mathrm{Res}(f,e^{\frac{\pi}{6}i})=\lim_{z\to e^{\frac{\pi}{6}i}}\frac{(z-e^{\frac{\pi}{6}i})z^3}{1+z^6}=\frac{z^3}{(1+z^6)'}\Big|_{z=e^{\frac{\pi}{6}i}}=-\frac{e^{\frac{2\pi}{3}i}}{6}$$

当 $\arg\ z=0$ 时,$z=x(0\leqslant x<r)$; 当 $\arg\ z=\dfrac{\pi}{3}$ 时, 令 $|z|=x$, 则 $z=xe^{\frac{\pi}{3}i}$

$\therefore$ 由留数定理有 $\displaystyle\int_0^r\frac{x^3\mathrm{d}x}{1+x^6}+\int_{\Gamma_r}\frac{z^6\mathrm{d}z}{1+z^6}+\int_r^0\frac{x^3e^{\frac{4\pi}{3}i}}{1+x^6e^{2\pi i}}\mathrm{d}x=2\pi i\mathrm{Res}(f,e^{\frac{\pi}{6}i})$

$\because$ $\displaystyle\left|\int_{\Gamma_r}\frac{z^3\mathrm{d}z}{1+z^6}\right|\leqslant\frac{2\pi}{n}r\cdot\frac{r^3}{r^n-1}\to 0\qquad(r\to+\infty)$

$\therefore$ 令 $r\to+\infty$, 有 $\displaystyle(1-e^{\frac{4\pi}{3}i})\int_0^{+\infty}\frac{x^3\mathrm{d}x}{1+x^6}=-\frac{2\pi ie^{\frac{2\pi}{3}i}}{6}$

$\therefore$ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{1+x^6}\mathrm{d}x=-\frac{\frac{2\pi ie^{\frac{2\pi}{3}i}}{6}}{1-e^{\frac{4\pi}{3}i}}=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{2i}{e^{\frac{2\pi}{3}i}-e^{-\frac{2\pi}{3}i}}=\frac{\pi}{6\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

(2) $\because$ $Q(z)$在原点及正实轴上没有零点 $\therefore$ $Q(z^n)$在原点及射线 $\arg z=\dfrac{2\pi}{n}$ 上没有零点

$\therefore$ 考虑函数 $f(z)=\dfrac{P(z^n)}{Q(z^n)}.\forall r>1$, 设 $\Gamma_r=\{z:|z|=r,\mathrm{Re}\ z\geqslant 0,\mathrm{Im}\ z\geqslant 0\},C_r=\{z:0\leqslant|z|\leqslant r,\arg\ z=\dfrac{2\pi}{n}\}$.

设 $\Gamma_r,\{z=x:0<x<r\},C_r$ 围成区域为 D, 边界曲线取逆时针方向. 设 $Q(z)$ 在 D 内有零点 $z_1,z_2,\cdots,z_m$, 则 $f(z)$ 在 D 内只有极点 $z=e^{\frac{\pi}{6}i}$,$f(z)$ 在剩余区域及边界曲线上均解析.

$\because$ 当 $\arg z = 0$ 时,$z = x(0 \leqslant x < r)$; 当 $\arg z = \dfrac{2\pi}{n}$ 时, 令 $|z| = x$, 则 $z = xe^{\frac{2\pi}{n}i}$

$\therefore$ 由留数定理有 $\displaystyle\int_0^r f(x)\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_r} f(z)\mathrm{d}z + \int_r^0 \frac{P(x^n e^{2\pi i})e^{i\frac{2\pi}{n}}}{Q(x^n e^{2\pi i})}\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z_0 \in Z} \mathrm{Res}(f, z_0)$, $\quad Z = \{z_1, z_2, \cdots, z_m\}$

$\because$ $P(z)$次数小于$Q(z)$ $\quad \therefore \quad \left|\displaystyle\int_{\Gamma_r} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{2\pi}{n} r \cdot \frac{P(r^n)}{Q(r^n)} \to 0 \quad (r \to +\infty)$

$\therefore$ 令 $r \to +\infty$, 有 $\quad (1 - e^{\frac{2\pi}{n}i})I = 2\pi i \displaystyle\sum_{z_0 \in Z} \mathrm{Res}(f, z_0)$

$\therefore$ $I = \dfrac{2\pi}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}} \displaystyle\sum_{z_0 \in Z} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z^n)}{Q(z^n)}, z_0\right)$

□

14 **设解析函数序列 $\{f_n(z)\}$ 在区域 D 内内闭一致收敛于不恒等于零的函数 $f(z)$. 应用鲁歇定理，证明:**
(1) 如果 $f_n(z)(n = 1, 2, \cdots)$ 在 D 内没有零点, 那么 $f(z)$ 在 D 内也没有零点;
(2) 用 Z_n 及 Z 分别表示 $f_n(z)$ 及 $f(z)$ 在 D 内的零点集，那么对于任何正整数 p,

$$Z \subset \overline{\bigcup_{n \geqslant p} Z_n}, \text{而且} Z = \bigcap_{p=1}^{+\infty} \overline{\bigcup_{n \geqslant p} Z_n},$$

其中 $\overline{\bigcup\limits_{n \geqslant p} Z_n}$ 表示 $\bigcup\limits_{n \geqslant p} Z_n$ 的闭包, 即 $\bigcup\limits_{n \geqslant p} Z_n$ 与其所有聚点组成的集的并集.

Proof.

(1) $\because$ 解析函数列 $\{f_n(z)\}$ 在区域 D 内内闭一致收敛于 $f(z)$ $\quad \therefore$ 由魏尔斯特拉斯定理,$f(z)$在 D 内解析

$\because$ $f(z) \not\equiv 0 (z \in D)$ $\quad \therefore$ 由解析函数唯一性,$f(z)$至多有有限个零点, 设任一个零点为 z_0

$\because$ 由零点的孤立性,$\exists \delta > 0$, $s.t.$ $\forall z \in \mathring{U}(z_0, \delta), f(z) \neq 0$

$\because$ 在 $|z - z_0| = \delta$ 上 $f(z) \neq 0$ $\quad \therefore$ $\exists \varepsilon > 0$, $s.t.$ $|f(z)| > \varepsilon > 0$

$\because$ $\{f_n(z)\}$在 D 内内闭一致收敛

$\therefore$ 对上述$\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N_+$, $s.t.$ 当 $n > n_0$ 时,$\forall z \in \{z : |z - z_0| = \delta\} \subset D, |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

$\because$ $f(z), f_{n_0+1}(z) - f(z)$在 $\overline{U(z_0, \delta)}$ 内解析, 在 $|z - z_0| = \delta$ 上$|f(z)| > |f_{n_0+1}(z) - f(z)|$

$\therefore$ 由鲁歇定理有, 在 $\overline{U(z_0, \delta)}$ 内 $f(z)$ 与 $f_{n_0+1}(z)$ 的零点个数相同

$\because$ 在 $\overline{U(z_0, \delta)}$ 内,$f(z)$ 有一个零点,$f_{n_0+1}(z)$ 没有零点 $\quad \therefore$ 矛盾, 故 $f(z)$ 在 D 内没有零点

(2) $\because$ 解析函数列 $\{f_n(z)\}$ 在区域 D 内内闭一致收敛于 $f(z)$ $\quad \therefore$ 由魏尔斯特拉斯定理,$f(z)$在 D 内解析

$\because$ $f(z) \not\equiv 0 (z \in D)$ $\quad \therefore$ 由解析函数唯一性,$f(z)$至多有有限个零点

$\because$ $\forall z_0 \in Z$, 由零点的孤立性,$\exists \delta > 0$, $s.t.$ $\forall z \in \mathring{U}(z_0, \delta), f(z) \neq 0$

$\because$ 在 $|z - z_0| = \delta$ 上 $f(z) \neq 0$ $\quad \therefore$ $\exists \varepsilon > 0$, $s.t.$ $|f(z)| > \varepsilon > 0$

$\because$ $\{f_n(z)\}$在 D 内内闭一致收敛

$\therefore$ 对上述$\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N_+$, $s.t.$ 当 $n > n_0$ 时,$\forall z \in \{z : |z - z_0| = \delta\} \subset D, |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

$\because$ $f(z), f_{n+1}(z) - f(z)$在 $\overline{U(z_0, \delta)}$ 内解析, 在 $|z - z_0| = \delta$ 上$|f(z)| > |f_{n+1}(z) - f(z)|$

$\therefore$ 由鲁歇定理有, 在 $\overline{U(z_0, \delta)}$ 内 $f(z)$ 与 $f_n(z)$ 的零点个数相同, 即为 1 个$(n > n_0)$

在 $\overline{U(z_0,\delta)}$ 内$\{f_n(z)\}_{n>n_0}$的零点序列 $\{z_0^{(n)}\}_{n>n_0}$ 至多只有有限个点不等于 z_0、或者有聚点.

若其至多只有有限个点不等于 z_0, 则

$$\{z_0\}=\overline{U(z_0,\delta)}\cap\left(\lim_{p\to+\infty}\bigcup_{n\geqslant p}Z_n\right)=\overline{U(z_0,\delta)}\cap\left(\lim_{p\to+\infty}\overline{\bigcup_{n\geqslant p}Z_n}\right)=\overline{U(z_0,\delta)}\cap\bigcap_{p=1}^{+\infty}\overline{\bigcup_{n\geqslant p}Z_n}$$

若其有聚点, 设任一聚点为 z', 若 $z'\neq z_0$:

$\because$ $f(z)$在 D 内解析 $\quad\therefore$ $\forall\varepsilon'>0,\exists\delta_1:0<\delta_1<\delta_0,\ s.t.\ \forall z\in\{z:|z-z'|<\delta_1\},|f(z)-f(z')|<\varepsilon'$

$\because$ z'是 $\{z_0^{(n)}\}_{n>n_0}$ 的聚点 $\quad\therefore$ 存在子列$\{z_{n_j}\}, \lim\limits_{j\to+\infty}z_{n_j}=z'$

$\therefore$ $\exists j_0\in N_+,\ s.t.\ \forall j>j_0,|f(z_{n_j})-f(z')|<\dfrac{\varepsilon'}{2}$

$\because$ $\{f_n(z)\}$内闭一致收敛于 $f(z)$ $\quad\therefore$ $\forall$对上述$\varepsilon',\exists j_1\in N_+,\ s.t.$ 当$j>j_1$时,$|f_{n_j}(z_{n_j})-f(z_{n_j})|<\dfrac{\varepsilon'}{2}$

$\therefore$ 当 $j>\max\{j_0,j_1\}$ 时, $\quad |f(z')|\leqslant|f(z')-f(z_{n_j})|+|f(z_{n_j})-f_{n_j}(z_{n_j})|<\varepsilon'$ $\quad\therefore$ $f(z')=0$

这与 $f(z)$ 在 $\overline{U(z_0,\delta)}$ 内只有一个零点矛盾, 故$\{z_0\}=\overline{U(z_0,\delta)}\cap\left(\lim\limits_{p\to+\infty}\overline{\bigcup\limits_{n\geqslant p}Z_n}\right)=\overline{U(z_0,\delta)}\cap\bigcap\limits_{p=1}^{+\infty}\overline{\bigcup\limits_{n\geqslant p}Z_n}$

$\therefore$ $Z=\bigcap\limits_{p=1}^{+\infty}\overline{\bigcup\limits_{n\geqslant p}Z_n}\subset\overline{\bigcup\limits_{n\geqslant p}Z_n}\quad(\forall p\in N_+)$

□

15 **应用幅角原理证明下列胡尔维茨定理:**
设 $\{f_n(z)\}$ 是在区域 D 内内闭一致收敛于 $f(z)$ 的解析函数列, 且所有 $f_n(z)$ 在 D 内无零点. 那么 $f(z)$ 在 D 内或者恒等于零, 或者没有零点.

