第一章

Exercice: 1.1 节第 1 题

细杆（或弹簧）受某种外界原因而产生纵振动，，以 $u(x,t)$ 表示静止时在 x 点处的点在时刻 t 离开原来位置的偏移。假设振动过程中所产生的张力服从胡克定律，试证明 $u(x,t)$ 满足方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

其中 ρ 为杆的密度，E 为杨氏模量

注：（1）此题杨氏模量 E 与 x 无论是否有关，都可导出相应结论，不妨令其有关，记为 $E(x)$

（2）胡克定律：在物体的弹性限度内，应力（单位面积受到的力）与应变（外力作用下的相对伸长量）成正比，比值即为杨氏模量

（3）此题还需假设细杆均匀，即各点的截面面积相同

证明：在细杆上取一小段 $(x,x+\Delta x)$，设在 x 处所受的张力为 $T(x,t)$，设细杆的截面面积为 S，

由胡克定律，在任意时刻 t，有

$$\begin{aligned}\frac{T(x,t)}{S}&=E(x)\frac{[x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)]-(x+u(x,t))-\Delta x}{\Delta x}\\&=E(x)\frac{u(x+\Delta x)-u(x,t)}{\Delta x}\end{aligned}$$

令 $\Delta x\to 0$，得 $T(x,t)=SE(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$

在 t 时刻，小段 $(x,x+\Delta x)$ 受到的外力为 $T(x+\Delta x,t)-T(x,t)$

故在 $(t,t+\Delta t)$ 时间段内，作用于该小段的冲量为

$$\int_t^{t+\Delta t}SE(x+\Delta x)\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-SE(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}t=\int_t^{t+\Delta t}\int_x^{x+\Delta x}S\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

又在 $(t,t+\Delta t)$ 时间段内，该小段的动量变化为

$$\int_x^{x+\Delta x}S\rho(x)\left[\frac{\partial u(x,t+\Delta t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]\mathrm{d}x=\int_x^{x+\Delta x}\int_t^{t+\Delta t}S\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

由冲量定理（即动量变化等于冲量），得

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_x^{x+\Delta x}S\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x}\int_t^{t+\Delta t}S\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

由 $\Delta x,\Delta t$ 的任意性，得 $\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}\right)$

Exercice: 1.1 节第 3 题

试证：圆锥形枢轴的纵振动方程为

$$E\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\rho(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

其中 h 为圆锥的高

注：（1）此题中，x 表示枢轴上的点到底面的距离

（2）此题杨氏模量 E 与 x 无关

证明：参照上一题的证明过程，只需注意到此时面积与 S 有关，设为 $S(x)$，即得

$$S(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right)=E\frac{\partial}{\partial x}\left(S(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

由相似性，容易计算 $S(x)=\pi(1-\frac{x}{h})^2$，代入上式即得所求

Exercice: 1.1 节第 7 题

一柔软均匀的细弦，一端固定，另一端是弹性支承，设该弦在阻力与速度成正比的介质中作微小横振动，试写出弦的位移所满足的定解问题。

相应的定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k\dfrac{\partial u}{\partial t} \\ (\dfrac{\partial u}{\partial x} + \sigma u)|_{x=l} = 0 \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$

Exercice: 1.2 节第 1 题

证明方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{1}{a^2}(1-\frac{x}{h})^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(h>0,\text{常数})$$

的通解可以写成

$$u = \frac{F(x-at)+G(x+at)}{h-x}$$

其中，F,G 为任意的具有二阶连续导数的单变量函数，并由此求它满足初始条件

$$t=0: u=\varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)$$

的初值问题的解

证明：作代换 $v=(h-x)u$，原方程变为 $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$
作代换 $\xi = x-at, \eta = x+at$，方程化为 $v_{\xi\eta}=0$，
积分得 v 具有如下形式：$v(x,t) = F(x-at)+G(x+at)$
即为 $u = \frac{F(x-at)+G(x+at)}{h-x}$

Exercice: 1.2 节第 3 题

利用传播波法，求解波动方程的古尔萨（Goursat）问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-at<x<at, t>0) \\ u|_{x-at=0} = \varphi(x) \quad (t>0) \\ u|_{x+at=0} = \psi(x) \quad (t>0), \varphi(0)=\psi(0) \end{cases}$$

解：由传播波法，存在单变量函数 F,G，使得 $u(x,t) = F(x-at)+G(x+at)$
分别代入 $x-at=0, x+at=0$，得

$$\begin{cases} \varphi(x) = F(0)+G(2x) \\ \psi(x) = F(2x)+G(0) \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} F(x) = \psi(\frac{x}{2}) - G(0) \\ G(x) = \varphi(\frac{x}{2}) - F(0) \end{cases}$$

代入 $x=0$ 得 $F(0)+G(0)=\varphi(0)=\psi(0)$
则 $u(x,t) = \varphi(\frac{x+at}{2}) + \psi(\frac{x-at}{2}) - \varphi(0)$

Exercice: 1.2 节第 5 题

求解

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad (x>0,t>0) \\ u|_{t=0}=\varphi(x), u_t|_{t=0}=0 \\ (u_x-ku_t)|_{x=0}=0 \end{cases}$$

其中 k 为正常数

注:(1) 由于 $\varphi(x)$ 只在 $x\geq 0$ 处有定义,若直接对原来的方程使用达朗贝尔公式,则只能得到定义在 $x\geq at$ 的 u,故使用延拓法

解:作 $\varphi(x)(x\geq 0)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的延拓 $\Phi(x)$

则对初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad (t>0) \\ u|_{t=0}=\Phi(x), u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

使用达朗贝尔公式,得

$$u(x,t)=\frac{\Phi(x-at)+\Phi(x+at)}{2}$$

则

$$u_x-ku_t|_{x=0}=\frac{1}{2}\left[(1-ak)\Phi'(at)+(1+ak)\Phi'(-at)\right]=0$$

作代换 $x=at$,得 $(1-ak)\Phi'(x)+(1+ak)\Phi'(-x)=0$

这说明 Φ 在 $x<0$ 处的值可由在 $x>0$ 处的值表示

即 $\Phi'(-x)=\dfrac{ak-1}{ak+1}\Phi'(x)$

对上式两端同时在区间 $[0,x]$ 上积分得

$$\int_0^x \Phi'(-\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_0^x \frac{ak-1}{ak+1}\varphi'(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

得 $\Phi(x)=\begin{cases} \varphi(x), & x\geq 0 \\ \dfrac{1-ak}{1+ak}\varphi(-x)+\dfrac{2ak}{1+ak}\varphi(0), & x<0 \end{cases}$

则 $u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}, & x\geq at \\ \dfrac{\varphi(x+at)}{2}+\dfrac{1-ak}{2(1+ak)}\varphi(at-x)+\dfrac{ak}{1+ak}\varphi(0), & 0\leq x<at \end{cases}$

Exercice: 1.2 节第 6 题

求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 \quad (0<t<kx, k>1) \\ u|_{t=0}=\varphi_0(x) \quad (x\geq 0) \\ u_t|_{t=0}=\varphi_1(x) \quad (x\geq 0) \\ u|_{t=kx}=\psi(x) \quad (x\geq 0) \end{cases}$$

其中 $\varphi_0(0)=\psi(0)$

解:分别作 $\varphi_0(x),\varphi_1(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的延拓 $\Phi_0(x),\Phi_1(x)$

则对 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 \quad (k>1) \\ u|_{t=0}=\Phi_0(x), u_t|_{t=0}=\Phi_1(x) \end{cases}$$

使用达朗贝尔公式，得

$$u(x,t)=\frac{\Phi_0(x-t)+\Phi_0(x+t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\Phi_1(s)\mathrm{d}s$$

则

$$u|_{t=kx}=\frac{1}{2}\left[\Phi_0((1+k)x)+\Phi_0((1-k)x)\right]+\frac{1}{2}\int_{(1-k)x}^{(1+k)x}\Phi_1(s)\mathrm{d}s=\psi(x)$$

这说明若设 Φ_1 为 φ_1 的偶延拓，则可解出 Φ_0 在 $x<0$ 处的值
即

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{1}{2}\left[\varphi_0((1+k)x)+\Phi_0((1-k)x)\right]+\frac{1}{2}\left[\int_0^{(1+k)x}\Phi_1(s)\mathrm{d}s+\int_{(1-k)x}^{0}\Phi_1(-s)\mathrm{d}s\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\varphi_0((1+k)x)+\Phi_0((1-k)x)\right]+\frac{1}{2}\left[\int_0^{(1+k)x}\varphi_1(s)\mathrm{d}s+\int_0^{(k-1)x}\varphi_1(s)\mathrm{d}s\right]\end{aligned}$$

解得

$$\Phi_0((1-k)x)=2\psi(x)-\varphi_0((1+k)x)-\int_0^{(1+k)x}\varphi_1(s)\mathrm{d}s-\int_0^{(k-1)x}\varphi_1(s)\mathrm{d}s$$

作代换 $t=(1-k)x$，可解出 $\Phi_0(t)(t<0)$
故

$$\Phi_0(x)=\begin{cases}\varphi_0(x), & x\geq 0\\ 2\psi(\frac{x}{1-k})-\varphi_0(\frac{1+k}{1-k}t)-\int_0^{\frac{1+k}{1-k}t}\varphi_1(s)\mathrm{d}s-\int_0^{-t}\varphi_1(s)\mathrm{d}s, & x<0\end{cases}$$

则

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_0(x-t)+\varphi_0(x+t)}{2}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}\varphi_1(s)\mathrm{d}s, & x\geq t\\ \psi(\dfrac{x-t}{1-k})+\dfrac{1}{2}\left[\varphi_0(x+t)-\varphi_0(\frac{1+k}{1-k}(x-t))\right]-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x+t}^{\frac{1+k}{1-k}(x-t)}\varphi_1(s)\mathrm{d}s, & x<t\end{cases}$$

Exercice: 1.2 节第 7 题

求边值问题

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0 \quad (f(t)<x<t,t>0)\\ u|_{x=t}=\varphi(t) \quad (t>0)\\ u|_{x=f(t)}=\psi(t) \quad (t>0)\end{cases}$$

的解，其中 $\varphi(0)=\psi(0), x=f(t)$ 为由原点出发的，介于 $x=t$ 和 $x=-t$ 之间的光滑曲线，且 $|f'(t)|\neq 1$ 对一切 t 成立

解：易知齐次方程 $u_{tt}-u_{xx}=0$ 的通解具有如下形式

$$u(x,t)=F(x-t)+G(x+t)$$

其中 F,G 为单变量函数

故 $\begin{cases}u|_{x=t}=F(0)+G(2t)=\varphi(t)\\ u|_{x=f(t)}=F(f(t)-t)+G(f(t)+t)=\psi(t)\end{cases}$

设 $y=f(t)-t$，因为 $\forall t,|f'(t)|\neq 1$，由隐函数定理，可解出 $t=g(y)$
则由上述方程组可解出 F,G

$$\begin{cases}F(x)=\psi(g(x))-\varphi(\dfrac{2g(x)+x}{2})+F(0)\\ G(x)=\varphi(\dfrac{x}{2})-F(0)\end{cases}$$

故

$$u(x,t)=\psi(g(x-t))-\varphi(\frac{2g(x-t)+x-t}{2})+\varphi(\frac{x+t}{2})$$

Exercice: 1.2 节第 9 题

求解波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \dfrac{tx}{(1+x^2)^2} \quad (t>0, -\infty<x<\infty) \\ u|_{t=0} = 0 \quad (-\infty<x<\infty) \\ u_t|_{t=0} = \dfrac{1}{1+x^2} \quad (-\infty<x<\infty) \end{cases}$$

注：(1) $\int \arctan x \mathrm{d}x = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

解：作代换 $V(x,t) = u(x,t) - \frac{t}{2a^2}\arctan x$，原问题化为

$$\begin{cases} V_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 \\ v|_{t=0} = 0 \\ v_t|_{t=0} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{\arctan x}{2a^2} \end{cases}$$

则由达朗贝尔公式

$$v(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \frac{1}{1+s^2} - \frac{\arctan x}{2a^2} \mathrm{d}s$$

整理得

$$u(x,t) = \frac{t}{2a^2}\arctan x + \frac{1}{4a^3}\left[(2a^2 - x - at)\arctan(x+at) - (2a^2 - x + at)\arctan(x-at)\right] + \frac{1}{8a^3}\ln\frac{1+(x+at)^2}{1+(x-at)^2}$$

Exercice: 1.3 节第 1 题

用分离变量法求下列问题的解

(1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{t=0} = \sin\dfrac{3\pi x}{l}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x(l-x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \dfrac{h}{l}x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

解：

(1) 由分离变量法，具有齐次 Dirichlet 边界条件的齐次方程通解形如

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi a}{l}t)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

其中 A_k, B_k 为待定系数

代入初值条件，则

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \sin\dfrac{k\pi}{l}x = \sin\dfrac{3\pi x}{l} \\ u_t|_{t=0} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k\pi a}{l} B_k \sin\dfrac{k\pi}{l}x = x(l-x) \end{cases}$$

故 $A_k,\dfrac{k\pi a}{l}B_k$ 分别是函数 $\sin\dfrac{3\pi x}{l},x(l-x)$ 在 $[0,l]$ 上的傅里叶正弦级数
观察到 $\sin\dfrac{3\pi x}{l}$ 本身具有傅里叶级数的形式，
由傅里叶级数的唯一性，得 $A_k=\begin{cases}0, & k\neq 3\\ 1, & k=3\end{cases}$
由 $x(l-x)$ 在 $[0,l]$ 上的傅里叶正弦级数的形式，可得

$$\frac{k\pi a}{l}B_k=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

解得 $B_k=\dfrac{4l^3(1+(-1)^{k+1})}{ak^4\pi^4}$
则

$$u(x,t)=\cos\frac{3\pi a}{l}t\sin\frac{3\pi x}{l}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4l^3(1+(-1)^{k+1})}{ak^4\pi^4}\sin\frac{k\pi a}{l}t\sin\frac{k\pi}{l}x$$

（2）由分离变量法，设齐次方程的通解形如 $u(x,t)=X(x)T(t)$，
其中 $T''+\lambda a^2T=0,X''+\lambda X=0,\lambda$ 为常数

当 $\lambda<0$ 时，$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$
代入边界条件，得 $\begin{cases}C_1+C_2=0\\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}-C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0\end{cases}$
由于 $\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & -e^{-\sqrt{-\lambda}l}\end{vmatrix}\neq 0$，此时方程只有零解

当 $\lambda=0$ 时，$X(x)=C_1+C_2x$
代入边界条件，得 $\begin{cases}C_1=0\\ C_2=0\end{cases}$

当 $\lambda>0$ 时，$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$
代入边界条件，得 $\begin{cases}C_1=0\\ -\sqrt{\lambda}C_1\sin\sqrt{\lambda}l+\sqrt{\lambda}C_2\cos\sqrt{\lambda}l=0\end{cases}$
解得 $\cos\sqrt{\lambda}l=0,\lambda_k=(\dfrac{2k+1}{2l})^2\pi^2,k=0,1,2,\ldots$
则 $X_k(x)=C_2\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x$
将 λ_k 代入 $T''+\lambda a^2T=0$，解出 $T_k(t)$，可得

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{2k+1}{2l}a\pi t+B_k\sin\frac{2k+1}{2l}a\pi t\right)\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x$$

代入初值条件可得

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x=\frac{h}{l}x\\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}B_k\frac{2k+1}{2l}a\pi\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x=0\end{cases}$$

断言 $\left\{\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{2k+1}{2l}\pi x\right\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $L^2[0,l]$ 空间上的一组正规正交集
容易验证

$$\int_0^l\sin\frac{2m+1}{2l}\pi x\cdot\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{l}{2}, & m=n\end{cases}$$

则

$$A_k = \sqrt{\frac{2}{l}} < \frac{h}{l}x, \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{2k+1}{2l}\pi x > = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{h}{l} x \sin\frac{2k+1}{2l}\pi x \mathrm{d}x$$
$$= \frac{8h}{(2k+1)^2\pi^2}(-1)^k$$

$$B_k = 0$$

则

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{2k+1}{2l}a\pi t \cdot \sin\frac{2k+1}{2l}\pi x$$

Exercice: 1.3 节第 2 题

设弹簧一端固定，一端在外力作用下作周期振动，此时定解问题归结为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = A\sin^2\omega t \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

求解此问题

作代换 $v(x,t) = u(x,t) - \sin^2\omega t\dfrac{A}{l}x$

则原问题化为 $\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = -\dfrac{A}{l}x\cdot 2\omega^2\cos 2\omega t = f(x,t) \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$

令 $B_k(\tau) = \dfrac{2}{k\pi a}\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\dfrac{k\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi = \dfrac{4A\omega^2 l}{(k\pi)^2 a}\cos 2\omega\tau(-1)^k$

则

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \int_0^t\sum_{k=1}^{\infty}B_k(\tau)\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}\tau \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4A\omega^2 l}{(k\pi)^2 a}(-1)^k\sin\frac{k\pi}{l}x\int_0^t\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\cos 2\omega\tau\mathrm{d}\tau \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4A\omega^2 l}{(k\pi)^2 a}(-1)^k\sin\frac{k\pi}{l}x\cdot\frac{lk\pi a}{(k\pi a)^2 - 4\omega^2 l^2}(\cos 2\omega t - \cos\frac{k\pi a}{l}t)\sin\frac{k\pi}{l}x \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4A\omega^2 l^2}{k\pi}(-1)^k\frac{1}{(k\pi a)^2 - 4\omega^2 l^2}(\cos 2\omega t - \cos\frac{k\pi a}{l}t)\sin\frac{k\pi}{l}x \end{aligned}$$

则

$$u(x,t) = \sin^2\omega t\frac{A}{l}x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4A\omega^2 l^2}{k\pi}(-1)^k\frac{1}{(k\pi a)^2 - 4\omega^2 l^2}(\cos 2\omega t - \cos\frac{k\pi a}{l}t)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

Exercice: 1.3 节第 3 题

求弦振动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (0 < x < l, t > 0)$$

满足以下定解条件的解：

（1）$\begin{array}{l} u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \sin\dfrac{3}{2l}\pi x, u_t|_{t=0} = \sin\dfrac{5}{2l}\pi x \end{array}$

（2）$\begin{array}{l} u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = x, u_t|_{t=0} = 0 \end{array}$

解：（1）由分离变量法，设齐次方程的通解形如 $u(x,t) = X(x)T(t)$，
其中 $T'' + \lambda a^2 T = 0, X'' + \lambda X = 0, \lambda$ 为常数

当 $\lambda < 0$ 时，$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} - C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}$
由于 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} \neq 0$，此时方程只有零解

当 $\lambda = 0$ 时，$X(x) = C_1 + C_2 x$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$

当 $\lambda > 0$ 时，$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1 = 0 \\ -\sqrt{\lambda}C_1 \sin\sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}C_2 \cos\sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$
解得 $\cos\sqrt{\lambda}l = 0, \lambda_k = (\dfrac{2k+1}{2l})^2\pi^2, k = 0,1,2,\ldots$
则 $X_k(x) = C_2 \sin\frac{2k+1}{2l}\pi x$
将 λ_k 代入 $T'' + \lambda a^2 T = 0$，解出 $T_k(t)$，可得

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{2k+1}{2l}a\pi t + B_k \sin\frac{2k+1}{2l}a\pi t\right)\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x$$

代入初值条件可得

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k \sin\frac{2k+1}{2l}\pi x = \sin\frac{3}{2l}\pi x \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} B_k \frac{2k+1}{2l}a\pi \sin\frac{2k+1}{2l}\pi x = \sin\frac{5}{2l}\pi x \end{cases}$$

断言 $\left\{\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{2k+1}{2l}\pi x\right\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $L^2[0,l]$ 空间上的一组正规正交集
容易验证

$$\int_0^l \sin\frac{2m+1}{2l}\pi x \cdot \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{l}{2}, & m = n \end{cases}$$

则

$$A_k = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases} \qquad B_k = \begin{cases} \dfrac{2l}{5a\pi}, & k = 2 \\ 0, & k \neq 2 \end{cases}$$

则

$$u(x,t) = \cos\frac{3a\pi}{2l}t \sin\frac{3\pi}{2l}x + \frac{2l}{5a\pi}\sin\frac{5a\pi}{2l}t \sin\frac{5\pi}{2l}x$$

（2）由分离变量法，设齐次方程的通解形如 $u(x,t)=X(x)T(t)$，
其中 $T''+\lambda a^2T=0, X''+\lambda X=0, \lambda$ 为常数

当 $\lambda<0$ 时，$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1-C_2=0 \\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}-C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0 \end{cases}$
由于 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & -e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix}\neq 0$，此时方程只有零解

当 $\lambda=0$ 时，$X(x)=C_1+C_2x$
代入边界条件，得 $C_2=0$，$X(x)=C_1$

当 $\lambda>0$ 时，$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_2=0 \\ C_1\sin\sqrt{\lambda}l=0 \end{cases}$
解得 $\lambda_k=(\frac{k\pi}{l})^2, k=1,2,\ldots$
则 $X_k(x)=C_1\cos\frac{k\pi}{l}x$
将 λ_k 代入 $T''+\lambda a^2T=0$，解出相应的 $T_k(t)$
则

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\cos\frac{k\pi}{l}x$$

代入初值条件可得

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k\cos\frac{k\pi}{l}x=x \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}B_k\frac{k\pi a}{l}\cos\frac{k\pi}{l}x=0 \end{cases}$$

则 A_k 为 x 在区间 $[0,l]$ 上的傅里叶余弦级数的系数，即

$$A_k=\begin{cases} \frac{2}{l}\int_0^l x\cdot\cos\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x=\frac{2l}{(k\pi)^2}((-1)^k-1), & k\neq 0 \\ \frac{1}{l}\int_0^l x\mathrm{d}x=\frac{l}{2}, & k=0 \end{cases}$$

$$B_k=0$$

则

$$u(x,t)=\frac{l}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2l}{(k\pi)^2}((-1)^k-1)\cos\frac{k\pi a}{l}t\cos\frac{k\pi}{l}x$$

Exercice: 1.3 节第 4 题

用分离变量法求解初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=g \\ u|_{x=0}=u_x|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=0, u_t|_{t=0}=\sin\frac{\pi x}{2l} \end{cases}$$

其中 g 为常数

法一（变量代换法）：作代换 $v(x,t)=u(x,t)+\frac{gx(x-2l)}{2a^2}$

原问题化为

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0 \\ v|_{x=0}=v_x|_{x=l}=0 \\ v|_{t=0}=\dfrac{gx(x-2l)}{2a^2}, v_t|_{t=0}=\sin\dfrac{\pi x}{2l} \end{cases}$$

则由分离变量法，设齐次方程的通解形如 $v(x,t)=X(x)T(t)$，
其中 $T''+\lambda a^2T=0, X''+\lambda X=0, \lambda$ 为常数

当 $\lambda<0$ 时，$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}-C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0 \end{cases}$
由于 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & -e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix}\neq 0$，此时方程只有零解

当 $\lambda=0$ 时，$X(x)=C_1+C_2x$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1=0 \\ C_2=0 \end{cases}$

当 $\lambda>0$ 时，$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1=0 \\ -\sqrt{\lambda}C_1\sin\sqrt{\lambda}l+\sqrt{\lambda}C_2\cos\sqrt{\lambda}l=0 \end{cases}$
解得 $\cos\sqrt{\lambda}l=0, \lambda_k=(\dfrac{2k+1}{2l})^2\pi^2, k=0,1,2,\ldots$
则 $X_k(x)=C_2\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x$
将 λ_k 代入 $T''+\lambda a^2T=0$，解出 $T_k(t)$，可得

$$v(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{2k+1}{2l}a\pi t+B_k\sin\frac{2k+1}{2l}a\pi t\right)\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x$$

代入初值条件可得

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x=\dfrac{gx(x-2l)}{2a^2} \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}B_k\frac{2k+1}{2l}a\pi\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x=\sin\dfrac{\pi x}{2l} \end{cases}$$

断言 $\left\{\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{2k+1}{2l}\pi x\right\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $L^2[0,l]$ 空间上的一组正规正交集
容易验证

$$\int_0^l\sin\frac{2m+1}{2l}\pi x\cdot\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\mathrm{d}x=\begin{cases} 0, & m\neq n \\ \dfrac{l}{2}, & m=n \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} A_k=\sqrt{\frac{2}{l}}<\frac{gx(x-2l)}{2a^2},\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x>&=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{gx(x-2l)}{2a^2}\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x\mathrm{d}x \\ &=\frac{-16l^2g}{a^2(2k+1)^3\pi^3} \end{aligned}$$

$$B_k=\begin{cases} \dfrac{2l}{a\pi}, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases}$$

则可得 $v(x,t)$，进而

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= -\frac{gx(x-2l)}{2a^2} + \frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{2l}t\sin\frac{\pi}{2l}x - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{16l^2g}{a^2(2k+1)^3\pi^3}\cos\frac{2k+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x \\
&= \frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{2l}t\sin\frac{\pi}{2l}x + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{16l^2g}{a^2(2k+1)^3\pi^3}\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{16l^2g}{a^2(2k+1)^3\pi^3}\cos\frac{2k+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x \\
&= \frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{2l}t\sin\frac{\pi}{2l}x + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{16l^2g}{a^2(2k+1)^3\pi^3}(1-\cos\frac{2k+1}{2l}a\pi t)\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x
\end{aligned}
$$

法二（齐次化原理）：设 $u_1(x,t), u_2(X,t)$ 分别为如下两个问题的解

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\
u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0 \\
u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = \sin\frac{\pi x}{2l}
\end{cases} \tag{1}
$$

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2u_{xx} = g, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\
u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0 \\
u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0
\end{cases} \tag{2}
$$

对问题（1），由分离变量法，设齐次方程的通解形如 $u_1(x,t) = X(x)T(t)$，
其中 $T'' + \lambda a^2T = 0, X'' + \lambda X = 0, \lambda$ 为常数

当 $\lambda < 0$ 时，$X(x) = C_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}l} - C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}$
由于 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & -e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} \neq 0$，此时方程只有零解

当 $\lambda = 0$ 时，$X(x) = C_1 + C_2x$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$

当 $\lambda > 0$ 时，$X(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1 = 0 \\ -\sqrt{\lambda}C_1\sin\sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}C_2\cos\sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$
解得 $\cos\sqrt{\lambda}l = 0, \lambda_k = (\frac{2k+1}{2l})^2\pi^2, k = 0,1,2,\ldots$
则 $X_k(x) = C_2\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x$
将 λ_k 代入 $T'' + \lambda a^2T = 0$，解出 $T_k(t)$，可得

$$
u_1(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{2k+1}{2l}a\pi t + B_k\sin\frac{2k+1}{2l}a\pi t\right)\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x
$$

代入初值条件可得

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x = 0 \\
\sum\limits_{k=0}^{\infty}B_k\frac{2k+1}{2l}a\pi\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x = \sin\frac{\pi x}{2l}
\end{cases}
$$