Proof.

$\because$ $\{f_n(z)\}$在 D 内内闭一致收敛于 $f(z)$ $\quad\therefore$ 由魏尔斯特拉斯定理,$f(z)$ 解析, 且 $f_n'(z)$ 内闭一致收敛于$f'(z)$

$\because$ 若 $f(z)$ 在 D 内有 k 阶孤立零点 z_0, 则存在 $\delta>0,\ s.t.\ U(z_0,\delta)\subset D, f(z)\neq 0(\forall z\in\mathring{U}(z_0,\delta)$

$\therefore$ 由幅角原理 $\quad\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-z_0|=\delta}\dfrac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=k>0$

$\because$ $f_n(z)$在 D 内没有零点 $\quad\therefore$ $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-z_0|=\delta}\dfrac{f_n'(z)}{f_n(z)}\mathrm{d}z=0$

$\because$ 在 $|z-z_0|=\delta$ 上,$f_n(z)\rightrightarrows f(z),f_n'(z)\rightrightarrows f'(z)$ $\quad\therefore$ $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-z_0|=\delta}\dfrac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\delta}\dfrac{f_n'(z)}{f_n(z)}\mathrm{d}z=0$

矛盾, 故 $f(z)$ 在 D 内没有孤立零点

□

6 保形映射

小结

习题六

1 如果单叶解析函数 $w=f(z)$ 把 z 平面上可求面积的区域 D 映射成 w 平面上的区域 D^*, 把 D 中分段光滑曲线 l 映射成 D^* 中的曲线 l^*. 证明 l^* 的长度是

$$\int_l |f'(z)||\mathrm{d}z|.$$

D^* 的面积是

$$\iint_D |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Proof.

(1) $\because$ $f(z)$是 D 上单叶解析函数 $\quad\therefore\quad \forall z\in D, f'(z)\neq 0$

$$\because\quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=f'(z)\neq 0,\quad (z\in D)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad L_{l^*}&=\int_{l^*}\mathrm{d}s\\&=\int_{l^*}|\mathrm{d}w|\\&=\int_l |f'(z)||\mathrm{d}z|\end{aligned}$$

(2) $\because$ $f(z)$是 D 上单叶解析函数 $\quad\therefore\quad \forall z\in D, f'(z)\neq 0$, 由 C-R 条件有 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}&=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\\&=|f'(z)|^2\neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{D^*}&=\iint_{D^*}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\iint_D |f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

□

2 **如果函数 $f(z)$ 在可求面积的区域 D 内解析，并且满足条件 $|f(z)| \leqslant 1$，证明**

$$\iint_D |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \pi.$$

Proof.

$\because \quad w=f(z)$将 z 平面上的区域 D 映射到 w 平面上的区域 $D^*, |w|=|f(z)| \leqslant 1$

$\therefore \quad D^* \subset \{w:|w| \leqslant 1\} \qquad \therefore \quad S_{D^*} \leqslant \pi \qquad \therefore \quad$ 由第 1 题 $\displaystyle\iint_D |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \pi$

□

3 **（1）证明 $w=z+\dfrac{1}{n}z^n$ 在 $\{z:|z|<1\}$ 内单叶;**

（2）证明 $w=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ 在 $\left\{z:|z|<\dfrac{1}{2}\right\}$ 内单叶;

（3）证明 $w=z+z^2$ 在 $\left\{z:|z|<\dfrac{1}{2}\right\}$ 内单叶.

Proof.

(1) $\quad \because \quad \forall z_1,z_2 \in \{z:|z|<1\}, z_1 \neq z_2, \quad \left|z_1-z_2+\dfrac{1}{n}(z_1^n-z_2^n)\right| \geqslant |z_1-z_2|\left[1-\dfrac{1}{n}(|z_1|^{n-1}+|z_1|^{n-2}|z_2|+\cdots+|z_2|^n)\right]>0$

$\quad \therefore \quad w$在 $\{z:|z|<1\}$ 内单叶

(2) $\quad \because \quad \forall z_1,z_2 \in \left\{z:|z|<\dfrac{1}{2}\right\}, z_1 \neq z_2, \quad \left|\dfrac{z_1}{(1-z_1)^2}-\dfrac{z_2}{(1-z_2)^2}\right| \geqslant \dfrac{|z_1-z_2|(1-|z_1z_2|)}{|1-z_1|^2|1-z_2|^2}>0$

$\quad \therefore \quad w$在 $\left\{z:|z|<\dfrac{1}{2}\right\}$ 单叶

(3) $\quad \because \quad \forall z_1,z_2 \in \left\{z:|z|<\dfrac{1}{2}\right\}, z_1 \neq z_2, \quad |z_1+z_1^2-z_2-z_2^2| \geqslant |z_1-z_2|(1-|z_1|-|z_2|)>0$

$\quad \therefore \quad w$在 $\left\{z:|z|<\dfrac{1}{2}\right\}$ 单叶

□

4 **设 $f(z)=\dfrac{1}{2}z^2+\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n}z^n$ 在 $\{z:|z|<R\}$ 内解析，并且 $|f'(z)| \leqslant M$，其中 $R,M \in (0,+\infty)$. 证明：$\forall z_0 \in \left\{z:0<|z_0|<\dfrac{R^2}{M+R}\right\}$, $f'(z_0) \neq 0$, 从而 $f(z)$ 在 z_0 的一个领域内单叶.**

Proof.

$\because \quad f(z)=\dfrac{1}{2}z^2+\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n}z^n$在 $|z|<R$ 内解析 $\qquad \therefore \quad f'(z)=z+\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}a_nz^{n-1}$在 $|z|<R$ 内解析

$\because \quad |f'(z)| \leqslant M, \quad z \in \{z:|z|<R\} \qquad \therefore \quad |a_n| \leqslant \dfrac{M}{R^n}$

$\because \quad \forall z_0 \in \left\{z:0<|z_0|<\dfrac{R^2}{M+R}\right\}, \quad (M+R)|z_0|<R^2 \qquad \therefore \quad (M+R)|z_0|^2<R^2|z_0|$

$\therefore \quad M|z_0|^2<R|z_0|(R-|z_0|) \qquad \therefore \quad \dfrac{M|z_0|^2}{R(R-|z_0|)}<|z_0|$

$\therefore \quad |f'(z_0)| \geqslant |z_0| - M\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{|z_0|}{R}\right)^n = |z_0| - \frac{M}{R}\cdot\frac{|z_0|^2}{R-|z_0|} > 0$

$\therefore \quad f(z)$在 z_0 的一个领域内单叶

□

5 **设** $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ **是一分式线性函数. 如果采用矩阵记号, 令**

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}.$$

那么已给函数的反函数是

$$z = \frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}.$$

Proof.

$\because \quad w = \dfrac{az+b}{cz+d}$是分式线性函数 $\quad \therefore \quad w(cz+d) = az+b, \quad \begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} \neq 0$

$\therefore \quad (wc-a)z = b-wd, \quad w \neq \dfrac{a}{c} \quad \therefore \quad z = \dfrac{-dw+b}{cw-a}$

$\because \quad \begin{pmatrix}-d & b\\ c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}bc-ad & 0\\ 0 & bc-ad\end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{-d}{bc-ad} & \dfrac{b}{bc-ad}\\ \dfrac{c}{bc-ad} & \dfrac{-a}{bc-ad}\end{pmatrix}$

$\therefore \quad z = \dfrac{-dw+b}{cw-a} = \dfrac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}$

□

6 **设有两分式线性函数** $w = \dfrac{\alpha_1 w_1+\beta_1}{\gamma_1 w_1+\delta_1}$ **及** $w_1 = \dfrac{\alpha_2 z+\beta_2}{\gamma_2 z+\delta_2}$**, 如果改用矩阵记号, 令**

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix},$$

那么 $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Proof.

$\because \quad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2+\beta_1\gamma_2 & \alpha_1\beta_2+\beta_1\delta_2\\ \gamma_1\alpha_2+\delta_1\gamma_2 & \gamma_1\beta_2+\delta_1\delta_2\end{pmatrix}$

$\because \quad w = \dfrac{\alpha_1 w_1+\beta_1}{\gamma_1 w_1+\delta_1}, w_1 = \dfrac{\alpha_2 z+\beta_2}{\gamma_2 z+\delta_2}$是分式线性函数

$\therefore \quad \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{vmatrix} \neq 0 \quad \therefore \quad \begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} \neq 0$

$$\therefore\quad w=\frac{\alpha_1\dfrac{\alpha_2 z+\beta_2}{\gamma_2 z+\delta_2}+\beta_1}{\gamma_1\dfrac{\alpha_2 z+\beta_2}{\gamma_2 z+\delta_2}+\delta_1}=\frac{(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\gamma_2)z+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\delta_2)}{(\gamma_1\alpha_2+\delta_1\gamma_2)z+(\gamma_1\beta_2+\delta_1\delta_2)}=\frac{az+b}{cz+d}$$

□

7 试用交比, 求满足下列条件的分式线性函数:
(1) 把 $-1,i,1+i$ 分别映射成 $0,2i,1-i$;
(2) 把 $-1,\infty,i$ 分别映射成 $\infty,i,1$.

Proof.

(1) $\because\quad (w_1,w_2,w,w_3)=(z_1,z_2,z,z_3)\qquad \therefore\quad \dfrac{w}{w-2i}:\dfrac{1-i}{1-i-2i}=\dfrac{z+1}{z-i}:\dfrac{1+i+1}{1+i-i}$

$\therefore\quad \dfrac{w}{w-2i}:\dfrac{1-i}{1-3i}=\dfrac{z+1}{z-i}:\dfrac{2+i}{1}\qquad \therefore\quad (1-3i)(2+i)(z-i)w=(1-i)(z+1)(w-2i)$

$\therefore\quad [(1-i)z+(1-i)-(5-5i)z+(5+5i)]w=(2+2i)(z+1)$

$\therefore\quad w=\dfrac{(2+2i)z+(2+2i)}{(-4+4i)z+6+4i}=\dfrac{-2iz-2i}{4z-1-5i}$

(2) $\because\quad (w_1,w_2,w,w_3)=(z_1,z_2,z,z_3)\qquad \therefore\quad \dfrac{1-i}{w-i}=\dfrac{z+1}{i+1}$

$\therefore\quad w=\dfrac{(i+1)(1-i)}{z+1}+i=\dfrac{iz+2+i}{z+1}$

□

8 如果 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 不为常数, 且没有零点, 证明 $|f(z)|$ 不可能在 D 内达到最小值.

Proof.

$\because$ $f(z)$在 D 内解析，不为常数，没有零点 $\qquad\therefore$ $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$在 D 内解析且不为常数

$\therefore$ 由最大模定理,$|g(z)|$ 在 D 内没有最大值 $\qquad\therefore$ $|f(z)|$在 D 内不能达到最小值

□

9 设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant a$ 上解析, 在圆 $|z|=a$ 上有 $|f(z)|>m$, 并且 $|f(0)|<m$, 其中 a 及 m 是有限正数, 证明 $f(z)$ 在 $|z|<a$ 内至少有一个零点.

Proof.

反证法：假设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内无零点. 则 $|f(z)|\neq 0\quad (|z|<1)$

$\because$ $f(z)$ 在 $|z|\leqslant a$ 上解析 $\qquad\therefore$ $f(z)$在 $|z|\leqslant a$ 上连续 $\qquad\therefore$ $|f(z)|$在 $|z|\leqslant a$ 上有最小值

$\because$ $\forall z\in|z|=a,|f(z)|>m>|f(0)|\qquad\therefore$ $f(z)$在 $|z|<a$ 内取得最小值且不恒为常数

与第 8 题结论矛盾. 故 $f(z)$ 在 $|z|<a$ 内至少有一个零点

□

10 **设在** $|z|<1$ **内**,$f(z)$ **解析, 并且** $|f(z)|<1$; **又设** $|\alpha|<1$. **证明：在** $|z|<1$ **内，有不等式**

$$\left|\frac{f(z)-f(\alpha)}{1-\overline{f(\alpha)}f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right|.$$

Proof.

$\because \quad w=\varphi(z)=\dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$ 在 $|z|<1$ 内解析, 把 $|z|<1$ 保形映射到 $|w|<1, \varphi(\alpha)=0$

$\therefore \quad z=\varphi^{-1}(w)$在 $|w|<1$ 内解析, 把 $|w|<1$ 映射为 $|z|<1, \varphi^{-1}(0)=\alpha$

令$g(z)=\dfrac{f(z)-f(\alpha)}{1-\overline{f(\alpha)}f(z)}$,则$g(z)=\varphi[f(z)], g(\alpha)=0$

$\because \quad F(w)=g[\varphi^{-1}(w)]$在 $|w|<1$ 内解析,$F(0)=g[\varphi^{-1}(0)]=g(\alpha)=0, |F(w)|=|g[\varphi^{-1}(w)]|=|g(z)|<1$

$\therefore$ 由施瓦茨引理, 当 $|w|<1$ 时,$|F(w)|\leqslant|w|$ $\quad \therefore \quad |g(z)|\leqslant\left|\dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right|$

$\therefore \quad \left|\dfrac{f(z)-f(\alpha)}{1-\overline{f(\alpha)}f(z)}\right| \leqslant \left|\dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right|$

□

11 **应用施瓦茨定理, 证明：把** $|z|<1$ **变为** $|w|<1$, **且把** α **变为** 0 **的保形双射一定有下列形状：**

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z},$$

这里 θ **是实常数**,α **是满足** $|\alpha|<1$ **的复常数.**

Proof.

设满足条件的映射为 $f(z)$

$\because \quad w=\varphi(z)=\dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$ 在 $|z|<1$ 内解析, 把 $|z|<1$ 保形映射到 $|w|<1, \varphi(\alpha)=0$

$\therefore \quad z=\varphi^{-1}(w)$在 $|w|<1$ 内解析, 把 $|w|<1$ 映射为 $|z|<1, \varphi^{-1}(0)=\alpha$

$\because \quad \xi=F(w)=f[\varphi^{-1}(w)]$在 $|w|<1$ 内解析,$F(0)=f[\varphi^{-1}(0)]=f(\alpha)=0, |F(w)|=|g[\varphi^{-1}(w)]|=|f(z)|<1$

$\therefore$ 由施瓦茨引理, 当 $|w|<1$ 时,$|F(w)|\leqslant|w|$

$\because \quad w=F^{-1}(\xi)$在 $|\xi|<1$ 内解析, 把 $|\xi|<1$ 映射为 $|w|<1, F^{-1}(0)=0$

$\therefore$ 由施瓦茨引理, 当 $|\xi|<1$ 时,$|F^{(-1)}(\xi)|\leqslant|\xi|$ $\quad \therefore \quad |w|\leqslant|F(w)|$

$\therefore$ 当 $|w|<1$ 时,$|F(w)|=|w|$ $\quad \therefore$ 由施瓦茨引理, 当 $|\xi|<1$ 时,$F(w)=e^{i\theta}w$

$\because \quad w=\varphi(z), z=\varphi^{-1}(w), F(w)=f[\varphi^{-1}(w)]$ $\quad \therefore$ 当 $|z|<1$ 时,$f(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$

□

12 **试做保形映射：**

(1) **把带形区域** $\pi<y<2\pi$ **映射成上半平面;**

(2) **把去掉上半虚轴的复平面映射成上半平面.**

Proof.

(1) $\because$ $z' = z - \pi i$将 $\pi < y < 2\pi$ 映射成 $0 < y < \pi$；e^z将 $0 < y < \pi$ 映射成上半平面

$\therefore$ $f(z) = e^{z-\pi i} = -e^z$

(2) $\because$ $z' = -iz$将去掉上半虚轴的复平面映射成去掉正实轴的复平面；

$(\sqrt{z})_0$将去掉正实轴的复平面映射成上半平面

$\therefore$ $f(z) = \sqrt{-iz} = e^{-\frac{\pi}{4}i}(\sqrt{z})_0$ 其中 $(\sqrt{z})_0$ 取当 $z = 1$ 时 $\sqrt{1} = 1$ 的一支

□

13 函数 $w = z^2$ 及 $z = \sqrt{w}$ 分别把 $x = C_1, y = C_2$ 及 $u = C_3, v = C_4$ 映射成 z 平面及 w 平面上的什么曲线？这里 x, y 与 u, v 分别是 z 与 w 的实部及虚部,C_1, C_2, C_3 及 C_4 是实常数.

Proof.

(1) $\because$ $w = u + iv = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ $\therefore$ $u = x^2 - y^2, v = 2xy$

当 $C_1 \neq 0$ 时

$w = z^2$将$x = C_1$映射成$C_1^2 - y^2 + i2C_1y$,即 w 平面上曲线:$v^2 + 4C_1^2(u - C_1^2) = 0$

当 $C_1 = 0$ 时

$w = z^2$将$x = 0$映射成$-y^2$,即 w 平面上曲线:$u \leqslant 0, v = 0$

当 $C_2 \neq 0$ 时

$w = z^2$将$y = C_2$映射成$x^2 - C_2^2 + 2iC_2x$,即 w 平面上曲线:$v^2 + 4C_1^2(C_2^2 - u^2) = 0$

当 $C_2 = 0$ 时

$w = z^2$将$y = 0$映射成x^2,即 w 平面上曲线:$u \geqslant 0, v = 0$

(2) $\because$ $z = x + iy = \sqrt{w} = \sqrt{u+iv}$ $\therefore$ $(x+iy)^2 = u + iv$ $\therefore$ $u = x^2 - y^2, v = 2xy$

$z = \sqrt{w}$将$u = C_3$映射成z 平面上曲线:$x^2 - y^2 = C_3$

$z = \sqrt{w}$将$v = C_4$映射成z 平面上曲线:$2xy = C_4$

□

14 设作保形映射:

(1) 把椭圆 $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{1}{16}$ 以外的区域映射成单位圆的外区域;

(2) 把双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 两支之间的区域映射成上半平面;

(3) 把抛物线 $v^2 = 4(u+1)$ 左方的区域映射成上半平面.

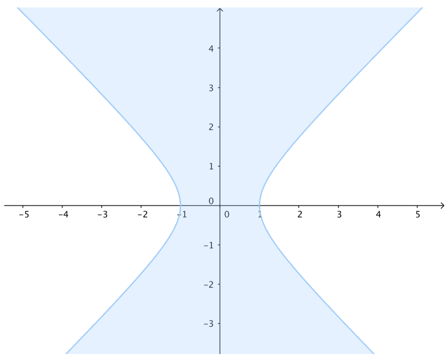
Proof.