断言 $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x\right\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $L^2[0,l]$ 空间上的一组正规正交集
容易验证

$$\int_0^l \sin\frac{2m+1}{2l}\pi x\cdot\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \frac{l}{2}, & m=n\end{cases}$$

则

$$A_k=0,B_k=\begin{cases}\frac{2l}{\pi a}, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$

则

$$u_1(x,t)=\frac{2l}{\pi a}\sin\frac{a\pi t}{2l}\sin\frac{\pi x}{2l}$$

对问题（2），若设 $w(x,t,\tau)$ 为如下问题的解

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=0, \quad 0<x<l, \quad t>\tau\\ w|_{x=0}=w_x|_{x=l}=0\\ w|_{t=\tau}=0,w_t|_{t=\tau}=g\end{cases} \tag{3}$$

则 $u_2(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau$
作代换 $t'=t-\tau$，问题（3）化为

$$\begin{cases} w_{t't'}-a^2w_{xx}=0, \quad 0<x<l, \quad t'>0\\ w|_{x=0}=w_x|_{x=l}=0\\ w|_{t'=0}=0,w_{t'}|_{t'=0}=g\end{cases} \tag{4}$$

类似问题（1）的求解可得 $A_k=0,B_k=\frac{8lg}{a\pi^2(2k+1)^2}$
则

$$\begin{aligned} w(x,t,\tau)&=\sum_{k=0}^{\infty}B_k(\tau)\sin\frac{2k+1}{2l}a\pi(t-\tau)\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{8lg}{a\pi^2(2k+1)^2}\sin\frac{2k+1}{2l}a\pi(t-\tau)\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} u_2(x,t)&=\int_0^t w(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16l^2g}{a^2(2k+1)^3\pi^3}(1-\cos\frac{2k+1}{2l}a\pi t)\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x\end{aligned}$$

由叠加原理，

$$\begin{aligned} u(x,t)&=u_1(x,t)+u_2(x,t)\\ &=\frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{2l}t\sin\frac{\pi}{2l}x+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16l^2g}{a^2(2k+1)^3\pi^3}(1-\cos\frac{2k+1}{2l}a\pi t)\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x\end{aligned}$$

Exercice: 1.3 节第 6 题

用分离变量法求下面问题的解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2b\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (b>0) \\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=\dfrac{h}{l}x, \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0 \end{cases}$$

注：这道题须限定 b 的范围为 $b<\sqrt{\dfrac{\pi}{l}}\cdot a$，否则会导致复杂的讨论（产生可数多个情形）

解：由分离变量法，设 $u(x,t)=X(x)T(t)$
代入方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2b\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ，得

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)+2bT'(t)}{a^2T(t)}$$

设上述方程两端均等于一个常数 λ，则有

$$X''(x)-\lambda X(x)=0, T''(t)+2bT'(t)-\lambda a^2T(t)=0$$

当 $\lambda>0$ 时，$X(x)=C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x}$
代入边界条件得 $\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1e^{\sqrt{\lambda}l}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}l}=0 \end{cases}$
由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}l} & e^{-\sqrt{\lambda}l} \end{vmatrix}\neq 0$，则方程只有零解

当 $\lambda=0$ 时，$X(x)=C_1+C_2x$
代入边界条件得 $\begin{cases} C_1=0 \\ C_1+C_2l=0 \end{cases}$
则 $C_1=C_2=0$，方程只有零解

当 $\lambda<0$ 时，$X(x)=C_1\cos\sqrt{-\lambda}x+C_2\sin\sqrt{-\lambda}x$
代入边界条件得 $\begin{cases} C_1=0 \\ C_2\sin\sqrt{-\lambda}l=0 \end{cases}$
则 $\lambda_k=-(\dfrac{k\pi}{l})^2, k=1,2,3,\ldots$，相应地，$X_k(x)=C_2\sin\dfrac{k\pi}{l}x$
将 λ_k 代入方程 $T''(t)+2bT'(t)-\lambda a^2T(t)=0$，可得

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x) \\ &=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\left(\sqrt{(\frac{k\pi a}{l})^2-b^2}\right)x+B_k\sin\left(\sqrt{(\frac{k\pi a}{l})^2-b^2}\right)x\right)e^{-bt}\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x \end{aligned}$$

代入初值条件，得

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k\sin\dfrac{k\pi}{l}x=\dfrac{h}{l}x \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(-bA_k+B_k\sqrt{(\frac{k\pi a}{l})^2-b^2}\right)\sin\dfrac{k\pi}{l}x=0 \end{cases}$$

则

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{h}{l}x\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x=-\frac{2h}{k\pi}(-1)^k$$

$$B_k = -\frac{2h}{k\pi}(-1)^k \cdot \frac{b}{\sqrt{(\frac{k\pi a}{l})^2 - b^2}}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\cos\left(\sqrt{(\frac{k\pi a}{l})^2 - b^2}\right)x + \frac{b}{\sqrt{(\frac{k\pi a}{l})^2 - b^2}}\sin\left(\sqrt{(\frac{k\pi a}{l})^2 - b^2}\right)x\right)\frac{2h}{k\pi}(-1)^{k+1}e^{-bt}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

Exercice: 1.4 节第 1 题

利用泊松公式求解波动方程的柯西问题

（1）$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x^2 + yz \end{cases}$ （2）$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ u|_{t=0} = x^3 + y^2 z, \quad u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$

注：（1）

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, & n\text{为奇数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

（2）

$$\int_0^{\pi} \sin^n x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ 2\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

（3）

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ 4\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

（1）由泊松公式得

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{\partial B(M,at)} \xi^2 + \eta\zeta \mathrm{d}S$$

作球坐标代换 $\begin{cases} \xi - x = at\sin\theta\cos\varphi \\ \eta - y = at\sin\theta\sin\varphi \\ \zeta - z = at\cos\theta \end{cases}$

得

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[(x + at\sin\theta\cos\varphi)^2 + (y + at\sin\theta\sin\varphi)(z + at\cos\theta)\right](at)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= x^2 t + yzt + \frac{1}{3}a^2 t^3 \end{aligned}$$

（2）由泊松公式得

$$u(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{\partial B(M,at)} \xi^3 + \eta^2\zeta\mathrm{d}S\right)$$

作球坐标代换 $\begin{cases} \xi - x = at\sin\theta\cos\varphi \\ \eta - y = at\sin\theta\sin\varphi \\ \zeta - z = at\cos\theta \end{cases}$

得

$$\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{\partial B(M,at)} \xi^3+\eta^2\zeta \mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[(x+at\sin\theta\cos\varphi)^3+(y+at\sin\theta\sin\varphi)^2(z+at\cos\theta)\right](at)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=x^3t+y^2zt+xa^2t^3+\frac{za^2t^3}{3}$$

则

$$u(x,y,z,t)=x^3+y^2z+3xa^2t^2+za^2t^2$$

Exercice: 1.4 节第 2 题

试用降维法导出弦振动方程的达朗贝尔公式

证明：考虑一维弦振动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{zz}=0 \\ u|_{t=0}=\varphi(z), \quad u_t|_{t=0}=\psi(z) \end{cases}$$

若设 $\tilde{u}(x,y,z,t)=u(z,t)$，则 $\tilde{u}$ 满足三维波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z^2}\right) \\ \tilde{u}|_{t=0}=\varphi(z), \quad \dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t}|_{t=0}=\psi(z) \end{cases}$$

由泊松公式得，

$$u(x,y,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{\partial B(M,at)}\varphi(\zeta)\mathrm{d}S\right)+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{\partial B(M,at)}\psi(\zeta)\mathrm{d}S$$

作代换 $\zeta=z+at\cos\theta$，得到

$$u=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi}\varphi(z+at\cos\theta)(at)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)+\frac{1}{4\pi a^2 t}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi}\psi(z+at\cos\theta)(at)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

作代换 $\alpha=z+at\cos\theta$

$$\begin{aligned} u&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\cdot 2\pi at\int_{z-at}^{z+at}\varphi(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)+\frac{1}{4\pi a^2 t}\cdot 2\pi at\int_{z-at}^{z+at}\psi(\alpha)\mathrm{d}\alpha \\ &=\frac{1}{2}\left(\varphi(z+at)-\varphi(z-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at}\psi(\alpha)\mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

Exercice: 1.4 节第 3 题

求解（2）$\begin{cases} u_{tt}-3(u_{xx}+u_{yy})=x^3+y^3 \\ u|_{t=0}=0 \\ u_t|_{t=0}=x^2 \end{cases}$

解：设 u_1,u_2 分别为如下两个问题的解

$$\begin{cases} u_{tt}-3(u_{xx}+u_{yy})=0 \\ u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt}-3(u_{xx}+u_{yy})=x^3+y^3 \\ u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

由二维波动方程的泊松公式得

$$
\begin{aligned}
u_1(x,y,t) &= \frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{(x+r\cos\theta)^2}{\sqrt{(at)^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= tx^2+\frac{1}{3}a^2t^3 \\
&= tx^2+t^3
\end{aligned}
$$

由齐次化原理，

$$
u_2(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{t}\int_0^{a(t-\tau)}\int_0^{2\pi}\frac{(x+r\cos\theta)^3+(y+r\sin\theta)^3}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\tau
$$

作代换 $\rho=a(t-\tau)$，则

$$
\begin{aligned}
u_2(x,y,t) &= \frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho}\frac{(x+r\cos\theta)^3+(y+r\sin\theta)^3}{\sqrt{\rho^2-r^2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta(\frac{1}{a}\mathrm{d}\rho) \\
&= \frac{(x^3+y^3)t^2}{2}+\frac{(x+y)a^2t^4}{4} \\
&= \frac{(x^3+y^3)t^2}{2}+\frac{3(x+y)t^4}{4}
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
u &= u_1+u_2 \\
&= tx^2+t^3+\frac{(x^3+y^3)t^2}{2}+\frac{3(x+y)t^4}{4}
\end{aligned}
$$

注：计算上述积分的比较好的方法：先对 θ 积分，再作代换 $s=\sqrt{\rho^2-r^2}$

Exercice: 1.4 节第 4 题

求二维波动方程的轴对称解（即二维波动方程的形如 $u=u(r,t)$ 的解，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$）

解：

对二维波动方程作代换 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，得到

$$
u_{tt}=a^2(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r)
$$

由分离变量法，设 $u(r,t)=R(r)T(t)$，代入方程得

$$
\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)}{R(r)}
$$

设上述方程两端均等于一个常数 λ，解得

$$
\begin{cases}
T(t)=A(\lambda)\cos a\sqrt{\lambda}t+B(\lambda)\sin a\sqrt{\lambda}t \\
R(r)=J_0(\sqrt{\lambda}r)
\end{cases}
$$

令 $\sqrt{\lambda}=\mu$，叠加得

$$
u(r,t)=\int_0^{\infty}\left(A(\mu)\cos a\mu t+B(\mu)\sin a\mu t\right)J_0(\mu r)\mathrm{d}\mu
$$

Exercice: 1.4 节第 5 题

求解下列 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + c^2 u \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x,y) \end{cases}$$

解：（降维法）

令 $v(x,y,z,t) = e^{\frac{cz}{a}} u(x,y,t)$

原问题化为 $\begin{cases} v_{tt} - a^2(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) = 0 \\ v|_{t=0} = e^{\frac{cz}{a}} \varphi(x,y) \\ v_t|_{t=0} = e^{\frac{cz}{a}} \psi(x,y) \end{cases}$

由泊松公式，

$$u(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{\partial B(M,at)} e^{\frac{cz}{a}}\varphi \mathrm{d}S\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{\partial B(M,at)} e^{\frac{cz}{a}}\psi \mathrm{d}S$$

记球面 $\partial B(M,at)$ 在 $\xi O\eta$ 平面上的投影为 $\Sigma(M,at)$，则

$$\mathrm{d}S = \frac{at}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi-x)^2 - (\eta-y)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

则

$$\begin{aligned}\iint_{S_{at}^M} e^{\frac{c\zeta}{a}}\varphi(\xi,\eta)dS &= \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{e^{\frac{c\left(z+\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}\right)}{a}}\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} r d\xi d\eta \\ &+ \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{e^{\frac{c\left(z-\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}\right)}{a}}\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} r d\xi d\eta \\ &= 2e^{\frac{cz}{a}} \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\mathrm{ch}\left[\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}\right]}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\varphi(\xi,\eta) r d\xi d\eta \\ &= 2e^{\frac{cz}{a}} \int_0^{2\pi}\int_0^{at} \frac{\mathrm{ch}\sqrt{c^2t^2-\left(\frac{c}{a}r\right)^2}}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\varphi(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) r^2 dr d\theta.\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}v(x,y,z,t) =& \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\frac{cz}{a}}\int_0^{2\pi}\int_0^{at} \frac{\mathrm{ch}\sqrt{c^2t^2-\left(\frac{c}{a}r\right)^2}}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\varphi(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) r dr d\theta\right) \\ &+ \frac{1}{2\pi a}e^{\frac{cz}{a}}\int_0^{2\pi}\int_0^{at} \frac{\mathrm{ch}\sqrt{c^2t^2-\left(\frac{c}{a}r\right)^2}}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\psi(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) r dr d\theta.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}u(x,y,t) =& \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{at} \frac{\mathrm{ch}\sqrt{c^2t^2-\left(\frac{c}{a}r\right)^2}}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\varphi(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) r dr d\theta\right] \\ &+ \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{at} \frac{\mathrm{ch}\sqrt{c^2t^2-\left(\frac{c}{a}r\right)^2}}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\psi(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) r dr d\theta,\end{aligned}$$

Exercice: 1.4 节第 9 题

求解以下 Cauchy 问题

（1）$\begin{cases} u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \dfrac{1}{1+(x+y+z)^2} \end{cases}$ （2）$\begin{cases} u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ u|_{t=0} = \sin x + e^{2z}, \quad u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$

解：（1）作代换 $r = x+y+z$，将变换后的函数 u 仍记为 u，则原问题变为

$$\begin{cases} u_{tt} = 12u_{rr} \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \dfrac{1}{1+r^2} \end{cases}$$

故可设齐次方程的解 $u(r,t) = F(r-2\sqrt{3}t) + G(r+2\sqrt{3}t)$，其中 F,G 均为单变量函数

代入初值条件 $u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = \dfrac{1}{1+r^2}$，得

$$\begin{cases} F(r) + G(r) = 0 \\ -2\sqrt{3}F'(r) + 2\sqrt{3}G'(r) = \dfrac{1}{1+r^2} \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} F(r) = -\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\arctan r + C \\ G(r) = \dfrac{1}{4\sqrt{3}}\arctan r - C \end{cases}$，其中 C 为常数

则

$$u = \frac{1}{4\sqrt{3}}(\arctan(x+y+z+2\sqrt{3}t) - \arctan(x+y+z-2\sqrt{3}t))$$

（2）设 u_1, u_2 分别是如下两个问题的解

$$\begin{cases} u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ u|_{t=0} = e^{2z}, \quad u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

由三维泊松公式，

$$u_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{\partial B(M,at)} \sin\xi \mathrm{d}S\right)$$

若作球面坐标代换，不妨令 $\xi = x + r\cos\theta$，则

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(x + r\cos\theta) r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}2\pi\int_0^{\pi} \sin(x + r\cos\theta) r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\right) \end{aligned}$$

作代换 $\alpha = x + r\cos\theta$，则

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}2\pi at\int_{x-at}^{x+at} \sin\alpha \mathrm{d}\alpha\right) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x+at) + \sin(x-at)) \end{aligned}$$

类似地

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{(z+at)} + e^{(z-at)}\right)$$

则解为

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_1(x,y,z,t) + u_2(x,y,z,t) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin(x+at) + \sin(x-at) + e^{(z+at)} + e^{(z-at)}\right) \end{aligned}$$

Exercice: 1.6 节第 1 题

对受摩擦力作用且具有固定端点的有界弦振动，满足方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - c u_t$$

其中常数 $c > 0$，证明其能量是减少的，并由此证明方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - c u_t + f$$

的初边值问题解的唯一性以及关于初始条件及自由项的稳定性

证明：

（1）能量是减少的：

设有界弦长度为 $0 < x < l, E(t) = \int_0^l (u_t^2 + a^2 u_x^2)\mathrm{d}x$

端点固定即为符合第一类边界条件：$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$，则 $u_t|x = 0 = u_t|_{x=l} = 0$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} &= 2\int_0^l \left(u_t \cdot u_{tt} + a^2 u_x u_{xt}\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^l (u_t u_{tt} - a^2 u_t u_{xx})\mathrm{d}x + 2a^2 \int_0^l u_t u_{xx} + u_x u_{xt}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^l u_t(u_{tt} - a^2 u_{xx})\mathrm{d}x + 2a^2 \int_0^l \frac{\partial(u_x u_t)}{\partial x}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^l u_t(u_{tt} - a^2 u_{xx})\mathrm{d}x \\
&= -2c\int_0^l u_t^2 \mathrm{d}x < 0
\end{aligned}$$

即说明能量是减少的

（2）解的唯一性

设 u_1, u_2 为该问题的两个解，则 $u = u_1 - u_2$ 满足齐次方程，齐次初边值条件

由于能量是减少的，则 $0 \le E(t) \le E(0) = 0$ 得 $E(t) \equiv 0$，进而 $u_t = u_x = u_y = 0$，即 u 为常数

又由于 u 的初值为 0，则 u 恒为 0，解唯一

（3）解的稳定性

对于问题 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - c u_t + f \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \end{cases}$

建立该方程的能量不等式，设 $E_0(t) = \int_0^l u^2(x,t)\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} &= 2\int_0^l u_t(u_{tt} - a^2 u_{xx})\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^l u_t(f - c u_t)\mathrm{d}x \\
&\le 2\int_0^l u_t f \mathrm{d}x \\
&\le \int_0^l u_t^2 \mathrm{d}x + \int_0^l f^2 \mathrm{d}x \\
&\le E(t) + \int_0^l f^2 \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

用 e^{-t} 乘上式左右两端，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-t}E(t)] \le e^{-t}\int_0^l f^2 \mathrm{d}x$$

再从 0 到 t 积分，得

$$E(t) \le e^t \left[E(0) + \int_0^t e^{-\tau} \int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \right]$$

于是，对 $0 \le t \le T$，有

$$\begin{aligned} E(t) &\le C_0 \left[E(0) + \int_0^T \int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \right] \\ &\le C_0 \left[E(0) + E_0(0) + \int_0^T \int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \right] \end{aligned}$$

其中 C_0 是一个仅与 T 有关的正常数

又对 $E_0(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E_0(t)}{\mathrm{d}t} &= 2\int_0^l u \cdot u_t \mathrm{d}x \\ &\le \int_0^l u^2 \mathrm{d}x + \int_0^l u_t^2 \mathrm{d}x \\ &\le E_0(t) + E(t) \end{aligned}$$

用 e^{-t} 乘上式左右两端，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-t}E_0(t)] \le e^{-t}E(t)$$

再从 0 到 t 积分，得

$$\begin{aligned} E_0(t) &\le e^t \left[E_0(0) + \int_0^t e^{-\tau} E(\tau) \mathrm{d}\tau \right] \\ &\le e^t E_0(0) + e^t (\int_0^t e^{-\tau} \mathrm{d}\tau) C_0 (E(0) + \int_0^T \int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t) \\ &\le C_1' E_0(0) + C_1'' (E(0) + \int_0^T \int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t) \\ &\le C_1 (E_0(0) + E(0) + \int_0^T \int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t) \end{aligned}$$

其中 C_1', C_1'', C_1 均为仅与 T 有关的正常数

从而得能量不等式

$$E(t) + E_0(t) \le C \left[E_0(0) + E(0) + \int_0^T \int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \right]$$

添加对初始条件及自由项的扰动，

在区间 $[0, l]$ 上，

$$||\varphi_1 - \varphi_2||_{L^2} \le \eta, ||\varphi_{1x} - \varphi_{2x}||_{L^2} \le \eta, ||\psi_1 - \psi_2||_{L^2} \le \eta$$

在区间 $[0, l] \times (0, T)$ 上，$||f_1 - f_2|| \le \eta$

其中 η 为充分小的正数

由能量不等式

$$\begin{aligned} E(t) + E_0(t) &= \int_0^l u_t^2 + a^2 u_x^2 \mathrm{d}x + \int_0^l u^2 \mathrm{d}x \\ &\le C(E(0) + E_0(0) + \int_0^T \int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t) \\ &= C(\int_0^l \psi^2 + a^2 \varphi_x^2 \mathrm{d}x + \int_0^l \varphi^2 \mathrm{d}x + \int_0^T \int_0^l f^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t) \end{aligned}$$

故 $\forall \varepsilon > 0$，只需 $\eta < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{C(a^2 + T + 2)}}$，即可得到

$$||u_{1t} - u_{2t}||^2 + a^2 ||u_{1x} - u_{2x}||^2 + ||u_1 - u_2||^2 \le C(a^2 + T + 2)\eta^2 < \epsilon$$

即 $||u_{1t} - u_{2t}||^2, ||u_{1x} - u_{2x}||^2, ||u_1 - u_2||^2$ 均小于 ε

解是稳定的

Exercice: 1.6 节第 5 题

考虑波动方程的第三类初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \quad t > 0, (x, y) \in \Omega \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u\right)|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

其中 $\sigma > 0$ 是常数，Γ 为 Ω 的边界，$\mathbf{n}$ 为 Γ 上的单位外法线向量，对于上述定解问题的解，定义能量积分

$$E(t) = \iint\limits_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + a^2 \int_{\Gamma} \sigma u^2 \mathrm{d}s$$

试证明 $E(t) \equiv$ 常数，并由此证明上述定解问题解的唯一性

证明：由 Green 公式，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} &= 2\iint\limits_{\Omega} u_t u_{tt} + a^2(u_x u_{xt} + u_y u_{yt})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2a^2 \int_{\Gamma} \sigma u u_t \mathrm{d}S \\ &= 2\iint\limits_{\Omega} u_t \left[u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy})\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &+ 2a^2 \iint\limits_{\Omega} (u_{xx}u_t + u_{yy}u_t + u_x u_{xt} + u_y u_{yt})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2a^2 \int_{\Gamma} \sigma u u_t \mathrm{d}S \\ &= 2\iint\limits_{\Omega} u_t \left[u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy})\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &+ 2a^2 \int_{\Gamma} (u_x u_t \cos(n, x) + u_y u_t \cos(n, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2a^2 \int_{\Gamma} \sigma u u_t \mathrm{d}S \\ &= 2\iint\limits_{\Omega} u_t \left[u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy})\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &+ 2a^2 \int_{\Gamma} u_t (\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u)\mathrm{d}S \\ &= 0 \end{aligned}$$

故 $E(t)$ 恒为常数，下证解的唯一性

设 u_1, u_2 为该问题的两个解，则 $u = u_1 - u_2$ 满足齐次方程，齐次初边值条件

又 $E(t) = E(0) = 0$，即 $u_t = u_x = u_y = 0$，则说明 u 恒为常数，由边界条件得 $u \equiv 0$

解是唯一的

Exercice: 1.6 节第 6 题

设有界区域 $\Omega \subset R^3$ 的边界由 Γ_0, Γ_1 两部分组成，u 为如下初边值问题的解：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \triangle u = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad t > 0 \\ u|_{\Gamma_0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \sigma > 0 \text{为常数} \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z) \end{cases}$$

试证明总能量

$$E(t) = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\Omega} (u_t^2 + a^2 |\nabla u|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

随时间增加而减少

证明：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} &= \iiint\limits_{\Omega} u_t u_{tt} + a^2(u_x u_{xt} + u_y u_{yt} + u_z u_{zt})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iiint\limits_{\Omega} u_t(u_{tt} - a^2\triangle u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + a^2 \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial(u_t u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_t u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_t u_z)}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= a^2 \iint\limits_{\Gamma_0+\Gamma_1} u_t\left(u_x\cos(n,x) + u_y\cos(n,y) + u_z\cos(n,z)\right)\mathrm{d}S \\
&= a^2 \iint\limits_{\Gamma_1} u_t(-\sigma u_t)\mathrm{d}S \\
&= -\sigma a^2 \iint\limits_{\Gamma_1} u_t^2\mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

Exercice: 1.6 节第 7 题

设 $u(x,t)$ 是 $[0,1]\times[0,\infty)$ 中初边值问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - u_{xx} = 0 \\
u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \\
u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x^2(1-x)
\end{cases}
$$

的解，求 $\int_0^1 [u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)]\mathrm{d}x$

解:

由于总能量恒为常数，则 $E(t) = E(0) = \int_0^1 (x^2(1-x))^2\mathrm{d}x = \dfrac{1}{105}$

Exercice: 1.6 节第 8 题

设设 $u(x,t)$ 是 $[0,1]\times[0,\infty)$ 中初边值问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - u_{xx} = 0 \\
u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \\
u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x(1-x)
\end{cases}
$$

的解，求 $\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} [u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)]\mathrm{d}x$

解：容易发现上述问题的解 $u(x,t)$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称

则

$$
\lim_{t\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} [u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)]\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}E(t) = \frac{1}{2}E(0) = \frac{1}{60}
$$

第二章

Exercice: 2.2 节第 1 题

用分离变量法求下列定解问题的解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t > 0, 0 < x < \pi) \\ u(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \quad (t > 0) \\ u(x,0) = f(x) \quad (0 < x < \pi) \end{cases}$$

解：由分离变量法，设 $u(x,t) = X(x)T(t)$
其中 $X'' + \lambda X = 0, T' + \lambda a^2 T = 0, \lambda$ 为常数

当 $\lambda < 0$ 时，$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \sqrt{-\lambda}C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - \sqrt{-\lambda}C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \end{cases}$
由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & -\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} \neq 0$，得 $X(x)$ 只有零解

当 $\lambda = 0$ 时，$X(x) = C_1 + C_2 x$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$，$X(x)$ 只有零解

当 $\lambda > 0$ 时，$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1 = 0 \\ \sqrt{\lambda}C_2 \cos\sqrt{\lambda}\pi = 0 \end{cases}$
解得 $\lambda_k = (\frac{2k+1}{2})^2 \quad k = 0, 1, 2, \ldots$
则 $X(x) = C_2 \sin\frac{2k+1}{2}x$
将 λ_k 代入 $T' + \lambda a^2 T = 0$，解得相应的 $T_k(t)$

则 $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k e^{-(\frac{2k+1}{2})^2 a^2 t} \sin\frac{2k+1}{2}x$
代入初值条件，得 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k \sin\frac{2k+1}{2}x = f(x)$
断言 $\left\{\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin\dfrac{2k+1}{2}x\right\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $L^2[0,\pi]$ 上的正规正交集
容易验证

$$\int_0^\pi \sin\frac{2m+1}{2}x \sin\frac{2n+1}{2}x\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} A_k &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\langle f(x), \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\frac{2k+1}{2}x \right\rangle \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin\frac{2k+1}{2}x\mathrm{d}x \end{aligned}$$

故

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin\frac{2k+1}{2}x\mathrm{d}x \cdot e^{-(\frac{2k+1}{2})^2 a^2 t} \sin\frac{2k+1}{2}x$$