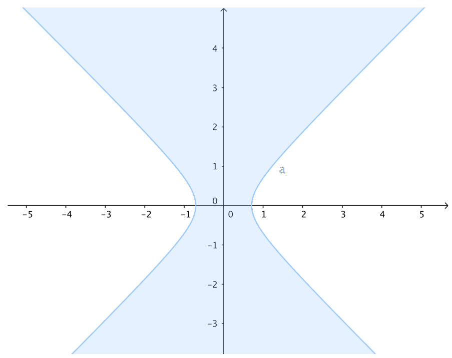
(1) $\because$ $z = \dfrac{1}{2}\left(w + \dfrac{1}{w}\right)$ $(w = u + iv, z = x + iy)$把扩充 w 平面上单位圆外区域保形双射成扩充 z 平面上去掉割线 $-1 \leqslant x \leqslant 1, y = 0$ 的区域

$\therefore \quad w = z + \sqrt{z^2-1}$的任一分支也实现同一双射, 且将椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=\dfrac{1}{16}$双射成 $|w|=2$

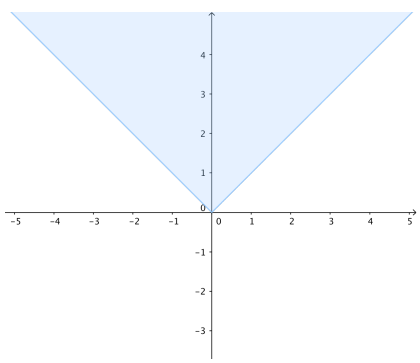
$\therefore \quad w = \dfrac{1}{2}(z+\sqrt{z^2-1})$把椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=\dfrac{1}{16}$ 以外的区域映射成单位圆的外区域

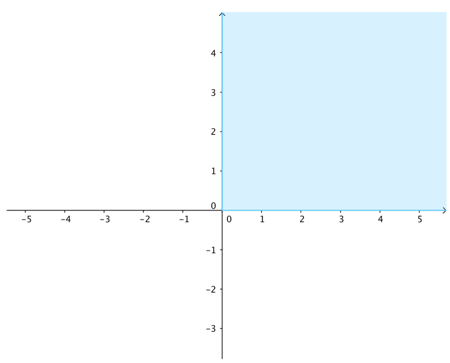
(2) $\qquad x^2-y^2=1 \quad \xrightarrow{z_1=\frac{z}{\sqrt{2}}} \quad 2x_1^2-2y_1^2=1$

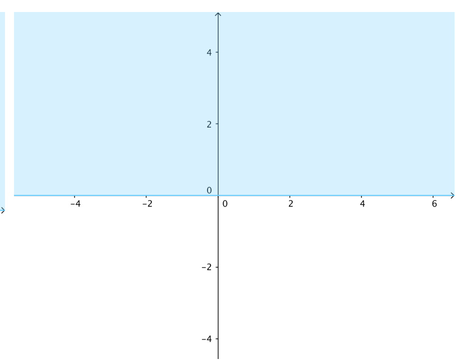




$$\xrightarrow{z_2=z_1+\sqrt{z_1^2-1}} \quad \begin{cases} z_2 = re^{i\theta} \\ \dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{4} \\ r \geqslant 0 \end{cases} \quad \xrightarrow{z_3=e^{-\frac{\pi}{4}i}z_2} \quad \begin{cases} x_3 \geqslant 0 \\ y_3 \geqslant 0 \end{cases} \quad \xrightarrow{z_4=z_3^2} \quad \mathrm{Im} z_4 \geqslant 0$$

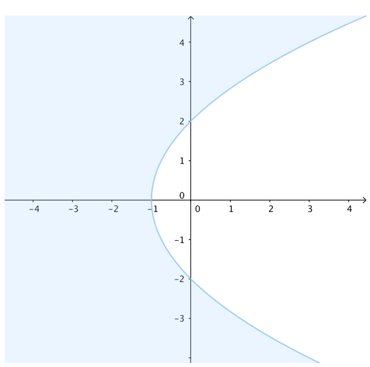


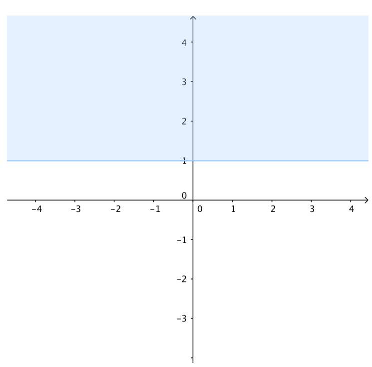


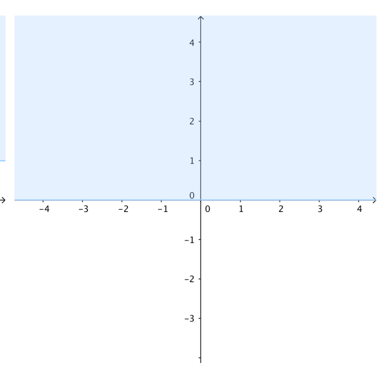


$$\therefore \quad z_4 = -i\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{z^2}{2}-1}\right)^2$$

(3) $\qquad v^2=4(u+1) \quad \xrightarrow{w_1=(\sqrt{w})_0} \quad \mathrm{Im} w_1 \geqslant 1 \quad \xrightarrow{w_2=w_1-i} \quad \mathrm{Im} w_2 \geqslant 0$







$\therefore \quad w_2=(\sqrt{w})_0-i$

$\square$

15 **试把圆盘** $|z|<1$ **保形映射成半平面** $\mathrm{Im}\, w>0$, **并且将点** $-1,1,i$ **映射成**

(1) $\infty,0,1$

(2) $-1,0,1.$

Proof.

(1) $\because \quad w=e^{i\theta}\dfrac{z-1}{z+1}$将 $1,-1$ 映射为 $0,\infty$

$\therefore \quad w$将圆 $|z|=1$ 映射为正实轴, 将关于圆 $|z|=1$ 对称的点映射为关于正实轴对称的点

$\because \quad w(i)=e^{i\theta}\dfrac{i-1}{i+1}=1 \qquad \therefore \quad \theta=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in Z)$

$\therefore \quad w=-i\dfrac{z-1}{z+1}=i\dfrac{1-z}{1+z}$

(2) $\because \quad (-1,1,z,i)=(-1,0,w,1) \qquad \therefore \quad \dfrac{z+1}{z-1}:\dfrac{i+1}{i-1}=\dfrac{w+1}{w}:\dfrac{2}{1}$

$\therefore \quad w=\dfrac{z-1}{(2i-1)z+(2i+1)}$把圆 $|z|=1$ 上不同三点 $-1,1,i$ 映射成 $-1,0,1$

$\therefore \quad w$把圆 $|z|=$ 映射成实轴 $\qquad \therefore \quad w$将 $|z|<1$ 映射成 $\mathrm{Im}\, w>0$

$\square$

16 **试把** $\mathrm{Im}\, z>0$ **保形映射成** $\mathrm{Im}\, w>0$, **并且把点**

(1) $-1,0,1;$

(2) $\infty,0,1;$

映射成 $0,1,\infty.$

Proof.

(1) $\because \quad (-1,0,z,1)=(0,1,w,\infty) \qquad \therefore \quad \dfrac{z+1}{z}:\dfrac{2}{1}=\dfrac{w}{w-1} \qquad \therefore \quad w=\dfrac{z+1}{-z+1}$

(2) $\because \quad (\infty,0,z,1)=(0,1,w,\infty) \qquad \therefore \quad \dfrac{1}{z}=\dfrac{w}{w-1} \qquad \therefore \quad w=\dfrac{1}{1-z}$

$\square$

17 **试作一单叶解析函数** $w=f(z)$, **把** $|z|<1$ **映射成** $|w|<1$, **并且使** $f(0)=\dfrac{1}{2}, f'(0)>0.$

Proof.

$\because$ 将 $|w|<1$ 映射为 $|z|<1$，且将 $\dfrac{1}{2}$ 及其关于 $|w|=1$ 的对称点 2 分别映射为 0、∞ 的分式线性函数有如下

形式:$e^{i\theta}\dfrac{w-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}w} \qquad (\theta\in R)$

$\therefore \quad z = w^{-1}(z) = e^{i\theta}\dfrac{w-\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}w} \qquad \therefore \quad w = \dfrac{2e^{-i\theta}z+1}{e^{-i\theta}z+2}$

$\because \quad f'(z) = \dfrac{3e^{-i\theta}}{(e^{-i\theta}z+2)^2}, f'(0) > 0 \qquad \therefore \quad \dfrac{3e^{-i\theta}}{4} > 0 \qquad \therefore \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \in R^+ \qquad \therefore \quad \begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases}$

$\therefore \quad w = \dfrac{2z+1}{z+2}$

□

18 **根据第一章习题一第 12 题, 证明 z_1 及 z_2 是关于圆 $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k(k>0)$ 的对称点.**

Proof.

令 $z = x+iy, z_n = x_n + iy_n \quad (n=1,2)$, 代入圆方程得

$\left(x - \dfrac{x_1-k^2x_2}{1-k^2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{y_1-k^2y_2}{1-k^2}\right)^2 = \dfrac{k^2[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]}{(1-k^2)^2}$

$\therefore \quad |z-z_0| = \rho, \qquad$ 其中 $z_0 = \dfrac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}, \rho = \dfrac{k|z_1-z_2|}{1-k^2}$

$\because \quad |z_1-z_0| = z_1 - \dfrac{z_1-k^2z_2}{1-k^2} = \dfrac{k^2z_2-k^2z_1}{1-k^2} = \dfrac{k^2(z_2-z_1)}{1-k^2} \qquad |z_2-z_0| = z_2 - \dfrac{z_1-k^2z_2}{1-k^2} = \dfrac{z_2-z_1}{1-k^2}$

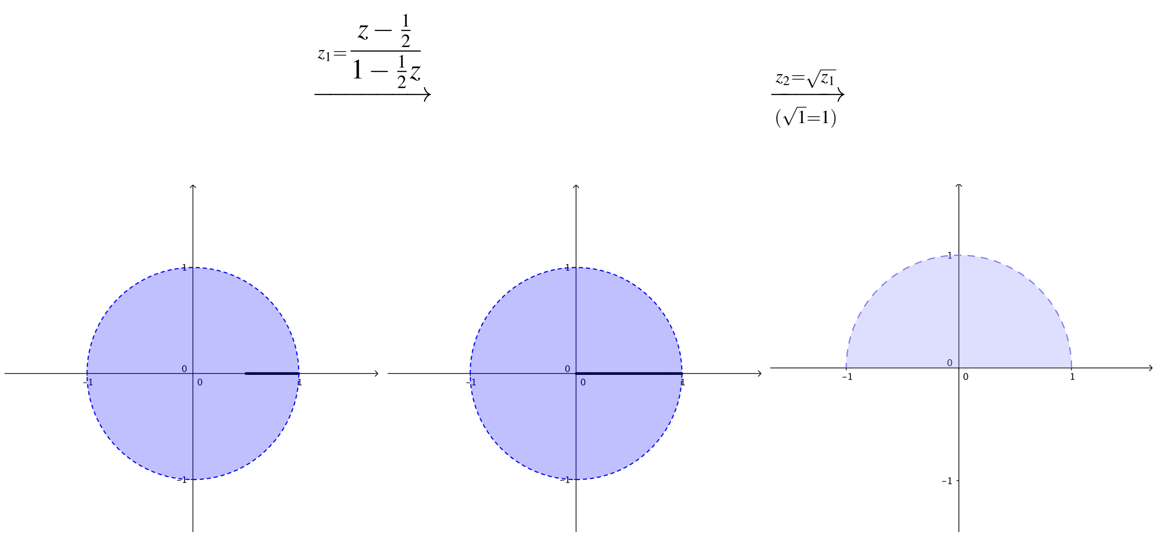
$\therefore \quad |z_1-z_0|\cdot|z_2-z_0| = \dfrac{k^2}{(1-k^2)^2}|z_2-z_1|^2 = \rho^2$

$\therefore \quad z_1, z_2$是关于圆 $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k(k>0)$ 的对称点