Exercice: 2.2 节第 2 题

用分离变量法求解热传导方程的初边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t > 0, 0 < x < 1) \\ u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 < x \le \dfrac{1}{2} \\ 1-x, & \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad (t > 0) \end{cases}$$

解：由分离变量法，设 $u(x,t) = X(x)T(t)$
其中 $X'' + \lambda X = 0, T' + \lambda T = 0, \lambda$ 为常数

当 $\lambda < 0$ 时，$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}} - C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{cases}$
由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}} & -e^{-\sqrt{-\lambda}} \end{vmatrix} \neq 0$，得 $X(x)$ 只有零解

当 $\lambda = 0$ 时，$X(x) = C_1 + C_2 x$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$，$X(x)$ 只有零解

当 $\lambda > 0$ 时，$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$
代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$
解得 $\lambda_k = (k\pi)^2 \quad k = 1, 2, \ldots$
则 $X(x) = C_2 \sin k\pi x$
将 λ_k 代入 $T' + \lambda T = 0$，解得相应的 $T_k(t)$

则 $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(k\pi)^2 t} \sin k\pi x$
代入初值条件，得

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\pi x = \begin{cases} x, & 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} = f(x)$$

则 A_k 为 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的傅里叶正弦级数的系数，即

$$\begin{aligned} A_k &= 2\int_0^1 f(x) \sin k\pi x \mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} x \sin k\pi x \mathrm{d}x + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \sin k\pi x \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{k^2\pi^2} \sin\frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

故

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2} \sin\frac{k\pi}{2} \cdot e^{-(k\pi)^2 t} \sin k\pi x$$

Exercice: 2.2 节第 3 题

如果有一长度为 l 的均匀细棒，其周围以及两端 $x=0, x=l$ 均为绝热的，初始温度分布为 $u(x,0)=f(x)$，问以后时刻的温度分布如何？且证明当 $f(x)$ 等于常数 u_0 时，恒有 $u(x,t)=u_0$

注：绝热说明不产生热交换，即为齐次的 Neumann 边界条件
建立定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = f(x) \end{cases}$$

由分离变量法，设 $u(x,t)=X(x)T(t)$
其中 $X''+\lambda X=0, T'+\lambda a^2 T=0, \lambda$ 为常数

当 $\lambda<0$ 时，$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$
代入边界条件，得 $\begin{cases} \sqrt{-\lambda}C_1-\sqrt{-\lambda}C_2=0 \\ \sqrt{-\lambda}C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}-\sqrt{-\lambda}C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0 \end{cases}$
由 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & -e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} \neq 0$，得 $X(x)$ 只有零解

当 $\lambda=0$ 时，$X(x)=C_1+C_2x$
代入边界条件，得 $C_2=0$，$X(x)\equiv C_1$

当 $\lambda>0$ 时，$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$
代入边界条件，得 $\begin{cases} \sqrt{\lambda}C_2=0 \\ -\sqrt{\lambda}C_1\sin\sqrt{\lambda}l=0 \end{cases}$
解得 $\lambda_k=(\frac{k\pi}{l})^2 \quad k=1,2,\dots$
则 $X(x)=C_1\cos\frac{k\pi}{l}x$
将 λ_k 代入 $T'+\lambda a^2T=0$，解得相应的 $T_k(t)$

则 $u(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_ke^{-(\frac{k\pi}{l})^2a^2t}\cos\frac{k\pi}{l}x$
代入初值条件，得 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k\cos\frac{k\pi}{l}x=f(x)$
则 A_k 为 $f(x)$ 在区间 $[0,l]$ 上的傅里叶余弦级数的系数，即

$$A_k=\begin{cases} \dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\dfrac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x, & k=1,2,\dots \\ \dfrac{1}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x, & k=0 \end{cases}$$

则

$$u(x,t)=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x\cdot e^{-(\frac{k\pi}{l})^2a^2t}\cos\frac{k\pi}{l}x$$

当 $f(x)\equiv u_0$ 时，$A_k=\begin{cases} u_0, & k=0 \\ 0, & k=1,2,\dots \end{cases}$
则此时，$u(x,t)=u_0$

Exercice: 2.2 节第 7 题

设 $u(x,t)$ 是 $(0,\dfrac{\pi}{2})\times(0,\infty)$ 中初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t)=1, \quad u(\dfrac{\pi}{2},t)=4 \\ u(x,0)=\cos^4 x + 4\sin^5 x \end{cases}$$

的解，求 $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$

解：

作代换 $v(x,t)=u(x,t)-(\frac{6}{\pi}x+1)$

则原问题化为

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} \\ v(0,t)=v(\dfrac{\pi}{2},t)=0 \\ v(x,0)=\cos^4 x + 4\sin^5 x - \frac{6}{\pi}x - 1 \end{cases}$$

由分离变量法，设 $v(x,t)=X(x)T(t)$

其中 $X''+\lambda X=0, T'+\lambda T=0, \lambda$ 为常数

当 $\lambda<0$ 时，$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}}=0 \end{cases}$

由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} & e^{-\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}} \end{vmatrix} \neq 0$，得 $X(x)$ 只有零解

当 $\lambda=0$ 时，$X(x)=C_1+C_2x$

代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1=0 \\ C_1+\frac{\pi}{2}C_2=0 \end{cases}$，$X(x)$ 只有零解

当 $\lambda>0$ 时，$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$

代入边界条件，得 $\begin{cases} C_1=0 \\ C_2\cos\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}=0 \end{cases}$

解得 $\lambda_k=(2k+1)^2 \quad k=0,1,2,\ldots$

则 $X(x)=C_2\sin(2k+1)x$

将 λ_k 代入 $T'+\lambda T=0$，解得相应的 $T_k(t)$

则 $v(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_ke^{-(2k+1)^2t}\sin(2k+1)x$

代入初值条件，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin(2k+1)x=\cos^4 x+4\sin^5 x-\frac{6}{\pi}x-1=f(x)$$

断言 $\left\{\sqrt{\dfrac{4}{\pi}}\sin(2k+1)x\right\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $L^2[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的正规正交集

容易验证

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2m+1)x\sin(2n+1)x\mathrm{d}x=\begin{cases} 0, & m\neq n \\ \dfrac{\pi}{4}, & m=n \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}A_k &= \sqrt{\frac{4}{\pi}}\left\langle f(x), \sqrt{\frac{4}{\pi}}\sin(2k+1)x\right\rangle \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2k+1)x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}u(x,t) &= v(x,t) + \frac{6}{\pi}x + 1 \\ &= \frac{6}{\pi}x + 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2k+1)x\mathrm{d}x \cdot e^{-(2k+1)^2 t}\sin(2k+1)x\end{aligned}$$

则 $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{6}{\pi}x + 1$

Exercice: 2.3 节第 1 题

求下述函数的傅里叶变换

（1）$e^{-\eta x^2} \quad (\eta > 0)$

（2）$e^{-a|x|} \quad (a > 0)$

（3）$\dfrac{x}{(a^2+x^2)^k}$，$\quad \dfrac{1}{(a^2+x^2)^k} \quad (a > 0, k\text{为自然数})$

解：

（1）$f(x) = e^{-\eta x^2}$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta x^2}\cdot e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{4\eta}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta(x+\frac{i\lambda}{2\eta})^2}\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}e^{-\frac{\lambda^2}{4\eta}}\end{aligned}$$

（2）$f(x) = e^{-a|x|}$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\cdot e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{ax}\cdot e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x + \int_0^{\infty} e^{-ax}\cdot e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a-i\lambda} + \frac{1}{a+i\lambda} \\ &= \frac{2a}{a^2+\lambda^2}\end{aligned}$$

（3）$f(x) = \dfrac{1}{(a^2+x^2)^k}$ 的傅里叶变换为

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda x}}{(a^2+x^2)^k}\mathrm{d}x$$

将这个积分视为复平面上的积分，设 $g(z) = \dfrac{e^{-i\lambda z}}{(a^2+z^2)^k}$

则 $\tilde{f}(\lambda)$ 即为 $g(z)$ 在实轴 Γ 上的积分

不妨设复平面中的上半平面 Ω 为实轴 Γ 所围成的区域，

容易发现 $g(z)$ 在 Ω 中有奇点 $z = ai$

则由柯西留数定理

$$\tilde{f}(\lambda)=\int_\Gamma g(z)\mathrm{d}z=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=ai}g(z)$$

又奇点 $z=ai$ 为 k 阶奇点，设 $g(z)=\dfrac{\frac{e^{-\lambda z}}{(z+ai)^k}}{(z-ai)^k}=\dfrac{\varphi(z)}{(z-ai)^k}$

则

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=ai}g(z)&=\frac{\varphi^{(k-1)(ai)}}{(k-1)!}\\
&=\frac{1}{(k-1)!}\left[\sum_{m=0}^{k-1}C_{k-1}^m\left((z+ai)^{-k}\right)^{(m)}\cdot\left(e^{-i\lambda z}\right)^{(k-m-1)}\right]\Bigg|_{z=ai}\\
&=\frac{1}{(k-1)!}\left[\sum_{m=0}^{k-1}C_{k-1}^m\left(\frac{(-1)^m(k+m-1)!}{(k-1)!(2ai)^{k+m}}\right)\left((-i\lambda)^{k-m-1}\cdot e^{a\lambda}\right)\right]\\
&=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(k+m-1)!(-1)^{k-m-1}}{m!(k-m-1)!i(2a)^{k+m}}\cdot\lambda^{k-m-1}e^{a\lambda}
\end{aligned}$$

则

$$\tilde{f}(\lambda)=\frac{2\pi i}{(k-1)!}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(k+m-1)!(-1)^{k-m-1}}{m!(k-m-1)!i(2a)^{k+m}}\cdot\lambda^{k-m-1}e^{a\lambda}$$

注：（1）柯西留数定理：$f(z)$ 在周线或复周线 C 所围成的区域 D 内，除 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外解析，在闭域 $\overline{D}=D+C$ 上除 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外连续，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^n\operatorname*{Res}_{z=a_k}f(z)$$

（2）$(f\cdot g)^{(k)}=\sum\limits_{m=0}^{k}C_k^m f^{(m)}\cdot g^{(k-m)}$

Exercice: 2.3 节第 3 题

用傅里叶变换求解三维热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z)\end{cases}$$

解：对齐次方程及初始条件均作用关于 x,y,z 的傅里叶变换，记 $F(u)=\tilde{u}(\lambda,\mu,\nu,t)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}t}=-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\tilde{u}\\ \tilde{u}(\lambda,\mu,\nu,0)=\tilde{\varphi}(\lambda,\mu,\nu,0)\end{cases}$$

解这个关于 t 的常微分方程，得到 $\tilde{u}=\tilde{\varphi}\cdot e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}$

方程两端同时作用傅里叶逆变换，

由于

$$\begin{aligned}
F^{-1}(e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t})&=(\frac{1}{2\pi})^3\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}\cdot e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu\\
&=(\frac{1}{2\pi})^3e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}}(\sqrt{\frac{\pi}{a^2t}})^3\\
&=(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}})^3e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}}
\end{aligned}$$

则

$$u=(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}})^3\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi(\xi,\eta,\zeta)e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

Exercice: 2.3 节第 5 题

求解热传导方程（3.17）的柯西问题，已知

（1）$u|_{t=0} = \sin x$

（2）用延拓法求解半有界直线上的热传导方程（3.17），假设

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 < x < \infty) \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$

解：

(1) 考虑如下定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u|_{t=0} = \sin x \end{cases}$$

由傅里叶变换法，该问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\xi e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}+i\xi} - e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}-i\xi} \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \frac{1}{2i} \left(2a\sqrt{\pi t} \cdot e^{-a^2t+ix} - 2a\sqrt{\pi t} \cdot e^{-a^2t-ix}\right) \\ &= e^{-a^2t} \sin x \end{aligned}$$

（2）考虑如下定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 < x < \infty) \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$

作 $\varphi(x)$ 在整个区间上的延拓 $\Phi(x)$，则由傅里叶变换法，

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} (\int_{-\infty}^{0} \Phi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \mathrm{d}\xi + \int_{0}^{\infty} \Phi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \mathrm{d}\xi) \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} (\int_{0}^{\infty} \Phi(-\xi) e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \mathrm{d}\xi + \int_{0}^{\infty} \Phi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \mathrm{d}\xi) \end{aligned}$$

代入边界条件，可得

$$0 = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} (\Phi(-\xi) + \Phi(\xi)) e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} \mathrm{d}\xi$$

若使上式成立，只需令 $\Phi(x)$ 为 $\varphi(x)$ 的奇延拓，

此时

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} \varphi(\xi) (e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}) \mathrm{d}\xi$$

Exercice: 2.3 节第 6 题

证明：函数

$$v(x,y,t;\xi,\eta,\tau)=\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}e^{-\dfrac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

对于变量 (x,y,t) 满足方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

而对于变量 (ξ,η,τ) 满足方程

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}+a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right)=0$$

证明：

直接计算，容易验证

$$v_t=v\left(\frac{-1}{t-\tau}+\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)^2}\right)$$

$$v_x=v\cdot\frac{-2(x-\xi)}{4a^2(t-\tau)}$$

$$v_{xx}=v\left(\frac{(x-\xi)^2}{4a^4(t-\tau)^2}-\frac{2}{4a^2(t-\tau)}\right)$$

则 $\dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$

$$v_\tau=v\cdot\left(\frac{1}{t-\tau}-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)^2}\right)$$

$$v_\xi=v\cdot\frac{(x-\xi)}{2a^2(t-\tau)}$$

$$v_{\xi\xi}=v\cdot\left(\frac{(x-\xi)^2}{4a^4(t-\tau)^2}-\frac{1}{2a^2(t-\tau)}\right)$$