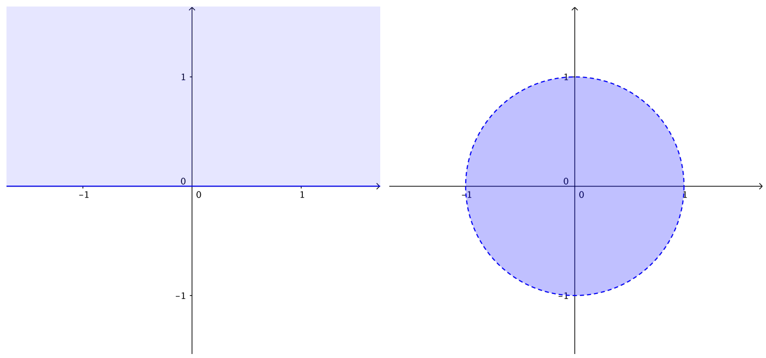
□

19 **在圆盘 $|z|<1$ 中除去实轴上的半闭区间 $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$. 得一区域. 试把这一区域保形映射成圆盘 $|w|<1$.**

Proof.



$$\xrightarrow{z_3=\left(\frac{z_2+1}{z_2-1}\right)^2} \qquad \xrightarrow{w=\frac{z_3-i}{z_3+i}}$$



$$\therefore \quad w=\frac{(z_2+1)^2-(z_2-1)^2 i}{(z_2+1)^2+(z_1-1)^2 i}, 其中 z_2=\sqrt{\frac{2z-1}{2-z}}$$

□

20 **试作保形映射**:

(1) **把** $|z|<1$ **及** $|z-1|<1$ **的公共部分映射成** $|w|<1$;

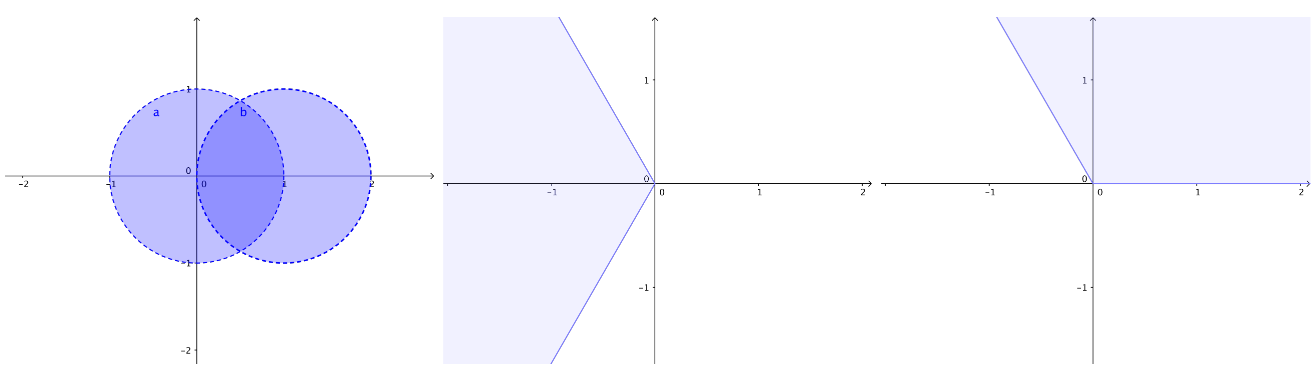
(2) **把扇形** $0<\arg z<a(<2\pi), |z|<1$ **映射成** $|w|<1$;

(3) **把圆** $|z|=2$ **及** $|z-1|=1$ **所夹的区域映射成** $|w|<1$;

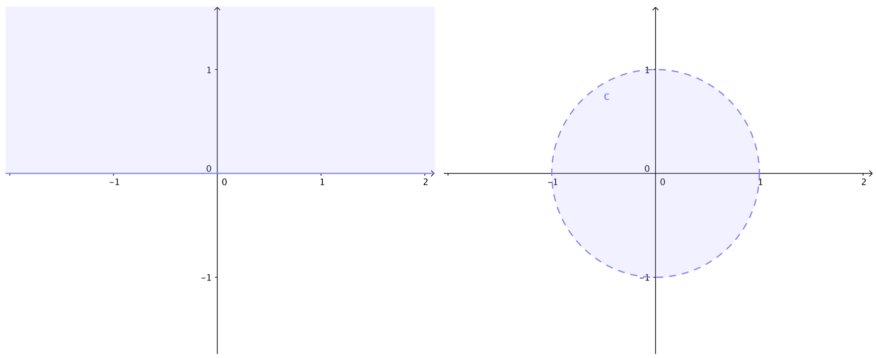
(4) **把圆** $|z|<1$ **映射成带形** $0<v<1$, **并把** $-1,1,i$ **映射成** ∞,∞,i.

Proof.

(1) $$\xrightarrow{z_1=\frac{z-\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}{z-\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}} \qquad \xrightarrow{z_2=z_1 e^{-\frac{2\pi}{3}i}}$$

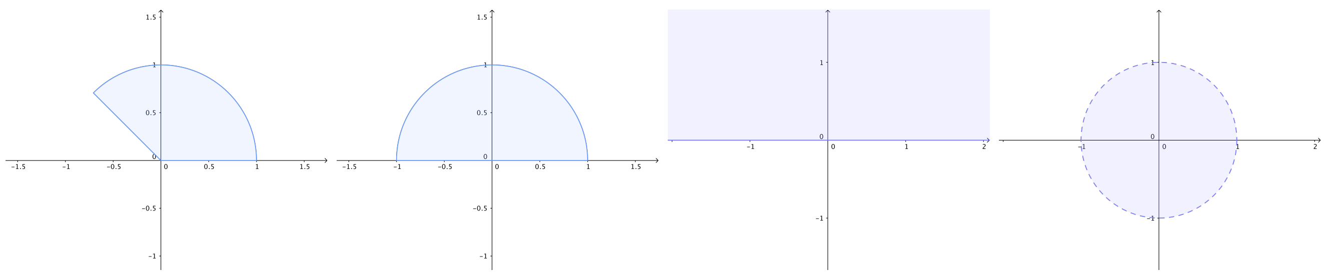


$$\xrightarrow{z_3=z_2^{\frac{3}{2}}} \qquad \xrightarrow{w=\frac{z_3-i}{z_3+i}}$$



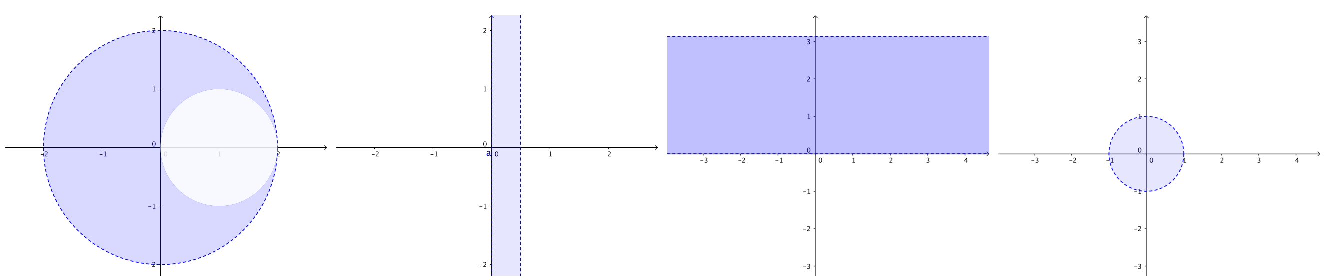
$$\therefore \quad w = \frac{z_1^{\frac{3}{2}} - i}{z_1^{\frac{3}{2}} + i}, \text{其中} z_1 = \frac{z - \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}{z - \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}$$

(2) $\xrightarrow{z_1=z^{\frac{\pi}{\alpha}}}$ $\xrightarrow{z_2=\left(\frac{z_1+1}{z_1-1}\right)^2}$ $\xrightarrow{w=\frac{z_3-i}{z_3+i}}$



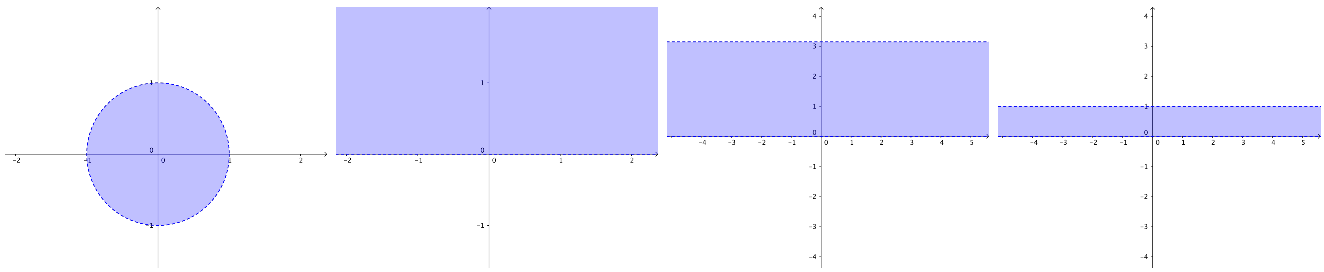
$$\therefore \quad w = \frac{\left(z^{\frac{\pi}{\alpha}}+1\right)^2 - i\left(z^{\frac{\pi}{\alpha}}-1\right)^2}{\left(z^{\frac{\pi}{\alpha}}+1\right)^2 + i\left(z^{\frac{\pi}{\alpha}}-1\right)^2}$$

(3) $\xrightarrow{z_1=\frac{z}{z-2}}$ $\xrightarrow{z_2=2\pi i z_1}$ $\xrightarrow{w=\frac{e^{z_2}-i}{e^{z_2}+i}}$



$$\therefore \quad w = \frac{e^{2\pi i z_1} - i}{e^{2\pi i z_1} + i}, \text{其中} z_1 = \frac{z}{z-2}$$

(4) $\xrightarrow{z_1=-i\frac{z+1}{z-1}}$ $\xrightarrow[(\ln 1=0)]{z_2=\ln z_1}$ $\xrightarrow{w=\frac{1}{\pi}z_2}$



$$\therefore \quad w = \frac{1}{\pi}\ln\left(-i\frac{z+1}{z-1}\right)$$

□

21

Proof.

□

22

Proof.

□

23

Proof.

□

7 解析开拓

小结

习题七

1 证明对称原理的推广。

Proof.