则 $\dfrac{\partial v}{\partial \tau}+a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right)=0$

Exercice: 2.3 节第 7 题

证明：如果 $u_1(x,t),u_2(y,t)$ 分别是下述两个定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\\ u_1|_{t=0}=\varphi_1(x)\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial u_2}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\\ u_2|_{t=0}=\varphi_2(x)\end{cases}$$

的解，则 $u(x,y,t)=u_1(x,t)u_2(y,t)$ 是定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\ u|_{t=0}=\varphi_1(x)\varphi_2(y)\end{cases}$$

的解

直接验证即可

Exercice: 2.4 节第 1 题

证明方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+cu(c\geq 0)$ 具有 Dirichlet 边界条件的初边值问题解的唯一性与稳定性

证明：作代换 $v=e^{-ct}u$，则原方程化为齐次方程 $v_t=a^2v_{xx}$，且具有 Dirichlet 边界条件

（1）解的唯一性：
若设 u_1,u_2 是原问题的两个解，则相应地，v_1,v_2 是 $v_t=a^2v_{xx}$ 具有 Dirichlet 边界条件的两个解
则 $v=v_1-v_2$ 满足齐次方程和齐次 Dirichlet 边界条件
由极值原理，v 的最值在边界处取到，由于齐次边界，则 v 的最大最小值均为 0
则 $e^{-ct}u=e^{-ct}(u_1-u_2)\equiv 0$，则解是唯一的

（2）解的稳定性：
若 $|u_1-u_2|\leq\varepsilon$ 在边界处成立，则 $|v_1-v_2|\leq e^{-ct}\varepsilon$ 在边界处成立
由极值原理，$|v_1-v_2|\leq e^{-ct}\varepsilon$ 在整个区域成立，
则 $|u_1-u_2|\leq\varepsilon$ 在整个区域成立

Exercice: 2.4 节第 3 题

设 $u(x,t)$ 为热传导方程

$$u_t-a^2u_{xx}-cu=0$$

在矩形 $R=\{(x,t)|0<x<l,0<t<T\}$ 中的解，其中 $c>0$ 为常数。如果

$$|u(0,t)|,|u(l,t)|\leq M,\quad t\in[0,T]$$

$$|u(x,0)|\leq M,\quad x\in[0,l]$$

试证：

$$|u(x,t)|\leq Me^{ct},\quad (x,t)\in R$$

由此给出该方程的第一初边值问题的解对初值与边值的连续依赖性

证明：作代换 $v=e^{-ct}u$，则原方程化为齐次方程 $v_t=a^2v_{xx}$
且 $|v(0,t)|,|v(l,t)|,|v(x,0)|\leq|e^{-ct}M|\leq M$
由极值原理，在整个矩形 R 内，$|v(x,t)|=e^{-ct}|u(x,t)|\leq M$，即 $|u(x,t)|\leq Me^{ct}$
稳定性：
若问题的两个解 u_1,u_2 满足 $|u_1(x,0)-u_2(x,0)|\leq\varepsilon,|u_1(0,t)-u_2(0,t)|\leq\varepsilon,|u_1(l,t)-u_2(l,t)|\leq\varepsilon$，
则相应地 $|v_1(x,0)-v_2(x,0)|\leq\varepsilon,|v_1(0,t)-v_2(0,t)|\leq e^{-ct}\varepsilon,|v_1(l,t)-v_2(l,t)|\leq e^{-ct}\varepsilon$
由极值原理，在整个矩形 R 内，$|v_1(x,t)-v_2(x,t)|=e^{-ct}|u_1(x,t)-u_2(x,t)|\leq e^{-ct}\varepsilon$
则 $|u_1(x,t)-u_2(x,t)|\leq\varepsilon$ 在整个矩形 R 内成立

Exercice: 2.4 节第 4 题

证明无界区域上热传导方程的极值原理：设 $u(x,t)$ 在带形区域 $\{(x,t)|x\in R,0\leq t\leq T\}$ 上连续有界，当 $0<t<T$ 时满足热传导方程 $u_t-a^2u_{xx}=0$，则

$$\sup_{0\leq t\leq T,x\in R}u(x,t)=\sup_{x\in R}u(x,0)$$

$$\inf_{0\leq t\leq T,x\in R}u(x,t)=\inf_{x\in R}u(x,0)$$

证明：记 $\sup\limits_{x\in R}u(x,0)=A,|u(x,t)|\leq 2B$

构造函数 $v(x,t)=\dfrac{4B-2A}{L^2}[\dfrac{(x-x_0)^2}{2}+a^2t]+A$，则 $v_t=a^2v_{xx}$
考虑区域 $R_0=\{(x,t)|0\le t\le t_0,|x-x_0|\le L\}$，则

$$v(x,0)=\frac{4B-2A}{L^2}[\frac{(x-x_0)^2}{2}]+A\ge A$$

$$v(x_0\pm L,t)=\frac{4B-2A}{L^2}[\frac{L^2}{2}+a^2t]+A\ge 2B\ge u(x_0\pm L,t)$$

由极值原理，$v(x,t)\ge u(x,t)$ 在 R_0 上恒成立
令 $t\to\infty$，得 $u(x_0,y_0)\le\lim\limits_{L\to\infty}v(x_0,y_0)=A$
故

$$\sup_{0\le t\le T,x\in R}u(x,t)=\sup_{x\in R}u(x,0)$$

同理，

$$\inf_{0\le t\le T,x\in R}u(x,t)=\inf_{x\in R}u(x,0)$$

Exercice: 2.4 节第 6 题

设 $u(x,t)$ 是 $\{0\le x\le l,0\le t\le T\}$ 中边值问题

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}+f(x)\\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=0\end{cases}$$

的经典解，其中 $f(x)\le 0$ 在 $0\le x\le l$ 上成立。试证明：对任意的 $x_0\in(0,l)$，函数 $u(x_0,t)$ 关于 t 是非增的

注：教材 86 页注：由极值原理的证明可见，若 u 是非齐次热传导方程 $u_t-u_{xx}=f$ 的解，且 $f\le 0$，则仍成立 $\max\limits_{R_T}u=\max\limits_{\Gamma_T}u$

证明：
由极值原理，上述问题的解的最大值只在抛物边界处取到, 即为 0
任意的 $x_0\in(0,l),t_0\in(0,T)$，$u(x_0,t_0)<0=u(x_0,0)$
则显然 $u(x_0,t)$ 关于 t 是非增的

Exercice: 2.5 节第 4 题

设 $u(x,t)$ 是区域 $\{-\infty<x<\infty,t>0\}$ 中柯西问题

$$\begin{cases}u_t=u_{xx},\quad t>0\\ u|_{t=0}=e^{-x^2}\end{cases}$$

的解，求 $\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^\infty u(x,t)\mathrm{d}x$

解：由傅里叶变换法，

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{\sqrt{4t+1}}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty u(x,t)\mathrm{d}x&=\frac{1}{\sqrt{4t+1}}\sqrt{4t+1}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

Exercice: 2.5 节第 5 题

设 $u(x,t)$ 是 $(0,l)\times(0,\infty)$ 中初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = u(l,t) = t \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

的解，其中 $\varphi(x)$ 在 $[0,l]$ 上连续可微，$\varphi(0)=\varphi(l)=0$，求 $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}u(x,t)$

解：作代换 $v = u - t - \dfrac{x(x-l)}{2}$
原问题化为

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = \varphi(x) - \dfrac{x(x-l)}{2} \end{cases}$$

则由分离变量法，具有齐次 Dirichlet 边界条件的齐次方程的解形如

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 t} \sin\frac{k\pi}{l}x$$

代入初值条件，得

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x = \varphi(x) - \frac{x(x-l)}{2}$$

则容易发现 $A_k = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l (\varphi(x) - \frac{x(x-l)}{2}) \sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x$ 有界，设 $|A_k| \le M$

当 t 充分大时，不妨设 $t \ge t_0$，则

$$|v(x,t)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| e^{-\frac{k^2\pi^2}{l}t} \le C(t_0)$$

其中 $C(t_0)$ 为仅与 t_0 有关的常数
则

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}u(x,t) = \lim_{t\to\infty} t^{-1}v(x,t) + 1 + \lim_{t\to\infty}\frac{x(x-l)}{2t} = 1$$

第三章

Exercice: 3.1 节第 1 题

设 $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(r)$（其中 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ 是 n 维调和函数（即满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$），试证明：

$$f(r) = c_1 + \frac{c_2}{r^{n-2}}(n \neq 2)$$

$$f(r) = c_1 + c_2 \ln \frac{1}{r}(n = 2)$$

其中 c_1, c_2 为任意常数

证明：

容易验证

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{f'(r)}{r} x_1$$

$$\frac{\partial^u}{\partial x_1^2} = \frac{f''(r)}{r^2} x_1^2 - \frac{f'(r)}{r^3} x_1^2 + \frac{f'(r)}{r}$$

则

$$\Delta u = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r)$$

容易验证

$$f(r) = c_1 + \frac{c_2}{r^{n-2}}(n \neq 2)$$

$$f(r) = c_1 + c_2 \ln \frac{1}{r}(n = 2)$$

满足上述等式

注：或者通过如下的命题解出 $f(r)$

（常微分方程，柳彬，193 页）命题：设 $y = \varphi(x) \neq 0$ 是二阶齐次线性 ode

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

的一个解，则方程的通解为

$$y = c_1\varphi(x) + c_2\varphi(x) \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-\int_{x_0}^{s} a(x)\mathrm{d}t}}{\varphi^2(s)} \mathrm{d}s$$

其中 c_1, c_2 为常数，x_0 为给定的初值

Exercice: 3.1 节第 3 题

证明：拉普拉斯算子在柱面坐标 (r, θ, z) 下可以写成

$$\triangle u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

注：典型错误：

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} &= r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x^2} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \end{aligned}\right.$$

错误原因在于忽略了 θ 与 x,y 有关

证明：由链式法则，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{1}{r}(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} \\ &= -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}$$

再求一次偏导，得到

$$r\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) = x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + y\frac{\partial}{\partial y} + xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\partial}{\partial \theta}) = y^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x\frac{\partial}{\partial x} - xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y\frac{\partial}{\partial y} - xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$

容易验证，

$$\triangle u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Exercice: 3.1 节第 11 题

证明：若 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$，使泛函

$$J[v] = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}(|\bigtriangledown v|^2 + cv^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{\Omega} Fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega} gv\mathrm{d}S$$

取极小，则它满足

$$\begin{cases} -\triangle u + cu = F \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

证明：任取 $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$，
则 $\forall \lambda \in \mathbb{R}, J(u+\lambda w) \geq J(w)$
令 $\varphi(\lambda) = J(u+\lambda w)$，则 $\varphi(\lambda) \geq \varphi(0)$，可得 $\varphi'(0) = 0$
由 Green 第一公式，

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= \iint\limits_{\Omega}(u_x w_x + u_y w_y) + cuw\mathrm{d}\Omega - \iint\limits_{\Omega} Fw\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega} gw\mathrm{d}S \\ &= \int_{\partial\Omega} w(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - g)\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Omega} w(cu - \Delta u - F)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 0\end{aligned}$$

由 w 的任意性，可说明 $\begin{cases} -\triangle u + cu = F \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$
不妨取 w 在 $\partial\Omega$ 上为 0，若设 $cu - \Delta u - F$ 在 M 点取值不为 0，不妨设为正

由 $cu-\Delta u-F$ 的连续性，其在 M 的某个小邻域 N 内均为正值

则进一步取 w 在 N 内为正，N 外为 0，可得 $\varphi'(0)=\iint\limits_{\Omega} w(cu-\Delta u-F)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$，矛盾

故 $cu-\Delta u-F\equiv 0$，类似地，可得 $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega}-g\equiv 0$

Exercice: 3.1 节第 12 题

设

$$J(v)=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{2}\left[(\frac{\partial v}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2+(\frac{\partial v}{\partial z})^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\sigma v^2-gv\right)\mathrm{d}S$$

变分问题的提法为：求 $u\in V$，使

$$J(u)=\min_{v\in V}J(v)$$

其中 $V=C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$，试导出与此变分问题等价的边值问题，并证明它们的等价性

证明：任取 $w\in V,\lambda\in\mathbb{R}$，设 $\varphi(\lambda)=J(u+\lambda w)$

u 为变分问题的解，等价于 $\varphi(\lambda)\geq\varphi(0)$

则 $\varphi'(0)=0$

由 Green 第一公式，

$$\begin{aligned}\varphi'(0)&=\iiint\limits_{\Omega}(u_xw_x+u_yw_y+u_zw_z)\mathrm{d}\Omega+\iint_{\Gamma}(\sigma uw-gw)\mathrm{d}S\\&=\iint_{\Gamma}w(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}+\sigma u-g)\mathrm{d}S-\iiint\limits_{\Omega}w\cdot\Delta u\mathrm{d}\Omega\\&=0\end{aligned}$$

由 w 的任意性，可说明 $\begin{cases}\Delta u=0\\(\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}+\sigma u)|_{\Gamma}=g\end{cases}$

不妨取 w 在 Γ 上为 0，若设 Δu 在 M 点取值不为 0，不妨设为正

由 Δu 的连续性，其在 M 的某个小邻域 N 内均为正值

则进一步取 w 在 N 内为正，N 外为 0，可得 $\varphi'(0)=-\iiint\limits_{\Omega}w\cdot\Delta u\mathrm{d}\Omega<0$，矛盾

故 $\Delta u\equiv 0$，类似地，可得 $(\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}+\sigma u)|_{\Gamma}=g$