$\because$ 作$Z=az+b$将 L 变为 Z 平面上的实轴, 将 I 映射为实轴上的 I', 将关于 L 对称的区域 D,D^* 分别映射为关于实轴对称的 D_1,D_1^*, 将关于 L 对称的点 z,z^* 分别映射为关于实轴对称的 $Z,\overline{Z}$

作$W=cw+d$将 L_1 变为 W 平面上的实轴, 将 I_1 映射为实轴上的 I_1'

$w=f(z)$在 D 内及 I 上连续, 在 D 内解析

$\therefore$ $W=\Phi(Z)=cf\left(\dfrac{Z}{a}-\dfrac{b}{a}\right)+d$在 D_1 及 I' 上连续, 在 I' 上取实值

$\therefore$ 由原对称原理,$W=\Phi(Z)$ 的定义域能扩充到 D_1^* 上 $W(Z)=\begin{cases}\Phi(Z), & z\in D_1\\ \overline{\Phi(\overline{Z})}, & z\in D_1^*\end{cases}$ $W(Z)$在 $D_1\cup D_1^*\cup I'$ 上解析

$\therefore$ 逆变换$w=\dfrac{W}{c}-\dfrac{d}{c}=\dfrac{\Phi(az+b)}{c}-\dfrac{d}{c}$把 I_1' 变为 I_1, 把关于 L 对称的 z 和 z^* 变成关于 L_1 的对称点，w 在 $D\cup D^*\cup I$ 上解析

$\therefore$ $w=\begin{cases}f(z), & z\in D\\ \overline{f(\overline{z})}, & z\in D^*\end{cases}$

在上面的推广中，若将直线 L,L_1 改为圆周时, 上述证明中若将 $Z=az+b$ 和 $W=cw+d$ 改为分式线性函数 $Z=\dfrac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ 和 $W=\dfrac{a_2w+b_2}{c_2w+d_2}$, 分别将圆周 L、L_1 变为 Z 平面、W 平面上的实轴，上述结论不变

□

2 设函数 $w=f(z)$ 在 $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ 上单叶解析，并且把 $\operatorname{Im} z>0$ 保形映射成 $|w|<1$, 把 $\operatorname{Im} z=0$ 映射成 $|w|=1$. 证明 $f(z)$ 一定是分式线性函数.

Proof.

$\because$ $w=f(z)$把 $\operatorname{Im} z=0$ 映射成 $|w|=1$ $\quad\therefore$ 存在 $w_0:|w_0|=1$, 使$f(\infty)=w_0$

$\because$ $w=f(z)$的反函数$z=g(w)$在 $|w|\leqslant 1$ 上除 $w=w_0$ 外是单叶解析的, 且在 $|w|=1$(除 $w=w_0$ 外) 上取实值

$\therefore$ 由推广的对称原理,$z=g(w)$可经 $|w|=1$（除 $w=w_0$ 外）解析开拓到圆外，得到扩充 w 平面上除 $w=w_0$ 外的单叶解析函数

$\because \quad w_0$是$G(w)=\dfrac{1}{g(w)}$的可去奇点, 规定 $G(w_0)=0$, 则 $G(w)$ 在 w_0 的邻域内单叶解析 $\quad\therefore \quad G'(w_0)\neq 0$

$\therefore \quad w_0$是 $G(w)$ 的一阶零点 $\quad\therefore \quad w_0$是 $g(w)$ 在扩充复平面上唯一的一阶极点

$\therefore \quad$ 由习题四第 14 题,$g(w)$ 为分式线性函数 $\quad\therefore \quad f(z)$是分式线性函数

□

3 证明: 如果整函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在实轴上取实值，在虚轴上取虚值，那么 $f(z)$ 是奇函数.

Proof.

设$a_n=\alpha_n+i\beta_n, z=x+iy \quad (\alpha_n\beta_n, x, y\in R, n\in N_+)$

$\because \quad \forall x\in R, f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha+i\beta_n)x^n\in R \quad\therefore \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_n x^n=0 \quad\therefore \quad \beta_n=0 \quad (n\in n_+)$

$\therefore \quad f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha_{4n}z^{4n}+\alpha_{4n+1}z^{4n+1}+\alpha_{4n+2}z^{4n+2}+\alpha_{4n+3}z^{4n+3})$

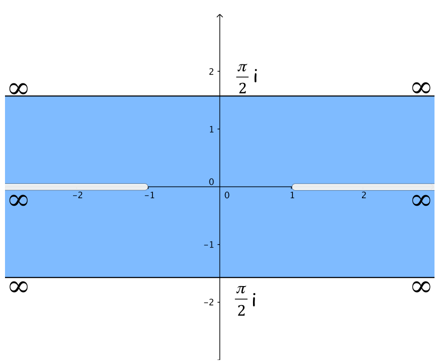
$\because \quad \forall y\in R, f(iy)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(iy)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha_{4n}y^{4n}+i\alpha_{4n+1}y^{4n+1}-\alpha_{4n+2}y^{4n+2}+i\alpha_{4n+3}y^{4n+3}), \mathrm{Re}f(iy)=0$

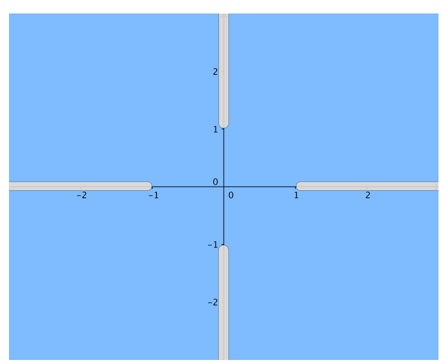
$\therefore \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha_{4n}y^{4n}-\alpha_{4n+2}y^{4n+2})=0 \quad\therefore \quad \alpha_{4n}=\alpha_{4n+2}=0 \quad (n\in N_+)$

$\therefore \quad f(-z)=-f(z)$

□

4 试用对称原理把下列图形所示的区域分别保形映射为上半平面:





Proof.

(1) 记已给区域为 G, 沿 $(-1,1)$ 作辅助割线，考虑上半带形 $D=\left\{z:0<\mathrm{Im}\ z<\dfrac{\pi}{2}\right\}$. 作$z_1=e^{2z}$,把 D 映射为 $\{z_1:0<\arg z_1<\pi\}, -1, 1$ 分别映射为 e^{-2}, e^2

再作映射$z_2=\dfrac{z_1-\mathrm{ch}\ 2}{\mathrm{sh}\ 2}$,映射为$\{z_2:0<\arg z_2<\pi\}, -1, 1$仍映射为 $-1, 1$, 其中 $\mathrm{ch}\ z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$, $\mathrm{sh}\ z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$

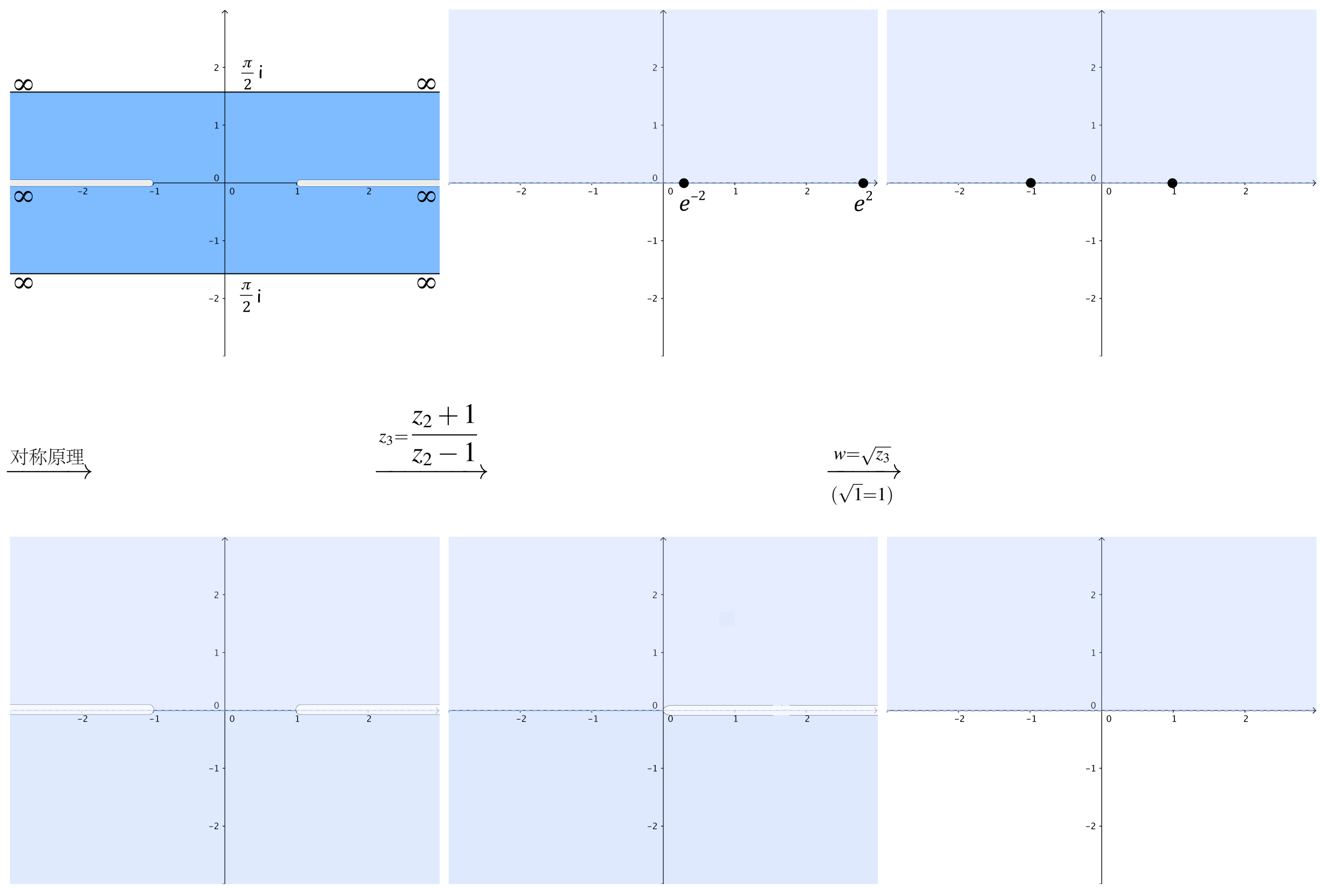
$\therefore \quad z_2=\dfrac{e^{2z}-\mathrm{ch}\ 2}{\mathrm{sh}\ 2}=f(z)$

令 z 平面上 $I=(-1,1)$, 则$I'=f(I),I'=(-1,1)$为 z_2 平面上实轴区间, 且 $f(z)$ 在 D 内单叶, 在 $D+I$ 上连续

$\because$ 由对称原理,z_2,z_1将 G 映射为 z_2 平面上去掉区间 $(-\infty,-1)$ 及 $(1,+\infty)$ 而得的区域

$z_3=\dfrac{z_2+1}{z_2-1}$将 $-1,\infty,1$ 分别映射为 $0,1,\infty$, 把上述区域映射为 z_3 平面去掉沿正实轴 (包括 0) 的区域

$\therefore$ $w=\sqrt{z_3}$最终将区域映射为上半平面



$$\therefore\quad w=\sqrt{\frac{\dfrac{e^{2z}-\mathrm{ch}\ 2}{\mathrm{sh}\ 2}+1}{\dfrac{e^{2z}-\mathrm{ch}\ 2}{\mathrm{sh}\ 2}-1}}=\sqrt{\frac{e^{2z}-\mathrm{ch}\ 2+\mathrm{sh}\ 2}{e^{2z}-\mathrm{ch}\ 2-\mathrm{sh}\ 2}}$$

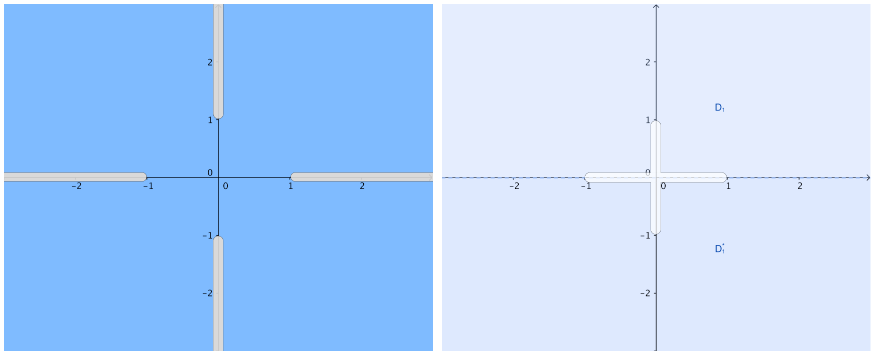
(2) 设已给区域为 D,$z_1=\dfrac{1}{z}$ 将 D 映射为上下对称的 D_1,D_1^*

沿 $I=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 作辅助割线，考虑 z_1 平面的上半平面 D_1, 函数 $z_3=\sqrt{z_1^2+1}$ 在 D 内解析，在 $D+I$ 上连续

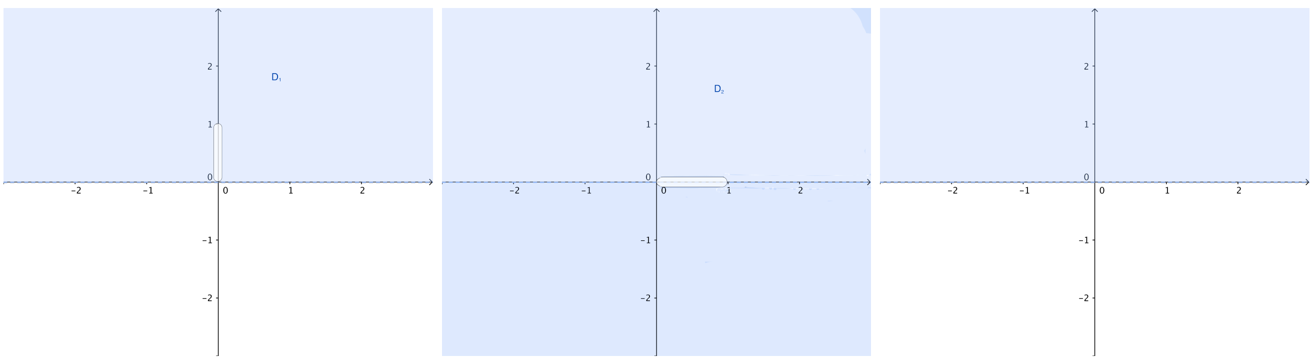
$\therefore$ 它可通过 I 解析延拓到 D_1^*, 并将 D 映射为 D_3

令$z_4=\dfrac{\sqrt{2}-z_3}{\sqrt{2}+z_3}$,它把 D_3 映射为 D_4.$w=\sqrt{z_4}$ 将 D_4 映射为上半平面 G

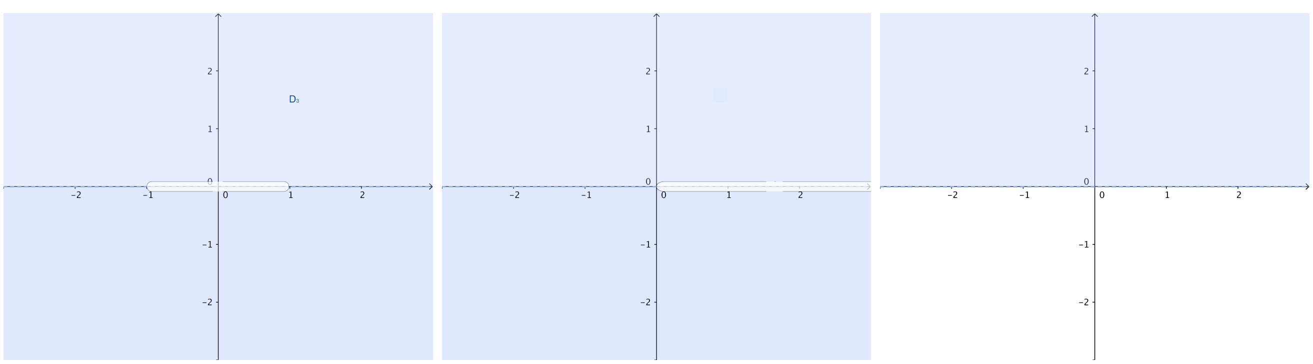
$$\xrightarrow{z_1=\frac{1}{z}}$$



$$\xrightarrow{z_2=z_1^2+1} \qquad \xrightarrow{z_3=\sqrt{z_2}}$$



$$\xrightarrow{\text{对称原理}} \qquad \xrightarrow{z_4=\frac{\sqrt{2}-z_3}{\sqrt{2}+z_3}} \qquad \xrightarrow{w=\sqrt{z_4}}$$



$$\therefore \quad w=\sqrt{\frac{\sqrt{2}z-\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{2}z+\sqrt{1+z^2}}}$$

□

5 **设有圆环 $D=\{z\in C: r_1<|z|<r_2\}$ 及 $G=\{w\in C: R_1<|w|<R_2\}$, 其中 r_1,r_2,R_1 及 R_2 是有限数. 求证：存在单叶函数 $w=f(z)$, 使得 $G=f(D)$ 的必要与充分条件是 $\frac{r_1}{r_2}=\frac{R_1}{R_2}$.**

Proof.

必要性

$\because\quad \frac{r_1}{r_2}=\frac{R_1}{R_2}\qquad \therefore\quad$ 单叶函数$w=f(z)=\frac{R_1}{r_1}z=\frac{R_2}{r_2}z$满足$G=f(D)$

充分性

令 $D'=\left\{z'\in C:\frac{r_1}{r_2}<|z'|<1\right\},G'=\left\{w'\in C:\frac{R_1}{R_2}<|z'|<1\right\}$

$\because\quad$ 存在单叶函数 $w=f(z)$, 使得 $G=f(D)\qquad\therefore\quad$ 单叶函数 $w'(z')=\frac{R_1}{R_2}f\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$ 满足 $f(z')$ 满足 $G'=f(D')$

$\because\quad f(z)$在 D 内解析, 在 $|z'|=\frac{r_1}{r_2}$ 及 D' 上连续

$\therefore\quad$ 由推广的对称原理,$f(z')$ 可解析延拓到$D_1=\left\{z\in C:\frac{r_1^2}{r_2^2}<|z|\leqslant\frac{r_1}{r_2}\right\}$. 相应地, 反函数 $z'=f^{-1}(w')$ 从 G' 解析延拓至$G_1=\left\{w\in C:\frac{R_1^2}{R_2^2}<|w|\leqslant\frac{R_1}{R_2}\right\}$

将 $D'\cup\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}D_k\right)$ 重复上述过程, 得到$D_n=\left\{z\in C:\frac{r_1^{2n}}{r_2^{2n}}<|z|\leqslant\frac{r_1^{2n-2}}{r_2^{2n-2}}\right\},G_n=\left\{w\in C:\frac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}<|w|\leqslant\frac{R_1^{2n-2}}{R_2^{2n-2}}\right\}$

$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{r_1^{2n}}{r_2^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{R_1^{2n}}{R_2^{2n}}=0\qquad\therefore\quad f(z),f^{-1}(z)$可分别延拓至 z 平面及 w 平面上去心单位圆盘上的单叶函数

$\because\quad \lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{w\to 0}f^{-1}(w)=0\qquad\therefore\quad$ 令 $f(0)=f^{-1}(0)=0$, 则 $w=f(z)$ 把 z 平面单位圆盘映射为 w 平面单位圆盘

$\therefore\quad$ 由施瓦茨引理$f(z)=\lambda z,|\lambda|=1$

$\because\quad f\left(\left\{z:|z|=\frac{r_1}{r_2}\right\}\right)=\left\{w:|w|=\frac{R_1}{R_2}\right\}\qquad\therefore\quad \frac{r_1}{r_2}=\frac{R_1}{R_2}$

□

6 **级数**

$$-\frac{1}{z}-1-z-z^2-\cdots$$

在 $0<|z|<1$ 内所定义的函数是否可以解析开拓为级数

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots$$

在 $|z|>1$ 内所定义的函数?

Proof.

$$\begin{aligned}\because\quad -\frac{1}{z}-1-z-z^2-\cdots&=-\frac{1}{z}(1+z+z^2+\cdots)\\&=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{z(1-z)} \qquad (0<|z|<1)$$

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots = \frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$= -\frac{1}{z(1-z)} \qquad (|z|>1)$$

$f(z) = -\dfrac{1}{z(1-z)}$ 在复平面上除 $z=0$ 和 $z=1$ 外处处解析

∴　函数元素 $f(z)$ 是上述两个级数所定义的函数元素的直接解析开拓

∴　$-\dfrac{1}{z}-1-z-z^2-\cdots$ 在 $0<|z|<1$ 内所定义的函数可以解析开拓为级数 $\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^4}+\cdots$ 在 $|z|>1$ 内所定义的函数

□

7 **证明: 级数**

$$f_1(z) = z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\cdots$$

与

$$f_2(z) = \ln 2-\frac{1-z}{2}-\frac{(1-z)^2}{2\cdot 2^2}-\frac{(1-z)^3}{3\cdot 2^3}-\cdots$$

在 $|z|<1$ 与 $|z-1|<2$ 内所定义的函数互为直接解析开拓.

Proof.