所以，若 u 是变分问题的解，则 u 也是如下边值问题的解

$$\begin{cases}\Delta u=0\\(\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}+\sigma u)|_{\Gamma}=g\end{cases}$$

下证其反面，设 u 是上述边值问题的解，则由 Green 第一公式

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda) &= J(u+\lambda w) \\
&= J(u) + \lambda^2 \left(\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial w}{\partial x})^2 + (\frac{\partial w}{\partial y})^2 + (\frac{\partial w}{\partial z})^2 \right] \mathrm{d}\Omega + \iint\limits_{\Gamma} \frac{1}{2}\sigma w^2 \mathrm{d}S \right) \\
&+ \lambda \left(\iiint\limits_{\Omega} (u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z)\mathrm{d}\Omega + \iint\limits_{\Gamma} \sigma u w \mathrm{d}S - \iint_{\Gamma} g w \mathrm{d}S \right) \\
&= J(u) + \lambda^2 \left(\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial w}{\partial x})^2 + (\frac{\partial w}{\partial y})^2 + (\frac{\partial w}{\partial z})^2 \right] \mathrm{d}\Omega + \iint\limits_{\Gamma} \frac{1}{2}\sigma w^2 \mathrm{d}S \right) \\
&+ \lambda \left(\iint_{\Gamma} w(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u - g)\mathrm{d}S - \iiint\limits_{\Omega} w \cdot \Delta u \mathrm{d}\Omega \right) \\
&\geq J(u) = \varphi(0)
\end{aligned}$$

注：在 Robin 边界条件中，σ 为已知正数

Exercice: 3.2 节第 3 题

设 $u(M)$ 在 Ω 内调和，M_0 是 Ω 中的任意点，B_α 是以 M_0 为球心，a 为半径的球体，其体积为 $|B_\alpha|$，证明：成立

$$u(M_0) = \frac{1}{|B_\alpha|} \iiint\limits_{B_\alpha} u \mathrm{d}V$$

证明：对任意半径为 $r < a$ 的球面，由平均值公式，有

$$4\pi r^2 u(M_0) = \iint\limits_{\partial B(M_0,r)} u \mathrm{d}S$$

对上述方程两端同时从 0 到 a 积分，即得所求

Exercice: 3.2 节第 6 题

对于二阶偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0$$

其中 $a_{ij}, b_i, c (i,j = 1,2,\ldots,n)$ 均为常数，假设矩阵 (a_{ij}) 是正定的，即对任何实数 $\lambda_i (i = 1,2,\ldots,n)$，成立

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \quad (\alpha\text{为正的常数})$$

则称它为椭圆型方程，又设 $c < 0$，试证明该方程的解也成立如下的极值原理：若 u 在 Ω 中满足方程，在 $\Omega \cup \Gamma$ 上连续，则 u 不能在 Ω 的内部达到正的最大值或负的最小值

证明：反证法，设 u 在 Ω 内部一点 M_0 达到正最大值，则在 M_0 点处，$cu < 0, \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$

下面不妨证 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}|_{M_0} \leq 0$

由于矩阵 $(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}|_{M_0})_{n\times n}$ 是非正定的，即

$$\forall \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{M_0} \lambda_i \lambda_j \leq 0$$

由于矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 是正定的，则 $\lambda^T A\lambda$ 可以写成 $\lambda^T(B^TB)\lambda$ 的形式，即

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j = \sum_{i,j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} b_{ki}b_{kj})\lambda_i\lambda_j$$

则

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}|_{M_0} = \sum_{i,j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} b_{ki}b_{kj})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}|_{M_0} \le 0$$

故在 M_0 点，

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu < 0$$

得出矛盾

Exercice: 3.2 节第 8 题

举例说明对于方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu = 0(c > 0)$，不成立极值原理

解：考虑在 $[0,\sqrt{\frac{2}{c}}\pi]\times[0,\sqrt{\frac{2}{c}}\pi]$ 上的 $u = \sin\sqrt{\frac{c}{2}}x\sin\sqrt{\frac{c}{2}}y$

Exercice: 3.3 节第 2 题

证明格林函数的对称性：$G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1)$

证明：设 $M_1, M_2 \in \Omega$，记球 $B_1 = B(M_1,\varepsilon), B_2 = B(M_2,\varepsilon), \Omega_\varepsilon = \Omega/(B_1\cup B_2)$
其中 ε 为充分小的正数，使得 $B_1\cap B_2 = \varnothing$
在 Ω_ε 中，有

$$\begin{aligned}
0 &= \iint_{\Omega_\varepsilon} G(M,M_1)\Delta G(M,M_2) - G(M,M_2)\Delta G(M,M_1)\mathrm{d}\Omega && (\Delta G(M,M_1) = \Delta G(M,M_2) = 0)\\
&= \iint_{\partial\Omega\cup\partial B_1\cup\partial B_2} G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial\mathbf{n}} - G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}S && (\text{Green 公式})\\
&= \iint_{\partial B_1} G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial\mathbf{n}} - G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}S\\
&\quad + \iint_{\partial B_2} G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial\mathbf{n}} - G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}S && (\Delta G(M,M_1)|_{\partial\Omega} = \Delta G(M,M_2)|_{\partial\Omega} = 0)\\
&= \iint_{\partial B_1} G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}S - \iint_{\partial B_2} G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}S\\
&\quad + G(M_1,M_2) - G(M_2,M_1) && (\text{调和函数 G 的积分表达式})
\end{aligned}$$

由于 $G(M,M_2)$ 在 $\overline{B_1}$ 内调和，则 $\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial\mathbf{n}}$ 在 $\overline{B_1}$ 内有界，则

$$\begin{aligned}
&\left|\iint_{\partial B_1} G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}S\right|\\
\le& K\left|\iint_{\partial B_1} G(M,M_1)\mathrm{d}S\right|\\
\le& K\iint_{\partial B_1}\frac{1}{4\pi r_{MM_1}} - g(M,M_1)\mathrm{d}S\\
=& \frac{k}{4\pi\varepsilon}\cdot 4\pi\varepsilon^2 - kg^* 4\pi\varepsilon^2
\end{aligned}$$

其中 g^* 即为 g 在 ∂B_1 上的平均值
对（1）式两端取极限 $\varepsilon\to 0$，即得 $G(M_1,M_2) = G(M_2,M_1)$

Exercice: 3.3 节第 5 题

求半圆区域上狄利克雷问题的格林函数

证明：设半圆区域 $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2 \le R^2, y>0\}$，
任取 $M_0 \in \Omega$，M_0 相对于 Ω 的对称点记为 M_1, M_2, M_3，
其中 M_1 为 M_0 关于圆周的对称点，
M_2 为 M_0 关于 x 轴的对称点，
M_3 为 M_1 关于 x 轴的对称点，
记 $\rho = r_{0M}, \rho_0 = r_{0M_0}, \rho_1 = r_{0M_1}$，$\quad \gamma =< \rho, \rho_1 >, \alpha =< \rho, \rho_2 >$
则相应地 Green 函数为

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}(\ln\frac{1}{r_{MM_0}} - \ln\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_{MM_1}} - \ln\frac{1}{r_{MM_2}} + \ln\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_{MM_3}})$$

其中

$$r_{MM_0} = \sqrt{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\gamma} \quad r_{MM_1} = \sqrt{\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos\gamma}$$
$$r_{MM_2} = \sqrt{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\alpha} \quad r_{MM_3} = \sqrt{\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos\gamma}$$

故由 $R^2 = \rho_0\rho_1$ 可消去 ρ_1，得

$$\begin{aligned} G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\Big(\ln\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\gamma}} - \ln\frac{R}{\sqrt{\rho^2\rho_0^2+R^4-2\rho\rho_0R^2\cos\gamma}} \\ -\ln\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\alpha}} + \ln\frac{R}{\sqrt{\rho^2\rho_0^2+R^4-2\rho\rho_0R^2\cos\alpha}}\Big) \end{aligned}$$

Exercice: 3.3 节第 6 题

利用泊松公式求边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0, \quad x^2+y^2+z^2<1 \\ u(r,\theta,\varphi)|_{r=1} = 3\cos 2\theta + 1 \quad (r,\theta,\varphi\text{表示球面坐标}) \end{cases}$$

的解

注：ledengre 多项式的性质：
????

Exercice: 3.3 节第 7 题

求泊松方程狄利克雷问题

$$\begin{cases} \triangle u = x^2 y, \quad x^2+y^2<a^2 \\ u=0, \qquad x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

的解

????

Exercice: 3.3 节第 9 题

利用半空间 R_+^3 的格林函数导出半空间中调和方程狄利克雷问题有界解的公式

????

Exercice: 3.4 节第 1 题

用 B_r 记以原点为球心，半径为 r 的球。若 u 是 B_1 上的调和函数，且在 $B_{\frac{1}{2}}$ 上恒为零，证明：u 在 B_1 上恒为零

Exercice: 3.4 节第 2 题

证明二维调和函数的可去奇点定理：若 A 是调和函数 $u(M)$ 的孤立奇点，在点 A 的邻域中成立着

$$u(M) = o(\ln \frac{1}{r_{AM}})$$

则此时可以重新定义 $u(M)$ 在 $M = A$ 的值，使它在点 A 亦是调和的

Exercice: 3.4 节第 3 题

证明：如果三维调和函数 $u(M)$ 在奇点 A 附近能表示为 $\dfrac{N}{r_{AM}^{\alpha}}$，其中常数 $0 < \alpha \leq 1$，而 N 是不为零的光滑函数，则当 $M \to A$ 时它趋于无穷大的阶数必与 $\dfrac{1}{r_{AM}}$ 同阶，即 $\alpha = 1$

Exercice: 3.4 节第 7 题

证明：处处满足平均值公式（2.13）的连续函数一定是调和函数

Exercice: 3.5 节第 4 题

设 Ω 为 R^3 的有界区域，边界为 Γ，u 为定解问题

$$\begin{cases} -\triangle u + cu = f, & \text{其中} c > 0, f > 0 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u\right)\Bigg|_{\partial\Omega} = g & \text{其中} \sigma > 0, g > 0 \end{cases}$$

的解，证明：在 $\overline{\Omega}$ 上 $u > 0$

证明：

不妨先证在 $\overline{\Omega}$ 上 u 不可能恒为非负值，反设 $u \leq 0$ 恒成立

对函数 u 和 1 使用 Green 第一公式，得到

$$\iiint_{\Omega} \Delta u \mathrm{d}\Omega = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{d}S$$

一方面，$\iiint_{\Omega} \Delta u \mathrm{d}\Omega = \iiint_{\Omega} cu - f \mathrm{d}\Omega < 0$

另一方面，$\iint_{\partial\Omega} \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{d}S = \iint_{\partial\Omega} g - \sigma u \mathrm{d}S > 0$

两者显然不等，得到矛盾；即 u 在 $\overline{\Omega}$ 上必能取到正值

反设 $\overline{\Omega}$ 上 $u > 0$ 不恒成立，则最小值一定为负

不妨设在 Ω 内部取到最小值，则此时 $\Delta u \geq 0$，这与 $cu - f < 0$ 矛盾

若 $\partial\Omega$ 上取到最小值，则 $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \leq 0$，这与 $g - \sigma u > 0$ 矛盾

则 $\overline{\Omega}$ 上 $u > 0$ 恒成立

Exercice: 3.5 节第 5 题

举例说明：当 $\sigma > 0$ 不成立时（但 σ 不恒等于零），调和方程满足边界条件 $\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u\right)\Big|_{\partial\Omega} = g$ 的解可以不唯一

解：考虑问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u = 0 \end{cases}$$

原问题有唯一解，等价于该问题只有零解

不妨设该问题在二维区域 $B(0,1)$ 上成立，则容易发现 $u(x,y) = x$ 是上述问题取 $\sigma = -1$ 的非零解

Exercice: 3.5 节第 7 题

设 Ω 是具有光滑边界的有界区域，边值问题

$$\begin{cases} \triangle u - u = 0 \quad 在\Omega内 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的解 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ 在 Ω 内是否可能是严格正的

证明：结论：不可能严格正

（法 1）：若设 u 是严格正的，对函数 u 和 1 使用 Green 第一公式，得到

$$0 = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{d}s = \iiint_{\Omega} \Delta u \mathrm{d}\Omega = \iiint_{\Omega} u \mathrm{d}\Omega > 0$$

得到矛盾

（法 2）：反设 u 是严格正的，若 u 在内部达到最大值，则在最大值点处 $\Delta u < 0$，这与 $\Delta u = u > 0$ 矛盾

若 u 在边界达到最大值，则由 Hopf 极值原理，$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} > 0$ 矛盾

Exercice: 3.5 节第 8 题

设 Ω 为平面上的椭圆环 $\{(x,y)|1 \le x^2 + 2y^2 \le 2\}, u(x,y) \in C^2(\overline{\Omega})$ 是如下的边值问题的解：

$$\begin{cases} \triangle u = 0, & (x,y) \in \overline{\Omega} \\ u(x,y) = x + y, & x^2 + 2y^2 = 2 \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial \mathbf{n}} + (1-x)u(x,y) = 0, & x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

求 $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u(x,y)|$

解：首先由极值原理，最值不在 Ω 内部取到,

设最大值在边界 $x^2 + 2y^2 = 1$ 上一点 M_0 取到，由 Hopf 极值原理，$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{M_0} < 0$，

则 $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial \mathbf{n}} + (1-x)u(x,y)|_{M_0} < 0$，矛盾

这说明 $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u(x,y)| = \max\limits_{x^2+2y^2=2} |x+y| = \sqrt{3}$