∵　$f_1(z) = z-\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{1}{3}z^3-\cdots = \ln(1+z) \qquad (|z|<1)$

$$f_2(z) = \ln 2-\frac{1-z}{2}-\frac{(1-z)^2}{2\cdot 2^2}-\frac{(1-z)^3}{3\cdot 2^3}-\cdots$$

$$= \ln 2+\frac{z-1}{2}-\frac{(z-1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(z-1)^3}{3\cdot 2^3}-\cdots$$

$$= \ln 2+\ln\left(1+\frac{z-1}{2}\right)$$

$$= \ln(1+z) \qquad (|z-1|<2)$$

在 $|z|<1$ 与 $|z-1|<2$ 的公共部分 $|z|<1$ 内 $f_1(z)=f_2(z)$

∴　两级数定义的函数互为直接解析开拓

□

8 **证明：级数**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$$

所定义的函数在左半平面内解析，并可解析开拓到除点 $z=0$ 外的整个复平面.

Proof.

$$\because \quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n}{1-\frac{1+z}{1-z}}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1+z}{1-z}}$$

收敛区域为$\left|\frac{1+z}{1-z}\right|<1$, 即$x<0$ $\quad\therefore\quad$ 该级数所定义的函数在左半平面内解析

$\because \quad z=0$ 为$f(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1+z}{1-z}}=\dfrac{z-1}{2z}$奇点,$f(z)$ 在 $z\neq 0$ 处解析

$\therefore \quad f(z)$ 可解析开拓到除点 $z=0$ 外的整个复平面

□

9 **试问下列实变数实值函数能否解析开拓到复平面上:**

(1) $f(x)=|x|$;

(2) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$;

(3) $f(z)$ **在** $[a,b]$ **上任一点可展开成实幂级数**.

Proof.

(1) $\quad\because\quad f(z)=|x|$在 $x=0$ 处不可导 $\quad\therefore\quad$ 不能解析开拓到复平面上

(2) $\quad\because\quad f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$在 $x=0$ 处不能展开为幂级数 $\quad\therefore\quad$ 不能解析开拓到复平面上

(3) $\quad\because\quad \forall x_1\in[a,b], f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n^{(1)}(x-x_1)^n$在 $I_1=\{x:|x-x_1|<r_1\}$ 收敛,r_1 为收敛半径

令 $f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n^{(1)}(z-x_1)^n$, 则 $f_1(z)$ 在 $C_1=\{z:|z-x_1|<r_1\}$ 内收敛,C_1 为收敛圆

$\therefore$ 由有限覆盖定理, 存在有点限个数 $x_1,x_2,\cdots,x_m\in[a,b]$, 使得 $f_i(z)$ 在 $C_i=\{z:|z-x_i|<r_i\}$ 内收敛

令 $D=\bigcup\limits_{n=1}^{m}C_n$, 则$D\supset[a,b]$

$\therefore\quad F(z)=f_i(z),\quad z\in C_i$ 特别地, 在 $[a,b]$ 上$F(x)=f(x)$ $\quad\therefore\quad f(x)$可开拓至复平面

□

10 **证明** $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}z^{n!}$ **的自然边界是** $|z|=1$.

Proof.

□

11 函数 $w=\sqrt{e^z}$ 是否是多值解析函数?

Proof.

□

12 试作函数 $f(z)=\sqrt{z+1}$ 的黎曼面.

Proof.

□

13

Proof.

□

14

Proof.

□

8　调和函数

小结

习题八

1　设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，而且不等于零. 直接计算证明：在 D 内，$\Delta\ln|f(z)|=0$. 若 $|f'(z)|\neq 0,\Delta|f(z)|>0$.

Proof.

$$\text{设}z=x+iy, f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$\because\quad f(z)\text{在 } D \text{ 内解析且不为零}\qquad\therefore\quad \begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \\ u_{xx}+u_{yy}=v_{xx}+v_{yy}=0 \quad u^2+v^2>0 \end{cases}$$

$$\because\quad |f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$$

$$\therefore\quad \ln|f(z)|=\frac{1}{2}\ln(u^2(x,y)+v^2(x,y))$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \Delta\ln|f(z)| &= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln(u^2(x,y)+v^2(x,y)))+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\ln(u^2(x,y)+v^2(x,y)))\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{u^2+v^2}\cdot(uu_x+vv_x)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{u^2+v^2}\cdot(uu_y+vv_y)\right] \\
&= \frac{(u_x^2+uu_{xx}+v_x^2+vv_{xx})(u^2+v^2)-(uu_x+vv_x)(2uu_x+2vv_x)}{(u^2+v^2)^2} \\
&\quad +\frac{(u_y^2+uu_{yy}+v_y^2+vv_{yy})(u^2+v^2)-(uu_y+vv_y)(2uu_y+2vv_y)}{(u^2+v^2)^2} \\
&= \frac{(u_x^2+uu_{xx}+v_x^2+vv_{xx})(u^2+v^2)-(uu_x+vv_x)(2uu_x+2vv_x)}{(u^2+v^2)^2} \\
&\quad +\frac{(v_x^2-uu_{xx}+u_x^2-vu_{xx})(u^2+v^2)-(-uv_x+vu_x)(-2uv_x+2vu_x)}{(u^2+v^2)^2} \\
&= \frac{2(u_x^2+v_x^2)(u^2+y^2)-2u^2u_x^2-2v^2v_x^2-2u^2v_x^2-2v^2u_x^2}{(u^2+v^2)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta|f(z)| &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{uu_x+vv_x}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{uu_y+vv_y}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) \\
&= \frac{(u_x^2+uu_{xx}+v_x^2+vv_{xx})\sqrt{u^2+v^2}-(uu_x+vv_x)\dfrac{uu_x+vv_x}{\sqrt{u^2+v^2}}}{(u^2+v^2)} \\
&\quad +\frac{(u_y^2+uu_{yy}+v_y^2+vv_{yy})\sqrt{u^2+v^2}-(uu_y+vv_y)\dfrac{uu_y+vv_y}{\sqrt{u^2+v^2}}}{(u^2+v^2)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(u_x^2+uu_{xx}+v_x^2+vv_{xx})(u^2+v^2)-(uu_x+vv_x)(uu_x+vv_x)}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad + \frac{(v_x^2-uu_{xx}+u_x^2-vv_{xx})(u^2+v^2)-(-uv_x+vu_x)(-uv_x+vu_x)}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{2(u_x^2+v_x^2)(u^2+v^2)-u^2u_x^2-v^2v_x^2-u^2v_x^2-v^2u_x^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{(u_x^2+v_x^2)(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}} > 0
\end{aligned}
$$

□

2 **求一解析函数，使其是实部为** $e^x(x\cos y - y\sin y)$.

Proof.

$\because \quad u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y) \qquad \therefore \quad u_x=e^x(x\cos y-y\sin y)+e^x\cos y, \quad u_y=e^x(-x\sin y-y\cos y-\sin y)$

$\therefore \quad u_{xx}=e^x[(x+2)\cos y-y\sin y], \quad u_{yy}=e^x[-(x+2)\cos y+y\sin y)] \qquad \therefore \quad u_{xx}+u_{yy}=0$

$\because$ $u(x,y)$在 R 上有一、二阶连续偏导数 $\quad \therefore$ $u(x,y)$是调和函数, 取从 (x_0,y_0) 到 (x,y) 的直线段

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad v(x,y) &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+c \\
&= \int_{x_0}^{x} e^x(x\sin y+y\cos y+\sin y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)\mathrm{d}y+c \\
&= e^x(x\sin y+y\cos y)\|_{x_0}^{x}+e^x(x\sin y-y\cos y)\|_{y_0}^{y}+c \\
&= e^x(x\sin y+y\cos y)+c_1
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad f(z)=u+iv=e^x(x+iy)(\cos y+i\sin y)+ic=ze^z+ic_1$

□

3 **试求形如** $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ **的最一般的调和函数，其中** a,b,c **及** d **是实常数**.

Proof.

设二元多项式$u(x,y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$,则 $u(x,y)$ 一、二阶偏导在 R^2 上连续

$\because$ $u(x,y)$是调和函数 $\quad \therefore \quad u_{xx}+u_{yy}=0$

$\because \quad u_{xx}=6ax+2by, u_{yy}=2cx+6dy \qquad \therefore \quad 6ax+2by+2cx+6dy=0, \qquad \forall (x,y)\in R^2$

$\therefore \quad (3a+c)x+(b+3d)y=0, \qquad \forall (x,y)\in R^2 \qquad \therefore \quad \begin{cases} 3a+c=0 \\ b+3d=0 \end{cases}$

$\therefore \quad \begin{cases} c=-3a \\ b=-3d \end{cases} \qquad \therefore \quad u(x,y)=a(x^3-3xy^2)+d(y^2-3y^3)=a\mathrm{Re}\ (z^3)+id\mathrm{Im}\ (z^3)$

□

4

Proof.

□

5 试用调和函数的中值公式，证明

$$\int_0^{\pi} \ln(1-2r\cos\theta+r^2)\mathrm{d}\theta = 0,$$

其中 $-1<r<1$.

Proof.

当 $0 \leqslant r < 1$ 时, 考虑函数 $Ln(1-z)$ 在 $|z|<1$ 内的一个解析分支, 记为 $\ln(1-z)(\ln 1 = 0)$. 显然$u(z) = \mathrm{Re}[\ln(1-z)]$在 $|z|<1$ 内调和, 且$u(0) = Re[\ln 1] = 0$

在 $|z|=r<1$ 上,$u(re^{i\theta}) = \mathrm{Re}[\ln(1-z)]$

$$\begin{aligned}
&= \ln|1-re^{i\theta}| \\
&= \ln|1-r\cos\theta - ir\sin\theta| \\
&= \frac{1}{2}\ln[(1-r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta] \\
&= \frac{1}{2}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)
\end{aligned}$$

$\therefore$ 由中值公式有

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)\mathrm{d}\theta \qquad (0\leqslant r<1)$$

当 $-1<r\leqslant 0$ 时, 考虑函数 $Ln(1+z)$ 在 $|z|<1$ 内的一个解析分支, 记为 $\ln(1+z)(\ln 1 = 0)$. 在 $|z| = r_1 = -r$ 同上可得$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\ln(1+2r_1\cos\theta+r_1^2)\mathrm{d}\theta = 0 \qquad (0\leqslant r_1<1)$

$\therefore \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)\mathrm{d}\theta = 0 \qquad (-1<r\leqslant 0)$

$\therefore \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)\mathrm{d}\theta = 0 \qquad (-1<r<1)$

□

6 证明：如果在整个 z 平面调和的函数 $u(z)$ 是有界的，那么 $u(z)$ 恒等于常数.

Proof.

$\because \quad u(z) = u(x,y)$是调和函数 $\qquad \therefore \quad u_{xx}+u_{yy} = 0$,存在共轭调和函数$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y + c$

取积分路线为直线段, 则$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y + c$

$=$

□

7

Proof.

□

8

Proof.

□

9

Proof.

□

10

Proof.

□

11

Proof.

□

12

Proof.

□