第四章

Exercice: 4.1 节第 1 题

证明：两个自变量的二阶线性方程组经过自变量的可逆变换后，其类型不会改变，即变换后 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ 的符号不变

证明：

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta} &= \overline{a_{12}}^2 - \overline{a_{11}a_{22}} \\ &= (a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\xi_x\eta_y + a_{12}\xi_y\eta_x + a_{22}\xi_y\eta_y)^2 \\ &- (a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2)(a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2) \\ &= \Delta \cdot (\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2\end{aligned}$$

由于 $\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0$，则 $\tilde{\Delta}$ 与 Δ 同号

Exercice: 4.1 节第 2 题

判定下列方程的类型

（2）$u_{xx} + (x+y)^2u_{yy} = 0$

（4）$u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} = 0$

（5）$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} = 0$，其中 $\operatorname{sgn} y = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases}$

解：

（2）$\Delta = -(x+y)^2$

方程在直线 $x+y=0$ 上为抛物型的，在其余处为椭圆型

（4）考虑 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 4\lambda + 4$，由于 $f(-1) = -7, f(0) = 4, f(2) = -4, f(6) = 28$

得 $f(\lambda)$ 的零点分布为 $-1 < \lambda_1 < 0 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3 < 6$

则方程为双曲型的

（5）$\Delta = -sgny$

方程在 $y > 0$ 处为椭圆型；$y = 0$ 处为抛物型，$y < 0$ 处为双曲型

Exercice: 4.1 节第 3 题

化下列方程为标准形式：

（1）$u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$

（4）$u_{xx} - (2\cos x)u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$

（5）$(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$

解：

（1）$\Delta = -1 < 0$，方程为椭圆型

特征方程 $(\mathrm{d}y)^2 - 4\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y + 5(\mathrm{d}x)^2 = 0$ 的解为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 \pm i$$

得积分曲线族

$$\begin{cases} 2x-y+ix=C_1 \\ 2x-y-ix=C_2 \end{cases}$$

作代换 $\begin{cases} \xi=2x-y \\ \eta=x \end{cases}$，则

$$\begin{cases} \overline{a_{11}}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=1 \\ \overline{a_{12}}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y=0 \\ \overline{a_{22}}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2=1 \\ \overline{b_1}=\left(a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}\right)+\left(b_1\xi_x+b_2\xi_y\right)=0 \\ \overline{b_2}=\left(a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}\right)+\left(b_1\eta_x+b_2\eta_y\right)=1 \\ \overline{c}=c=0 \\ \overline{f}=f=0 \end{cases}$$

故标准形式为

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\eta=0$$

（4）$\Delta=4>0$，方程为双曲型

特征方程 $(\mathrm{d}y)^2+2\cos x\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y-(3+\sin^2 x)(\mathrm{d}x)^2=0$ 的解为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\cos x\pm 2$$

得积分曲线族

$$\begin{cases} y+\sin x+2x=C_1 \\ y+\sin x-2x=C_2 \end{cases}$$

作代换 $\begin{cases} \xi=y+\sin x+2x \\ \eta=y+\sin x-2x \end{cases}$，则

$$\overline{a_{11}}=0,\overline{a_{12}}=-8,\overline{a_{22}}=0$$

$$\overline{b_1}=-\frac{\xi+\eta}{2},\overline{b_2}=-\frac{\xi+\eta}{2}$$

$$\overline{c}=c=0,\overline{f}=f=0$$

故标准形式为

$$u_{\xi\eta}=-\frac{\xi+\eta}{32}(u_\xi+u_\eta)$$

（5）$\Delta=-(1+x^2)(1+y^2)<0$，方程为椭圆型

特征方程 $(1+x^2)(\mathrm{d}y)^2+(1+y^2)(\mathrm{d}x)^2=0$ 的解为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm i\sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}}$$

得积分曲线族

$$\begin{cases} \ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)+i\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=C_1 \\ \ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)-i\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=C_2 \end{cases}$$

作代换 $\begin{cases} \xi=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \\ \eta=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) \end{cases}$，则

$$\overline{a_{11}}=1,\overline{a_{12}}=0,\overline{a_{22}}=1$$

$$\overline{b_1}=0, \overline{b_2}=0$$

$$\overline{c}=c=0, \overline{f}=f=0$$

故标准形式为

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$$

Exercice: 4.1 节第 5 题

给定含参数 α 的二阶偏微分方程

$$u_{xx}+4u_{xy}-\alpha u_{yy}=0$$

当 α 取值在什么范围时，该方程可以通过自变量的线性变换 $(x,y)\to(t,z)$ 变成弦振动方程

$$u_{tt}-u_{zz}=0$$

证明：

$\Delta=4+\alpha$

首先令 $\alpha>-4$，使方程成为双曲型的

作代换 $\begin{cases} t=ax+by \\ z=cx+dy \end{cases}$，其中 $ad-bc\neq 0$

则 $\begin{cases} \overline{a_{11}}=a^2+4ab-\alpha b^2 \\ \overline{a_{12}}=ac+2(ad+bc)-\alpha bd \\ \overline{a_{22}}=c^2+4cd-\alpha d^2 \end{cases}$

于是方程能化为 $u_{tt}-u_{xx}=0$ 当且仅当

$$\begin{cases} ac+2(ad+bc)=\alpha bd \\ a^2+c^2+4(ab+cd)=\alpha(b^2+d^2) \end{cases}$$

有解 α

当且仅当

$$\begin{cases} (a-c)^2+4(a-c)(b-d)=\alpha(b-d)^2 \\ (a+c)^2+4(a+c)(b+d)=\alpha(b+d)^2 \end{cases}$$

有解 α

当且仅当

$$\begin{cases} (\dfrac{a-c}{b-d})^2+4(\dfrac{a-c}{b-d})=\alpha \\ (\dfrac{a+c}{b+d})^2+4(\dfrac{a+c}{b+d})=\alpha \end{cases}$$

有解 α

又由于 $\frac{a-c}{b-d}\neq\frac{a+c}{b+d}$，则上述问题等价说 $x^2+4x-\alpha=0$ 有两个解

即 $\Delta=16+4\alpha>0$，即 $\alpha>-4$

Exercice: 4.2 节第 1 题

求下列方程的特征方程和特征方向：

（1）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_4^2}$

（2）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$

（3）$\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

解：

（1）特征方程：

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2=\alpha_3^2+\alpha_4^2$$

由 $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2=1$，故可令
$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha,\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha,\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta,\alpha_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta$
得特征方向

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta)$$

（2）特征方程：

$$\alpha_0^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$$

由 $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_0^2=1$，解得 $\alpha_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$
则特征方向为与 t 轴夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 的任意方向

（3）特征方程：

$$\alpha_1^2-\alpha_2^2=0$$

由 $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_0^2=1$，解得特征方向

$$(\cos\alpha,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha)$$

Exercice: 4.2 节第 2 题

对波动方程 $u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=0$，求过直线 $l:t=0,y=2x$ 的特征平面

解：

即解方程组

$$\begin{cases}\alpha_0^2-a^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)=0\\ \alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2=1\\ (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)\cdot(0,1,2)=0\end{cases}$$

解得特征方向及特征平面为：

$$(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},-\frac{2}{\sqrt{5(1+a^2)}},\frac{1}{\sqrt{5(1+a^2)}}),\sqrt{5}at-2x+y=0$$

或

$$(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},-\frac{2}{\sqrt{5(1+a^2)}},\frac{1}{\sqrt{5(1+a^2)}}),\sqrt{5}at+2x-y=0$$

Exercice: 4.2 节第 7 题

说明方程 $u_{xy}+u_{yz}+u_{xz}=0$ 是双曲型方程，并求出它过原点的特征锥面

证明：

考虑 $A=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$，其特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-\frac{1}{2}$（二重）
则说明方程是双曲型的

特征方向 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1=0 \\ \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1 \end{cases}$$

解得特征方向只有三种 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$

则过原点与 $x=0,y=0,z=0$ 相切的锥面方程为

$$x^2+y^2+z^2=\frac{(x+y+z)^2}{2}$$

Exercice: 4.3 节第 1 题

设 $u(M)$ 为 R^3 中某区域 Ω 内的下调和函数，$M_0\in\Omega$，以 M_0 为球心，a 为半径的球体 B_a 完全落在 Ω 内，证明：成立

$$u(M_0)\le\frac{3}{4\pi a^2}\iiint\limits_{B_a} u\mathrm{d}V$$

证明：

Exercice: 4.3 节第 4 题

在 $Q_T=(0,l)\times(0,T)$ 中考察下列初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}+b(x,t)u_x+b_0(x,t)u_t+c(x,t)u=f(x,t) \\ u|_{x=0}=0,\quad (u_x+ku)|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$$

证明其解的唯一性及稳定性

Exercice: 4.3 节第 5 题

建立下列初边值问题的能量估计式：

$$u_t-\Delta u+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i}+c(x,t)u=f(x,t)\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\Big|_\Gamma=0u|_{t=0}=\varphi(x)$$

Exercice: 4.3 节第 7 题

考察边值问题

$$\Delta u+\sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i}+c(x)u=f\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\Big|_\Gamma=0$$

试证当 $c(x)$ 充分负时，其解在能量模意义下的稳定性

第五章

Exercice: 5.1 节第 1 题

把波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

带初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x,y,z) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x,y,z) \end{cases}$$

的柯西问题化为一个一阶方程组的柯西问题，并证明其解的等价性

解：令 $u_1 = u_t, u_2 = u_x, u_3 = u_y, u_4 = u_z$，得一阶方程组 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{1t} = a^2(u_{2x} + u_{3y} + u_{4z}) \\ u_{2t} = u_{1x}, \quad u_{3t} = u_{1y}, \quad u_{4t} = u_{1z} \\ u_{2y} = u_{3x}, \quad u_{2z} = u_{4x}, \quad u_{3z} = u_{4y} \\ u_1|_{t=0} = \psi(x,y,z) \\ u_2|_{t=0} = \varphi_x, \quad u_3|_{t=0} = \varphi_y, \quad u_4|_{t=0} = \varphi_z \end{cases}$$

下证等价性，

$\Rightarrow$：当 u 是原问题的 C^2 解时，上述 Cauchy 问题显然成立

$\leftarrow$：当 $(u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ 是上述 Cauchy 问题的解时，令

$$u(x,y,z,t) = \varphi(0,0,0,0) + \int_{(0,0,0,0)}^{(x,y,z,t)} u_1 \mathrm{d}t + u_2 \mathrm{d}x + u_3 \mathrm{d}y + u_4 \mathrm{d}z$$

由

$$\begin{cases} u_{2t} = u_{1x}, \quad u_{3t} = u_{1y}, \quad u_{4t} = u_{1z} \\ u_{2y} = u_{3x}, \quad u_{2z} = u_{4x}, \quad u_{3z} = u_{4y} \end{cases}$$

得积分与路径无关

于是存在唯一函数 $u(x,y,z,t) \in C^2$，使得 $u_1 = u_t, u_2 = u_x, u_3 = u_y, u_4 = u_z$

只需注意到

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t)|_{t=0} &= \varphi(0,0,0) + \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} u_2|_{t=0}\mathrm{d}x + u_3|_{t=0}\mathrm{d}y + u_4|_{t=0}\mathrm{d}z \\ &= \varphi(x,y,z) \end{aligned}$$

容易验证此时确定的 u 的确是原问题的解

Exercice: 5.1 节第 2 题

把方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

带初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = e^x \sin y \end{cases}$$

的柯西问题化为一个一阶偏微分方程组的柯西问题

Exercice: 5.2 节第 1 题

求一阶方程

（1）$\dfrac{\partial u}{\partial t}+a(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}+b(x,t)u+c(x,t)=0$

（2）$\dfrac{\partial u}{\partial t}+a(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}+b(x,t,u)=0$

的特征线和解沿特征线应成立的关系式

解：$(a^{ij})=a(x,t),\det\left(a^{ij}-\delta_{ij}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=0$，即得 $a(x,t)-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$
解出 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(x(t),t)$
沿特征曲线方程为

$$\frac{\mathrm{d}u(x(t),t)}{\mathrm{d}t}+b(x(t),t)u+c(x(t),t)=u_x x'(t)+u_t+b(x(t),t)u+c(x(t),t)=0$$

Exercice: 5.2 节第 2 题

求下列一阶方程带初始条件 $u|_{t=0}=\varphi(x)$ 的柯西问题的解：

（1）$\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

（2）$\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=u$

解：
（1）方程特征线满足 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1$，得特征线族为 $x-t=C$，则

$$\frac{\mathrm{d}u(x(t),t)}{\mathrm{d}t}=0=u_x+u_t$$

于是 $u(x,t)=u(x-t,0)=\varphi(x-t)$
（2）方程特征线满足 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1$，得特征线族为 $x-t=C$，则

$$\frac{\mathrm{d}u(x(t),t)}{\mathrm{d}t}=u_x+u_t=u$$

$u(x,t)=Ce^{Ct}$ 代入 $t=0$ 得

$$u(x,t)=u(x-t,0)=C=\varphi(x-t)$$

综上 $u(x,t)=\varphi(x-t)e^t$

Exercice: 5.2 节第 4 题

将下列各方程组化为对角型方程组：

（1）$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+(1+\sin x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial v}{\partial x}+x=0\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u=0\end{cases}$

（2）$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial v}{\partial x},(a>0)\end{cases}$

（3）$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + 6\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + 5\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + 5\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + 6\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 2u_1 \\ 3\dfrac{\partial u_3}{\partial t} + 6\dfrac{\partial u_3}{\partial x} - 3\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 2u_2 + 3u_3 - 3u_1 \end{cases}$$